

Phys. g. 302 ^m
Die

PHYSIK

auf

Grundlage der Erfahrung

von

Dr. Alb. Mousson,

Professor an der schweizerischen polytechnischen Schule.

Erste Abtheilung: Physik der Materie.

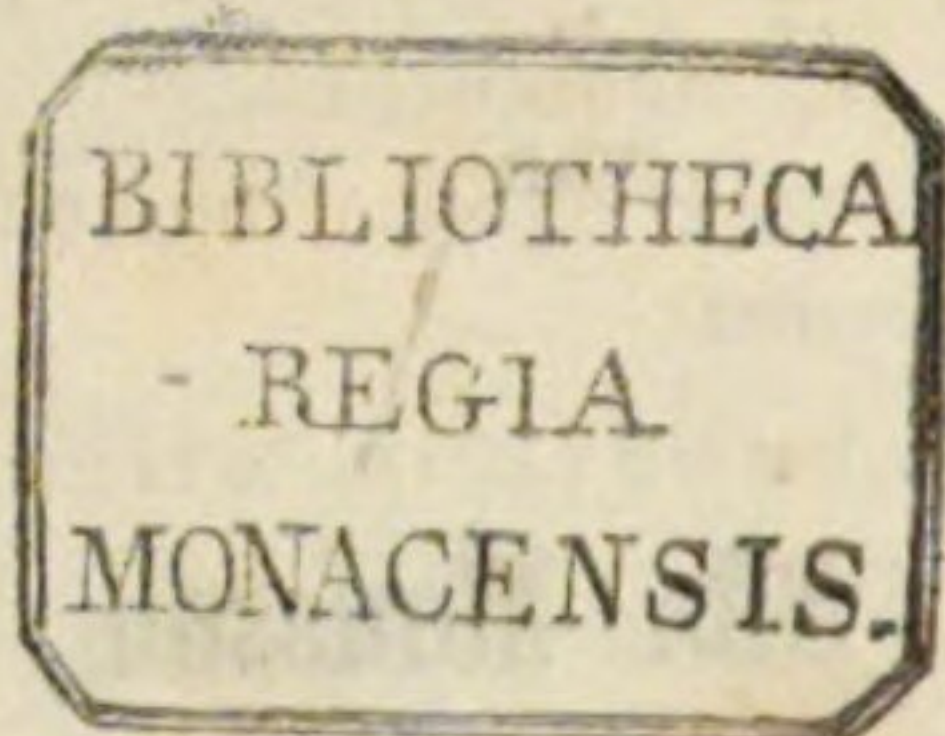
Mit vielen gravirten Abbildungen.

Zürich,

Druck und Verlag von Friedrich Schulthess.

1858.

8/4 - 9.



I n h a l t.

	Nro.	Seite.
Vorwort		
Einleitung	1—5	1
Theil I. Physik der Materie.		
Abschnitt I. Von den Körpern im Allgemeinen.		
A. Allgemeine Eigenschaften der Körper.		
Cap. 1. Eigenschaften der Räumlichkeit	7—12	7
Cap. 2. Eigenschaften der Wirkungsfähigkeit	13—20	13
Cap. 3. Die Aggregatformen	21—23	17
B. Von den Körperwirkungen im Allgemeinen.		
Cap. 4. Von der Bewegung	24—30	19
Cap. 5. Von den Kräften	31—38	24
Abschnitt II. Von der Schwere und den äussern Kräften.		
A. Feste Körper.		
Cap. 1. Allgemeine Sätze	39—45	30
Cap. 2. Vom Schwerpunkte	46—50	35
Cap. 3. Maschinen mit Drehung	51—58	39
Cap. 4. Maschinen mit Gleiten	59—63	46
Cap. 5. Fall und Wurfbewegung	64—71	49
Cap. 6. Die Pendelbewegung	72—81	56
Cap. 7. Die drehende Bewegung	82—90	67
Cap. 8. Die Gravitation	90—96	75
B. Flüssige Körper.		
Cap. 1. Der Druck der Flüssigkeiten	97—103	83
Cap. 2. Das Schwimmen der Körper	104—108	88
Cap. 3. Das specifische Gewicht	109—115	92
Cap. 4. Vom Abfluss aus Gefässen	116—124	98
Cap. 5. Das gehinderte Fliessen	125—131	106
Cap. 6. Reaction und Stoss des Wassers	132—139	111
Cap. 7. Die Wellenbewegung	140—148	118
C. Luftförmige Körper.		
Cap. 1. Der atmosphärische Druck	149—153	126
Cap. 2. Die Gesetze der Expansivkraft	154—161	129
Cap. 3. Anwendungen.	162—169	136
Cap. 4. Die Atmosphäre	170—174	143
Cap. 5. Der Abfluss der Gase	175—183	148
Cap. 6. Erscheinungen des dynamischen Druckes	184—190	155

Abschnitt III. Wirkungen der Cohäsionskräfte.

Nro. Seite.

Vorbemerkungen	191—193	161
A. Gleichgewichtserscheinungen.		
Cap. 1. Elasticität der Stäbe	194—202	163
Cap. 2. Andere Fälle der Elasticität	203—209	171
Cap. 3. Die Ductilität	210—215	177
Cap. 4. Die Cohäsion oder Festigkeit	216—226	481
Cap. 5. Cohäsionserscheinungen zweier Körper	227—234	188
Cap. 6. Die Krystallerscheinungen	235—244	194
Cap. 7. Cohäsionserscheinungen Einer Flüssigkeit	245—254	203
Cap. 8. Flüssigkeiten und feste Körper	255—263	209
Cap. 9. Verhalten zweier Flüssigkeiten	264—273	217
Cap. 10. Erscheinungen der Gase	274—285	225
B. Bewegungserscheinungen (Acustik)		
Cap. 1. Allgemeine Thatsachen	287—291	237
Cap. 2. Fortpflanzung des Schalles	292—298	240
Cap. 3. Aenderungen der Fortpflanzung.	299—307	247
Cap. 4. Von den Tonverhältnissen	308—315	258
Cap. 5. Blasinstrumente	316—321	261
Cap. 6. Weichelastische Körper	322—329	266
Cap. 7. Hartelastische Körper	330—339	271
Cap. 8. Mitschwingende Körper	340—345	279
Cap. 9. Die acustischen Organe des Menschen	346—353	283

V o r w o r t.

Wer längere Zeit ein wissenschaftliches Fach zu lehren berufen ist, bildet sich, oft mehr unbewusst als absichtlich, eine eigene Behandlungsweise aus, welche den eigenen Anschauungen und der Stufe seiner Zuhörer am besten entspricht. Einen andern Grund wüsste ich für die Entstehung und das Erscheinen des gegenwärtigen Buches nicht anzugeben. Namentlich ist der Verfasser weit entfernt zu wähnen, dass Andere bei der Benutzung desselben die gleichen Vortheile, wie er selbst, finden oder den von ihm befolgten Entwicklungsgang in Allem billigen werden. Vieles in der Auffassung selbst eines wissenschaftlichen Stoffes bleibt, unbeschadet der objectiven Wahrheit, subjectiven Bedingungen unterworfen, die sich eben in der Eigenthümlichkeit der Behandlung und Darstellung aussprechen.

Es setzt das Buch, obschon an die ersten Elemente anknüpfend, eine Altersstufe voraus, auf welcher das Bedürfniss nach einer strengwissenschaftlichen Begründung bereits erwacht, zugleich auch eine gewisse Reife der Vorkenntnisse erworben ist. Doch schliesst es die höhern Rechnungsmethoden aus, oder benutzt davon nur so viel, als absolut unentbehrlich ist. Demjenigen, der das Fach nicht weiter bearbeitet, soll es das Maass wissenschaftlicher Kenntnisse bieten, dessen er als Vorbereitung für seine technischen Zwecke bedarf; demjenigen, dem weiter zu bauen vergönnt ist, möge es zur breiten und sichern Grundlage dienen.

Die Physik auf ihrer heutigen Stufe ist eine ausgedehnte Sammlung empirischer Thatsachen, deren Sichtung und Bewältigung nicht anders als an der Hand der Theorie möglich erscheint. Die Theorieen selbst aber sind die Frucht einer fortschreitenden Induktion, welche bald in weitem Fluge der Beobachtung vorausseilt, bald sich mit Mühe nur zwischen den Thatsachen hindurch arbeitet. Die gehörige Vermittlung der empirischen und theoretischen Physik, gemäss dem jeweiligen

Standpunkte der Wissenschaft, bildet wohl die schwierigste Aufgabe eines dem academischen Unterrichte bestimmten Buches. Ich habe mich bemüht, der einen und andern Richtung der Wissenschaft ihr Recht angedeihen zu lassen und habe daher, je nach der Kenntnissstufe einer Erscheinung, bald mehr den einen, bald mehr den andern Standpunkt vorwalten lassen. Vor allem aber fordert die Wahrheit, einerseits dass die Voraussetzungen, auf welchen eine Theorie beruht, anderseits dass die Schranken, innerhalb deren die Beobachtungen sich bewegen, mit Gewissenhaftigkeit festgestellt werden. Abweichend von der reinen Mechanik ist die Physik ein im Werden begriffenes, kein in seinen Prinzipien vollendetes Fach; da muss die Kenntniss der Grenzen des Wissens derjenigen seines Inhaltes für die richtige Einsicht zur Ergänzung dienen.

Man wird in der Eintheilung und Anordnung des Buches manche Abweichungen von den bisherigen Lehrbüchern bemerken; es schien mir aber auf der Stufe des academischen Unterrichtes wünschbar, nicht eine oberflächliche Aehnlichkeit der Erscheinungen, sondern einen systematischen Grundgedanken, den der wirkenden Ursachen, zum leitenden Prinzip zu wählen. Ein vollständiges System der Physik bleibt immerhin ein noch lange unerreichtes Ziel; weil es unendlich schwer ist, von der beschränkten specifischen Sinneswahrnehmung, der einzigen Quelle unseres realen Wissens, zu der reinen objectiven Wahrheit hindurch zu dringen.

Möge im Uebrigen das Buch vor den Augen des wissenschaftlichen Publikums sich selbst rechtfertigen.

Zürich, im September 1857.

Alb. Mousson.

Einleitung.

1. Die Natur. — Mit dem Worte **Materie** bezeichnen wir Alles, was sich unsern Sinnen als wirklich und bleibend vorhanden darstellt. Ein abgegrenzter Theil von Materie heisst ein **Körper**. Alle Körper in ihrer Gesammtheit bilden die **Natur**, die sich schrankenlos und unendlich mannigfach vor unserer Wahrnehmung entfaltet. Für das Dasein der Körper haben wir immerhin keinen andern Beweis, als die bestimmte, gesetzmässige, objective Sinneswahrnehmung, die wir erhalten.

Die **Natur** kann von doppelter Seite Gegenstand der Forschung werden. Einmal kann man die Naturkörper, wie sie sich bleibend darstellen, nach ihrer Gestalt, ihren Theilen, ihrem innern und äussern Bau u. s. w. untersuchen. Die so erkannten Merkmale führen zu einer Vergleichung, einer Verbindung und Trennung, einer Classification derselben. Diess ist die Aufgabe der **Naturgeschichte**. — Oder man verfolgt die wechselnden Erscheinungen, welche die Körper und ihre Theile erleiden und sucht sich von dem Hergang und den Ursachen derselben Rechenschaft zu geben, wobei der jedesmalige Zustand nur als Ruhepunkt einer grössern Entwicklung erscheint. Mit dieser Untersuchung befasst sich die **Naturlehre**.

Unsere Kenntnisse, weil ausschliesslich auf Erfahrung gegründet, sind Stückwerk. Namentlich sind die Erscheinungen der organischen Körper, deren wunderbare Daseinsform wir **Leben** nennen, noch von Räthseln verhüllt. Andere Erscheinungen dagegen umfassen die sämtlichen Körper, auch diejenigen der sogenannten **totten Natur**. Sie haben daher grössere Allgemeinheit, sind genauer bekannt und bilden die **Naturlehre** im engern Sinne.

2. Physik und Chemie. — Doch auch diess Gebiet ist noch zu weit, um in Eine Wissenschaft zusammengefasst zu werden, daher man es weiter in die **Chemie** und die eigentliche **Physik** theilt.

Erstere betrachtet alle jene Veränderungen, bei denen durch die innige Aufnahme oder Abgabe anderer Stoffe das innerste Wesen der Körper, ihre Substanz, für unsere Wahrnehmung verändert wird. Das Rosten des Eisens, das Brennen des Kalkes, die Gährung des Weines sind Vorgänge dieser Art, in Folge deren der Körper durch und durch neue Eigenschaften gewinnt, für unsere Sinne ein anderer wird. — Reichen dagegen die Veränderungen nicht bis auf die Substanz, bestehen z. B. nur in einer Ortsversetzung des Körpers oder in einer Bewegung seiner Theile, wie bei dem Wurf eines Steines, der Biegung eines Stabes, der Ausdehnung durch Wärme u. s. w., so gehören sie in den Bereich der **Physik**.

Die Physik und Chemie ergänzen sich zu einer vollständigen Kenntniss der allgemeinen Körperveränderungen; beide unterstützen sich bei ihren Untersuchungen und greifen auf das Innigste in einander ein. Viele Erscheinungen theilen überdiess den doppelten Charakter einer physicalischen und chemischen Veränderung; andere sind ihrer Natur nach unbestimmt und stehen an der Grenze beider Gebiete. Darum kann keine dieser Wissenschaften der andern entbehren.

3. Aufgabe der Physik. — Die Physik kennt keine andere Grundlage als die Beobachtung; denn Alles was wir von der Natur wissen, stammt ursprünglich aus der Sinneswahrnehmung und wurde erst nachher ein Gegenstand des Nachdenkens.

Hiernach lassen sich in der Erkenntniss einer jeden Erscheinung drei verschiedene Stufen unterscheiden. 1. Auf der ersten begnügt man sich, die Art und Weise wie die Erscheinung an unsern Sinnen vorübergeht, die Reihenfolge ihrer Entwicklungsstufen, den ungefähren Zusammenhang derselben zu erfassen. Es ist diess der Gang der Erscheinung. 2. Oder man dringt tiefer ein, indem man mittelst angemessener Instrumente und besonderer Versuche die auftretenden und sich verändernden Grössen genau misst und in eine naturgemässe Beziehung bringt. Eine solche genaue Beziehung, durch eine mathematische Gleichung ausdrückbar, heisst ein physicalisches Gesetz, — die zweite Stufe unserer Erkenntniss. 3. Endlich liegt es im menschlichen Geiste, jeder Wirkung eine Ursache unterzulegen, aus deren Thätigkeit sie mit Nothwendigkeit hervorgegangen ist. Solche in der Natur wirkende, zur Erklärung der Erscheinungen dienende Ursachen nennt man Kräfte. Insofern die Ermittlung der Naturkräfte das oberste Ziel der Physik bildet, definirt man diese Wissenschaft oft als die Lehre von den allgemeinen Kräften der Natur.

Da nur die Aeusserung, nicht das Wesen der Kräfte der Beobachtung anheim fällt, so bleibt die Annahme der letztern eine blosser Hypothese. Doch gewinnt sie für uns um so mehr Wahrscheinlichkeit, je zahlreicher ihre Folgerungen sind und je genauer sie mit der Beobachtung übereinstimmen. Bereits ist es gelungen, eine sehr grosse Zahl von Erscheinungen auf eine kleine Zahl einfacher, unter verschiedenen Umständen wirkender Kräfte zurückzuführen. Was überhaupt die Beobachtung oder der Versuch als vereinzelte Thatsache empirisch feststellt, erhält erst durch die Theorie seine wahre Bedeutung, wird erst durch sie gründlicher aufgeklärt und naturgemäss an andere Thatsachen geknüpft. Man vergesse aber nicht, dass der Inhalt unseres empirischen Wissens an der Natur und Beschränktheit unserer Sinne und an der Unvollkommenheit unserer Beobachtungsmittel in mancher Hinsicht auf unübersteigliche Schranken stösst.

4. Gliederung der Physik. — Die Gliederung der Physik kann von einem dreifachen Eintheilungsgrunde ausgehen: 1. von der äussern Form der Erscheinungen; 2. von der Natur der Körper, an welchen sie sich zeigen; 3. endlich vor den in ihnen sich offenbarenden Kräften. Da dieser letztere Gesichtspunkt dem obersten

Ziele der Physik, der Ermittlung der Naturkräfte, entspricht, setzen wir ihn in erste Linie; die beiden andern dienen uns dann zur weiteren Bildung der Abtheilungen.

Die sämmtlichen beobachteten Erscheinungen zerfallen vorerst in zwei Hauptclassen, je nachdem die wirkenden Kräfte an die greifbaren materiellen Theilchen gebunden erscheinen oder, theilweise wenigstens, davon unabhängig sind. Die ersten Erscheinungen, im wahrnehmbaren Raume vor sich gehend, bilden die mechanische Physik; die zweiten, deren einfacher Spielraum aller direkten Beobachtung entgeht, die dynamische Physik. Insofern man diese letztern einem besondern allgemein verbreiteten Agens zuschreibt, das durch Gewichtlosigkeit, durch Unsperrbarkeit und Unbegrenztheit von der greifbaren Materie sich unterscheidet und Aether genannt wird, kann man die beiden Theile auch als Physik der Materie und Physik des Aethers bezeichnen.

Die Physik der Materie, deren Erscheinungen grossentheils vollständig aufgeklärt sind, umfasst die Wirkungen der äussern, den Körpern fremden Kräfte, dann der Schwere, die schon auf Entfernung hin zwischen den Körpern thätig ist, endlich der Cohäsionskräfte, welche erst zwischen sehr naheliegenden, sich gleichsam berührenden Theilen merkbar hervortreten. — Die Physik des Aethers hinwieder handelt von der Wärme, dem Lichte, dem Magnetismus und der Electricität, vier Gebieten, deren oberste Grundsätze zwar innig verknüpft, deren Erscheinungen bisher aber nicht vollständig auf einander zurückgeführt worden sind.

So ergeben sich denn naturgemäss die folgenden Hauptabschnitte der Physik.

I. Physik der Materie.

1. Von den Körpern und ihren Wirkungen im Allgemeinen.
2. Von den äusseren Kräften und der Schwere.
3. Von den Cohäsionskräften, mit Einschluss der Acustik.

II. Physik des Aethers.

4. Von der Wärme.
5. Vom Licht.
6. Von dem Magnetismus und der Electricität.

5. Mathematische Hülfsätze. — Obgleich im Folgenden die höhern Rechnungsarten ausgeschlossen bleiben, wäre es dennoch unmöglich, manche wichtigen physicalischen Gesetze richtig zu begründen, ohne einige der einfachsten Sätze der Functionenrechnung als bekannt vorauszusetzen. Wir wollen diese Sätze hier für ein und allemal zusammenstellen.

1. Eine Grösse x wachse von einem ersten Werthe a stetig bis zu einem andern b ; seien $x_1, x_2, x_3 \dots$ eine Reihe von Zwischenwerthen, und es bezeichnen Δx allgemein die Differenz zweier solcher auf einander folgender Werthe: so wird die Summe aller Differenzen Δx , die wir durch $S(\Delta x)$ ausdrücken wollen, von $x = a$ bis $x = b$ genommen, geben

$$I. S(\Delta x) = x_1 - a + (x_2 - x_1) + \dots = b - a$$

ein Ausdruck der richtig ist, wie weit auseinander die Werthe $x_1, x_2 \dots$ auch liegen mögen.

2. Seien überhaupt x, x_1 zwei auf einanderfolgende Werthe von x , so dass

$$x_1 = x + \Delta x$$
man erhält $x_1^{n+1} = (x + \Delta x)^{n+1} = x^{n+1} + (n+1) x^n \Delta x + \dots$
und wenn Δx , wie bei stetigem Wachsen von x_1 , als unendlich klein betrachtet und mit δx bezeichnet wird, so dass alle höhern Potenzen verschwinden,

$$x^n \delta x = \frac{1}{n+1} (x_1^{n+1} - x^{n+1}) = \frac{1}{n+1} \delta x^{n+1}$$

folglich

$$\text{II. } S(x^n \delta x) = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1})$$

3. Nach einer bekannten Formel hat man für natürliche Logarithmen

$$l x_1 = l x \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = l x + \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \dots$$

daraus für sehr kleine Δx oder für δx

$$\frac{\delta x}{x} = l x_1 - l x = \delta l x$$

folglich von $x = a$ bis $x = b$.

$$\text{III. } S\left(\frac{\delta x}{x}\right) = l b - l a = l \frac{b}{a} = m \lg \left(\frac{b}{a}\right)$$

wenn $\lg$ gem. Logarithmen bezeichnet, deren Modul $m = 2,3025851$ ist.

4. Ebenso hat man bekanntermassen, wenn $e = 2,7182818 \dots$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen darstellt,

$$e^{x_1} = e^{(x + \Delta x)} = e^x \left(1 + \Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} + \dots\right)$$

Also für unendlich kleines Δx oder δx

$$e^x \delta x = e^{x_1} - e^x = \delta e^x$$

und zwischen den Grenzen a und b .

$$\text{IV. } S(e^x \delta x) = e^b - e^a$$

5. Endlich erhält man für die einfachsten trigonometrischen Linien für sehr kleine δx

$$\begin{aligned} \sin x_1 &= \sin(x + \delta x) = \sin x + \cos x \delta x \\ \cos x_1 &= \cos(x + \delta x) = \cos x - \sin x \delta x \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \cos x \delta x &= \sin x_1 - \sin x = \delta(\sin x) \text{ und} \\ \sin x \delta x &= \cos x - \cos x_1 = -\delta(\cos x) \end{aligned}$$

und zwischen den Grenzen

$$\begin{aligned} \text{V. } S(\cos x \delta x) &= \sin b - \sin a \\ S(\sin x \delta x) &= \cos a - \cos b. \end{aligned}$$

Wir werden diese Summationsausdrücke, welche, wohlverstanden, nur für Grössen richtig sind, die von der einen zur andern Grenze stetig und allmähig, ohne unendlich gross zu werden, wachsen, als bekannt annehmen, und einfach mit den Worten: Formel I, II u. s. f. auf dieselben verweisen.

Teil I.

Physik der Materie.

Physik der Materie.

Abschnitt I.

Von den Körpern im Allgemeinen.

6. Begriff eines Körpers. — Der Begriff eines unsern Sinnen wahrnehmbaren, wirklichen Körpers knüpft sich an drei Daseinsbedingungen, die immer und nothwendig verbunden sind. Jeder Körper hat Ausdehnung oder nimmt einen bestimmten Raum ein; er hat Dauer oder ein Bestehen in der Zeit; und besitzt Wirkungs-fähigkeit, d. h. das Vermögen in andern Körpern Veränderungen hervorzurufen oder von ihnen solche zu empfangen. Was Zeit und Raum sind, lässt sich weiter nicht definiren, ist uns aber als Folge unseres eigenen physischen Daseins unmittelbar klar. Ohne Wirkungs-fähigkeit, mit andern Worten, ohne Kräfte (3) wäre ein Körper für alle andern, somit auch für unsere materiellen Sinnesorgane, nicht vorhanden.

An diese unbedingten Grundeigenschaften reihen sich die allgemeinen Eigenschaften der Körper an, welche zum Theil als ein Ausfluss jener zu betrachten, zum Theil aus der Erfahrung abgeleitet sind und in sofern nur in den Grenzen der Beobachtung erwiesene Gültigkeit haben. Es gehören dahin: die Begrenzung, die Theilbarkeit, die Porosität, welche mehr mit dem räumlichen Sein, die Undurchdringlichkeit, die Beweglichkeit und Theilbeweglichkeit, welche mehr mit der Wirkungs-fähigkeit in Verbindung stehen.

A. Allgemeine Eigenschaften der Körper.

Cap. 1. Eigenschaften der Räumlichkeit.

1. Begrenzung.

7. Geometrische Eigenschaften. — Jeder Körper ist begrenzt und dadurch von den übrigen abgesondert. Von der Art seiner Begrenzung hängen ab: 1. seine Dimensionen, die gewöhnlich auf drei rechtwinklichte Richtungen, als Länge, Breite und Dicke, bezogen werden; 2. sein Volumen oder die Grösse des von ihm eingenommenen Raumes; 3. seine Gestalt, welche von ebenen oder krummen Flächen, die in Kanten und Ecken zusammenstossen, gebildet wird.

An Grösse und Gestalt weichen die Naturkörper ins Unendliche

ab. Von der alle Vorstellung übersteigenden Grösse der Himmelskörper bis zu der verschwindenden Monade, von dem zusammengesetzten organischen Körper hinab zu dem einfachen Wassertropfen oder dem regelmässigen Kristall, sehen wir eine ununterbrochene Reihe von Grössen und Formen, von denen im strengen Wortsinne nicht zwei ganz übereinstimmend sind.

1. Das Volumen der Sonne, einer der kleineren Fixsterne, enthält 1400000 Mal dasjenige der Erde oder gegen 3736 Billionen Cubikmeilen (die geographische Meile zu 7420 Met. gerechnet). — Die kleine Monas thermomist $\frac{1}{1000}$ Millim. und stellt dennoch einen mit Bewegung begabten zusammengesetzten Organismus dar.

2. Einfache geometrische Formen sind das Eigenthum der unorganischen Natur, das Resultat einer von Aussen erfolgenden Anhäufung der Theile. Bei den organischen Körpern, die einer inneren Entwicklung ihre Gestalt verdanken, kommen symetrische Anordnungen (z. B. die beiden Seiten der Wirbelthiere, die Sterngestalt der Stralhtiere, die Blätterstellung der Pflanzen u. s. w.), aber keine wirklich einfachen Formen vor.

8. Messung. — Grösse und Gestalt der Körper bestimmt man genauer durch **A u s m e s s u n g** derselben, welche in der Regel auf die Messung von geraden Linien und ihren Richtungen, d. h. von Winkeln, zurückgeführt wird. Man bedarf dazu bekannter Linien und Winkелеinheiten, welche man als Maassstäbe und Kreistheilungen darstellt, und untersucht nun, wie viele solcher Einheiten die zu messende Grösse enthält.

Als Winkелеinheit dient allgemein der **G r a d**, ein Winkel, welcher der 360ste Theil des Elächenraumes um einen Punkt herum ist.

1 Grad = 60 Minuten; 1 = 60 Secunden.

Die Längeneinheiten weichen von einem Lande zum andern ab. Wir halten uns in der Folge an das neufranzösische Maasssystem, das vom Meter als Einheit ausgeht, weil es 1. der einfachsten, der Decimaleintheilung, folgt, 2. für wissenschaftliche Untersuchungen immer allgemeiner benutzt wird, und 3. dem schweizerischen Maasssystem zur Grundlage dient.

1 Meter = 10 Decim.; 1 = 10 Centim.; 1 = 10 Millim.
= 0,1 Decam.; 1 = 0,1 Hectom.; 1 = 0,1 Kilom.

Die Cubikeinheit für Flüssigkeiten ist das Liter.

1 Liter = 1 Cub. Decim.

für feste Körper die **Stère**.

1 Stère = 1 Cub. Met.,

welche beiden Einheiten wieder, wie das Meter, zehnthellig eingetheilt werden.

1. Das Metermaass wurde 1799 aufgestellt, um der Vergänglichkeit aller willkürlichen oder künstlichen Maasse zu entgehen. Der Natur selbst entnommen, sollte das Meter Ein Zehnmilliontel des Meridianquadranten betragen. Die damaligen Messungen ergaben

1 Meter = 443,296 Linien der Toise-de-Perou (bei 13° R.), welche Grösse als legales Meter gesetzliche Gültigkeit erhielt. Leider konnten die zu Grunde gelegten Messungen nicht genau sein; dadurch erklärt sich, dass das natürliche Meter nach neuen Bestimmungen um 858 Zehnmilliontel grösser ist als das legale.

2. Der Fuss verschiedener Länder hat, mit dem Meter verglichen, folgenden Werth:

	1 Fuss in Metern.	1 Meter in Fussen.
Frankreich (Pariserf.)	0,3248394	3,078444
England ($\frac{1}{3}$ Yard), Russland	0,3047945	3,280899
Oesterreich (Wienerf.)	0,3161109	3,163446
Preussen, Dänemark (Rheinl. F.)	0,3138535	3,186199
Schweden	0,3014943	3,368126
Baiern	0,2918592	3,426310
Hannover	0,2920947	3,423547
Sachsen	0,2831901	3,531197
Hessen (Kasselerf.)	0,2876991	3,475854
Württemberg	0,2864903	3,490519
Baden, Schweiz	0,3000000	3,333333

3. Von grössern Wegeinheiten ist der Werth der folgenden zu kennen wichtig:

	1 Wegeinh. in Kilom.	1 Kilom. in Wegeinh.
Französisches Myriameter.	10,000000	0,1000000
Englische Meile (5280')	1,609315	0,6213824
Deutsche oder geogr. M. ($15 = 10^0$)	7,420158	0,1347680
Preussische M. (24000')	7,532485	0,1327583
Oesterreichische M. (24000')	7,586663	0,1318103
Seemeile (Engl. u. Franz.) ($20 = 10^0$)	5,565118	0,1796907
Russische Werste (3500')	1,066781	0,9373997
Schweizerstunde (16000')	4,800000	0,2083333

4. Die Schweizerischen Maasse sind:

- 1 Schw. Fuss = 3 Decimeter.
 = 10 Zoll; 1 = 10 Linien; 1 = 10 Striche.
 = $\frac{1}{2}$ Elle = $\frac{1}{4}$ Stab = $\frac{1}{6}$ Klafter = $\frac{1}{10}$ Ruthe.
 1 Schw. Maass = $1\frac{1}{2}$ Liter = 1, 5 Cub. Decim = $\frac{1}{18}$ Cub. Fuss.
 = 2 Halbm; 1 = 2 Viertelm; 1 = 2 Achtelm.
 = $\frac{1}{100}$ Saum.
 1 Schw. Viertel = 15 Cub. Decim. = $\frac{5}{9}$ Cub. Fuss.
 = 10 Jmmi oder Maass.
 = $\frac{1}{10}$ Malter oder Saum.

9. Genaue Messung. — Die unmittelbare Messung mit Hülfe eines Maassstabes kann nicht weiter geführt werden, als bis auf die kleinsten an dem letztern angegebenen Grössen und findet an der Schwierigkeit, sehr feine Theilungen zu bilden und zu benutzen, eine Grenze. Wird eine grössere Genauigkeit verlangt, so kommen indirekte Mittel zur Anwendung, welche alle zum Zwecke haben, mittelst grösserer Theile kleinere bestimmen zu lassen. Die üblichsten derselben sind die folgenden:

1. Der Nonius (Vernier). So nennt man einen Hilfsmaassstab A (Fig. 1), der sich an dem Hauptstabe B verschieben lässt und dessen

Theile um die zu bestimmende Grösse $\frac{1}{n}$ kleiner sind als die Einheiten des letztern. Zu dem Ende erhält er eine Länge von $n - 1$ Theilen des Hauptstabes, in n Theile getheilt. An beiden Stäben laufen die Zahlen im gleichen Sinn. Will man nun eine Länge C bestimmen, so liest man vorerst die ganzen Theile m der Länge C an dem Hauptstabe B und den hinzukommenden Bruchtheilen $\frac{\mu}{n}$ an dem Theilstriche μ des Nonius A, der mit einem solchen des Hauptstabes am genauesten

zusammenfällt, denn μa und μm weichen um $\frac{\mu}{n}$ von einander ab. Die gesuchte Länge wird $m + \frac{\mu}{n}$ sein, bis auf $\frac{1}{n}$ genau.

Nonien an Kaliberstäben, an Barometern, an Kreistheilungen.

2. Der Fühlhebel (Fig. 2) besteht aus zwei nach einem bekannten Verhältniss $n : 1$ ungleichen Armen $a b$ und $a c$, die sich mit einander um den Punkt a drehen. Der längere, oft mit Nonius versehene Arm dient auf einer Eintheilung $d e$ als Zeiger; der kürzere wird durch eine Feder an den zu messenden Gegenstand angedrückt, welcher sich anderseits an den festen Punkt f stützt. Entspricht der Nullpunkt der Eintheilung dem festen Punkte f selbst, so wird eine Stellung m des Zeigers, eine Dicke $\frac{m}{n}$ des Gegenstandes in Theilen der Theilung angeben. Trägt überdiess der Zeiger einen Nonius von n' Theilen, so lässt sich noch $\frac{1}{n \cdot n'}$ der Haupttheile, also eine sehr kleine Grösse bestimmen,

Tastzirkel, Dickenmesser für Drähte und Bleche, Comparatoren der Maassstäbe mit abstehendem festem Punkte.

3. Die Micrometerschraube. — Eine genau geschnittene Schraube a (Fig. 3) dreht sich in einer festen Mutter b und trägt an ihrem Kopfe eine in n Theile getheilte Scheibe $c d$. Durch jede ganze Drehung bewegt sich das Ende der Schraube um Eine Windung vor oder zurück, durch Drehung um μ Theile (an einem Index abgelesen) um $\frac{\mu}{n}$ einer Windung. Entspricht die zu messende Grösse m ganzen Um-

drehungen und μ Theilen der Scheibe, so beträgt dieselbe $m + \frac{\mu}{n}$ Windungshöhen. Diese letztern kennt man durch Ausmessen der Länge, welche eine bekannte Zahl von Windungen einnimmt.

Sphærometer für dünne Blättchen, Schraubenmicrometer an astronomischen und optischen Instrumenten, kleine Theilmaschinen mit beweglicher Mutter.

Der Genauigkeit solcher feinen Messungsmittel wird theils durch die Unvollkommenheit der Theilungen, theils durch die Ungenauigkeit der Bewegungen und die Elasticität der Theile eine Grenze gesetzt.

10. Zusammengesetzte Messinstrumente. — In der messenden Physik sind besonders Instrumente nothwendig: 1. um verticale; 2. horizontale Linien, ferner 3. verticale und horizontale Winkel (Höhen und Azimuthwinkel) zu bestimmen.

Verticale Linien werden mittelst des von Regnault in Aufnahme gebrachten Cathetometers gemessen. Eine durch Fusschrauben vertical zu stellende Säule (Fig. 4) trägt eine genaue Millimetertheilung, längs welcher ein mittelst feiner Schrauben zu stellender Schieber mit Nonius sich bewegt. Der Schieber führt ein genau horizontal zu richtendes Fernrohr, dessen Fadenkreuz man auf die zu bestimmenden Punkte einstellt.

Horizontale Linien werden mit Hülfe der Theilmaschine oder ähnlicher Vorrichtungen (Fig. 5) bestimmt. Eine starke und feine horizontale Schraube lässt sich ohne Ortsversetzung drehen, während die Mutter, die je nach dem Zwecke, ein Fernrohr, ein Microscop oder ein Schneidezeug führt, zwischen Landleisten fortrückt. Eine Micrometertheilung am Ende der Schraube lässt das Vorrücken mit Genauigkeit bestimmen.

Zur Winkelmessung endlich dient vorzugsweise der Theodolith mit horizontaler Kreistheilung für die Azimuthal- und verticaler für die Höhenwinkel. Jeder Kreis hat sein drehbares Fernrohr und wird mit Nonien abgelesen. Seine Hauptbedeutung erhält der Theodolith in der Geodäsie und Astronomie, wohin dessen nähere Beschreibung gehört.

2. Theilbarkeit. (Divisibilität.)

II. Theilbarkeit heisst die Eigenschaft der Körper sich in kleinere Theile zerlegen zu lassen. Obgleich mit der Ausdehnung nothwendig verbunden, bleibt für die Beobachtung doch unentschieden, ob die Theilung eines wirklichen Körpers, wie diejenige des geometrischen Raumes unbegrenzt ist, oder zuletzt auf bleibende, unzerlegbare Atome führt. In der Wirklichkeit kennen wir keine andere Schranke der unmittelbaren Theilung, als die Unvollkommenheit unserer Theilungsmittel und unserer Sinne. Theilchen von $\frac{1}{1000}$ Mm. kann unser Finger, solche, die unter einem Winkel von 1 Secunde erscheinen, das Auge nicht gehörig mehr unterscheiden. Es lässt sich inzwischen das Verhalten der Körper bei den chemischen Veränderungen, die Thatsache namentlich, dass jede Substanz aus ihren chemischen Verbindungen mit den nämlichen Eigenschaften wieder hervortritt, am einfachsten aus der Annahme letzter unveränderlicher Atome erklären.

Manche Körper sind einer weitgehenden Theilung fähig: die Metalle durch Ausschlagen und Ausziehen, das erweichte Glas durch Spinnen und Ausblasen, die spröden Körper durch Pulvern und Zerreiben, blätterige und faserige Stoffe durch Spalten oder Erwärmen, manche Flüssigkeiten durch Schütteln mit andern, mit denen sie sich nicht mischen u. s. f. Viel weiter geht aber noch die Theilung, die wir in der Natur, selbst in der organischen, beobachten. Endlich übersteigt die Vertheilung mancher Farbstoffe oder Reagentien in Flüssigkeiten, mancher Riechstoffe in der Luft alle Berechnung und beweist zugleich die grosse Empfindlichkeit unserer Sinne, des Auges, des Geruchs und Geschmacks für gewisse Eindrücke.

1. Mehrmals glaubte man die Atome der Körper erreicht zu haben; später wurden selbst organische Körper von geringerer Grösse entdeckt.

2. Beispiele künstlicher Theilung. — Ein Pfund Baumwolle wurde in Manchester zu einem Faden von 170 englische Meilen, 1 Pfund Hanf in Irland zu einem solchen von 1432 englische Meilen ausgesponnen. — Ben Neven verfertigte Zeuge, in denen gegen 70000 Maschen auf den Quadratzoll gehen — Die Haarmicrometer von Ramsden lassen $\frac{1}{500}$ eines Menschenhaares messen — Die Theilmaschine von Harrison soll 10000, diejenige von Frauenhofer 30000 Furchen auf den Zoll ziehen. — In den feinen Lionerspitzen werden Silberfaden benutzt, zu deren Vergoldung 2 Unzen Gold auf 112 Stunden Länge kommen würden. Jede Unze gibt dann 1400 Millionen dem Auge sichtbare Theilchen. — Wollaston hat Platinfaden gebildet, die

nicht mehr als $\frac{1}{1200}$ Mm. Dicke hatten. — Glimmer lässt sich in Blattchen spalten, von denen mehr als 100 auf 1 Mm. gehen. — In den Mercurialsalben haben die Quecksilberkügelchen kaum $\frac{1}{200}$ Millm. und können deshalb durch die Poren der Haut eindringen. — Durch Porphyrisiren werden Theilchen erhalten, welche zuletzt aller Messung entgehen.

3. Beispiele starker Vertheilungen. — Dabin gehören die Niederschläge und Färbungen mancher chemischen Reagentien. Man entdeckt mittelst

Ammoniak noch	0,0000064 Kupferoxyd.
Kleesäure	0,0000012 Kalk.
Schwefelsäure	0,0000025 Baryt.
Salzsäure	0,0000012 Silberoxyd.
Schwefelwasserstoff	0,0000001 Jod.

2 Gran Karmin färben 20 Pfund Wasser merkbar roth; 1 Tropfen Indigo 500 Cub. Zoll Wasser. Ersteres setzt nach Achard eine Vertheilung in 153 Millionen, letzteres nach Parrot in 500 Billionen wahrnehmbare Theilchen auf den Cubikzoll voraus. — Noch weiter gehen die Berechnungen über die Vertheilung der durch den Geruch wahrnehmbaren Stoffe, wie Kampher, Moschus, Asa foetida. Kreil berechnet aus dem Verlust von $\frac{1}{8}$ Gran, welchen ein Stückchen der letzten Substanz in 6 Tagen erlitt, dass 1 Cubikfuss derselben 38 Trillionen wahrnehmbare Theilchen liefern könne.

3. Porosität.

12. Die meisten Körper bilden kein stetig erfülltes Ganzes, sondern enthalten eine Menge durch Versuche oder Vergrößerungsgläser zu entdeckender Lücken oder Poren. Die unregelmässige Gestalt und ungleiche Vertheilung derselben beweisen genügend, dass sie nicht als ein wesentliches Merkmal der Materie, sondern als das zufällige Resultat einer ungleichmässigen Ausbildung zu betrachten sind. In der That findet sich eine wahrnehmbare Porosität nur bei festen Körpern und zwar vorzugsweise bei zwei Classen derselben: 1. bei fast allen organischen Stoffen, wo die Entwicklungsweise die Porosität mit sich bringt und sie die wichtigen Prozesse der Absorption, Secretion, Exhalation u. s. f. mitbedingt; 2. in den meisten unorganischen Aggregaten, wo sie durch eine unvollkommene Vereinigung vorher gebildeter Körner entstanden ist. So verhält es sich mit den meisten aus Körnern zusammengekitteten Gesteinen, mit vielen kristallinischkörnigen Metallen u. s. f. — Bei manchen andern Substanzen, beim Glase, bei vielen Kristallen, bei den Flüssigkeiten lassen auch die schärfsten direkten Beobachtungsmittel keine Spur von Porosität erkennen. Den Durchgang des Lichtes durch die erstern, die Aufsaugung der Luft durch die letztern der Porosität zuzuschreiben, ist nicht frei von Hypothese.

1. Porosität organischer Stoffe. — Die Durchtränkung des lange im Wasser liegenden Holzes. — Der Quecksilberregen mit der Luftpumpe. — Die Gasblasen, welche mittelst der Luftpumpe aus Holz, Nusschaalen, Eierschaalen unter Wasser entwickelt werden. — Das Durchpressen der Flüssigkeiten durch Leder oder Blasen. — Die Ausdünstung der thierischen Häute. — Die Wirkungen der Bäder und Einreibungen. — Die Gasaushauchung der Pflanzen. — Die menschliche Haut, nach Leuwenhoek, enthält auf 1 Quadratzoll mehr als 1000 sichtbare Poren.

2. Porosität unorganischer Aggregate. — Das unregelmässige Gefüge der Metalle unter dem Microscope oder nach Angriff durch Säuren. — Dass Wasser durch Metallbleche getrieben werden kann, wurde 1661 von der Florentiner Academie gezeigt, was aber auch Folge kleiner Zerreibungen

sein kann. — Aeussere Feuchtigkeit unglasirter Geschirre. — Eindringen der Farbe in marmorne Farbreiber. — Innere Farbänderungen der Steine durch Luft und Feuchtigkeit. — Entweichen des Bitumens aus dichtem Feuerstein.

3. Unerwiesene Fälle. — Aufsaugung der Gase durch Flüssigkeiten. — Zufälligkeit der Lücken in Kristallen. — Scheinbare Porosität dünner Goldblättchen aus der Durchsichtigkeit des Goldes. — Glanzerhöhung der Edelsteine durch eine oberflächliche Veränderung, ohne Aufsaugung. X

Cap. 2. Eigenschaften der Wirkungsfähigkeit.

4. Undurchdringlichkeit (Impermeabilität).

13. Es scheint an sich klar, dass von dem Raume, welchen ein Körper einnimmt, jeder andere Körper ausgeschlossen bleibt, daher sich der erstere gegen den letztern als undurchdringlich verhält. Ein fester Körper weicht einem andern; die Theilchen des Wassers und der Luft werden von der Hand verdrängt, aber nicht durchdrungen; die in poröse Körper eindringende Flüssigkeit erfüllt nur die leeren Poren derselben. Wenn überhaupt die Körper geschieden bleiben, ist damit die Undurchdringlichkeit unmittelbar nachgewiesen. Die in einer starken Röhre enthaltene Luft lässt sich mittelst eines gut passenden Stempels in einen kleinen Raum zusammendrängen, entwickelt aber einen immer wachsenden Widerstand, welcher deren Undurchdringlichkeit beweist. Dagegen lässt sich das wahre Verhalten der Körper nicht mehr direkt erkennen, wenn sie sich mischen und chemisch zu einem dritten Körper verbinden, der neue Eigenschaften, ein von dem ursprünglichen verschiedenes Volumen und bis auf seine kleinsten wahrnehmbaren Theilchen hinab die vollkommenste Gleichförmigkeit besitzt. Dass auch dann keine Durchdringung, sondern eine blosse Mengung der Atome stattgefunden, schliessen wir einzig nach Gründen der Wahrscheinlichkeit.

Tastbarkeit der Körper. — Abschliessung von Flüssigkeiten und Gasarten in Gefässen. — Absperrung von Gasen durch Flüssigkeiten. — Die Taucherglocke. — Luftblasen in Flüssigkeiten.

5. Beweglichkeit (Mobilität).

14. Alle Körper können, auf äussere Veranlassung hin, ihren Ort im Raume verlassen und in der Zeit durch andere Stellen desselben gehen. Diese Ortsveränderung heisst Bewegung.

Die Bewegungen, wie sie sich unserer Beobachtung darstellen, sind scheinbare, die von den wahren bedeutend abweichen können. Dem Schiffer scheinen die Gegenstände des Schiffes ruhend, diejenigen des Ufers fliehend; der gerade von Beobachter wegfliegende Vogel scheint ruhend zu schweben. Ueberhaupt lässt sich die Bewegung nicht anders beurtheilen, als nach der veränderlichen Entfernung von fest angenommenen Objekten. Sind diese selbst in Bewegung, so bestimmen wir nur eine relative, keine absolute Bewegung. Genau gesprochen, kennen wir in der Natur nur relative Bewegungen, denn mit der Erde bewegen sich alle Gegenstände auf derselben um die Sonne und mit

dieser im Weltraume. Da absolute und relative Bewegungen gleichen Gesetzen folgen, hindert diess die richtige Erkennung derselben nicht.

15. Messung der Zeit. — Indem die genaue Bestimmung einer Bewegung auf Messung räumlicher Grössen und auf Messung der Zeit sich gründet, so bedarf man ausser der Längeneinheit einer Zeiteinheit und der Mittel zur Zeitmessung.

Die in der Physik gegenwärtig allgemein angenommene Zeiteinheit ist die Secunde der mittlern Sonnenzeit, von welcher 86164,091 auf den Sterntag, d. h. auf die immer gleiche Umdrehung der Erde um ihre Axe fallen.

1 Sec. = $\frac{1}{60}$ Min.; 1 = $\frac{1}{60}$ Stunde; 1 = $\frac{1}{24}$ m. Sonnentag. Der mittlere Sonnentag zählt also 86400 Secunden und ist länger als der Sterntag um 235'',909 oder 3', 55'',909 m. Sec.

Die Vorrichtungen zur Zeitmessung und Zeitlesung sind Pendel und Uhren. Erstere geben durch Wiederholung gleicher Bewegungen gleiche Zeitabschnitte von beliebiger Grösse; Letztere lassen aus dem immer gleichen Vorrücken eines oder mehrerer Zeiger auf einer Kreistheilung die Zeittheile verschiedener Grösse ablesen. Astronomische Uhren oder Chronometer lassen Secunden, bisweilen $\frac{1}{3}$ Secunden bestimmen; durch andere Mittel aber (z. B. das Chronoscop von Hipp) wurde die Zeitmessung noch viel weiter geführt, bei kurz dauernden Erscheinungen sogar bis auf wenige Tausendstel einer Secunde.

16. Beharrungsvermögen (Inertie, Trägheit). — Ein freigedachter Körper geht mit gleicher Leichtigkeit aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung über, wie umgekehrt, ist an sich aber gegen beide gleichgültig und unfähig den einen oder andern selbst zu verändern.

Dass ein ruhender Körper nur durch Ein- oder Mitwirkung anderer Bewegung annimmt, lehrt die tägliche Erfahrung. Es gilt diess selbst von lebenden Körpern, als Ganzes genommen. Nur vermöge des Luftdruckes gegen den Flügel steigt der Vogel, nur mittelst des Stützpunktes, welchen der Boden bietet, geht der Mensch. — Dasselbe Verharren in dem einmal gewonnenen Zustande zeigt aber auch der bewegte Körper, indem seine Bewegung ohne den Einfluss anderer Körper ins Unendliche gleichförmig und geradlinig fortgehen würde. Wenn in der Wirklichkeit alle Bewegungen abnehmen und erlöschen, so rührt diess daher, dass wir keinen Körper von allen andern unabhängig machen können. Eine auf unebener Erde rollende Kugel gelangt in Folge der Reibung in kurzer Zeit zur Ruhe; auf einer ebenen Steinfläche rollt sie viel weiter; bedeutend weiter noch auf einem glatten Eisspiegel: — woraus wir schliessen, dass ganz ohne Reibung und Luftwiderstand die Bewegung ungeschwächt und unverändert fortdauern müsste. Die immer gleiche Umdrehung der Erde um ihre Axe, von welcher der Wechsel von Tag und Nacht herrührt, bietet übrigens ein Beispiel einer solchen ununterbrochen andauernden Bewegung dar.

Dieses Bestreben der Körper, ihren Zustand der Ruhe oder Bewegung zu bewahren, heisst ihr Beharrungsvermögen, ihre Inertie.

Jede Aenderung in der Bewegung eines Körpers beweist die Einwirkung äusserer Ursachen. Senkt sich der geworfene Stein gegen die Erde, so muss

eine Kraft ihn dahin ziehen. — Die gewöhnlichen Hindernisse der Bewegung sind die Reibung, der Stoss, der Widerstand des Mittels, die Steifheit der Seile u. s. f. — Die Frage über die Möglichkeit eines Perpetuum mobile ist in der Drehung der Erde beantwortet. Durch Menschenhand lässt sich ein solches nicht verwirklichen, weil kein Körper von dem störenden Zusammenhange mit andern befreit werden kann.

17. Wirkungsdauer. — Wegen der Inertie der Materie kann in einem mathematischen Augenblicke keine bemerkbare Bewegung gegeben oder genommen werden. Hierfür ist stets eine gewisse Dauer der Einwirkung nothwendig, deren Länge von der Beschaffenheit, Wirkungsweise und Wirkungsstärke der Körper abhängt. Ist die Zeit zur Mittheilung der Bewegung ungenügend, so geht sie scheinbar nicht über, oder es erfolgen vielmehr ganz abweichende Wirkungen, Erschütterungen, Zerdrückung, Bruch u. s. f. — Eine Kugel, auf einem Brettchen ruhend, das rasch verschoben wird, scheint zurückzurollen, indem sie wirklich an ihrer Stelle bleibt. Ein schweres Schwungrad wird von einem kurzen Stoss nicht bewegt, während ein schwacher anhaltender Druck es in Drehung setzt: Schnellen Schrittes geht man über eine Eisdecke, welche unter der ruhenden Last des Menschen weicht. Der geworfene Stein zertrümmert eine Glasscheibe, während die mit Gewalt getriebene Flintenkugel ein rundes Loch bricht; im ersten Fall wirkt die Erschütterung auf die ganze Scheibe, im zweiten erfolgt Trennung der Theile, bevor die Bewegung sich den Seiten mitgetheilt hat. Die tägliche Erfahrung zeigt eine Menge Fälle ähnlicher Art, in welchen die Körper vermöge ihrer Inertie, wie durch ein passive Kraft, den Bewegungsänderungen widerstehen.

Fernere Beispiele: Wegschlagen einer Karte unter einem Geldstück. — Zerschneiden eines an Haaren hängenden Pfeifenrohres ohne Zerreißen der erstern. — Zerreißen eines an einer Kanonenkugel befestigten Seiles, vor Anspannung desselben. — Festmachen des Stieles an einem Hammer. — Möglichkeit durch einen offenen Thürflügel, durch ein freies Papierblatt zu schießen. — Sprengen einer Eisdecke durch schwimmende Granaten. — Zersprengen eines hohl liegenden Brettchens durch aufgeschüttetes Pulver, das von einem Papierbogen bedeckt wird u. s. f.

6. Theilbeweglichkeit.

18. Der Erfahrung nach sind die Theilchen eines Körpers niemals ganz unveränderlich verbunden, sondern fähig, ohne auseinander zu fallen, kleine gegenseitige Verschiebungen zu machen. Nicht allein bei Flüssigkeiten und Luftarten, wo die grosse Beweglichkeit der Theile augenscheinlich und Veranlassung ihres geringen Widerstandes ist, auch bei festen Körpern lässt sich ein gewisses Spiel der Theilchen nachweisen. Man erkennt diese Eigenschaft auf doppeltem Wege:

1. Durch Anwendung äusserer Kräfte, wobei die innern Verschiebungen sich in einer Gestaltänderung aussprechen. Ein Stab z. B. verlängert sich durch gewaltsame Biegung auf seiner convexen Seite, verkürzt sich auf seiner concaven; dort also sind seine Theilchen auseinander, hier zusammengerückt. — Bei der Umgestaltung eines Eisenstücks unter dem Hammer besteht die Veränderung, weniger in einer Entfernung oder Näherung der Theilchen, als in einer Verschiebung und Umstellung derselben.

2. Durch den Einfluss der Wärme. Alle Körper dehnen sich durch Erwärmung aus, ziehen sich durch Erkältung zusammen. Insofern wirkt die Wärme als eine auseinander treibende Kraft. Eine Kugel, die kalt eben noch durch einen Ring geht, geht heiss nicht mehr durch. Ein ganz mit Flüssigkeit gefülltes verschlossenes Gefäss kann durch Erwärmen zersprengt werden. — Der Einfluss der Wärme zeichnet sich dadurch aus, dass er sich unmittelbar zwischen den innern Theilen geltend macht, während äussere Kräfte nur sehr mittelbar auf dieselben einwirken.

1. Mechanische Einwirkungen. — Biegung der Federn. — Gestaltänderungen durch Hämmern, Walzen, Strecken, Prägen.

2. Wirkungen der Wärme. — Nothwendigkeit eines Spielraums am Ende eingemauerter Stäbe. — Benutzung erkaltender Eisenstangen, um Gewölbe zusammenzuziehen. — Festes Anschliessen heiss angepasster Eisenbeschläge an Rädern. — Der todte Gang der Schrauben in Folge der Erhitzung beim Schneiden derselben

19. Thermometer. — Einer wichtigen Anwendung der Wärmeausdehnung müssen wir hier erwähnen, weil sie bei jedem Schritte als bekannt vorausgesetzt wird: derjenigen nämlich zur Messung des Wärmegrades oder der Temperatur.

Das hierfür dienende Thermometer (Fig. 6) besteht aus einem kleinen mit einer engen gleichförmigen Röhre *a b* verbundenen Behälter *c*. Der letztere und ein Theil der erstern sind mit Quecksilber angefüllt, dessen Ausdehnung in der Röhre die Erwärmung anzeigt. Mittels einer Skale wird der Thermometerstand in Graden abgelesen. — Damit verschiedene Instrumente vergleichbar seien, muss die Bedeutung der Grade eine gleiche sein, was durch Einstellen der ganzen Skale auf zwei bestimmte Temperaturen erhalten wird. Man wählt als solche Normalpunkte die Temperaturen des schmelzenden Schnees und des siedenden Wassers, welche sich an den meisten Orten unmittelbar beobachten lassen. Die verschiedenen gebräuchlichen Instrumente unterscheiden sich dann nur durch die Zahl und den Werth der Grade, in welche der Raum zwischen Siede- und Schmelzpunkt eingetheilt wird. Das Reaumur'sche Thermometer zählt deren 80, das Celsi'sche oder Centesimalthermometer 100, das Farenheit'sche 180, so dass man die Werthverhältnisse hat:

$$4^{\circ} R. = 5^{\circ} C. = 9^{\circ} F.$$

Der Nullpunkt der beiden ersten Instrumente liegt in dem Schmelzpunkte, derjenige der letzten 32° tiefer, der Siedepunkt somit bei 212° . Ueber die Normalpunkte hinaus setzt man die Eintheilung fort und zählt die Grade über dem Nullpunkt als Wärme- (+), diejenigen unterhalb als Kältegrade (—).

Das Quecksilberthermometer ist das gebräuchlichste und lässt sich nach oben, — unter Anbringung einer Correktion — bis 350° , nach unten bis gegen -39° , dem Gefrierpunkte des Quecksilbers, benutzen. Für noch tiefere Temperaturen dient als Flüssigkeit Wein-geist, der hinwieder über 0 keine grosse Genauigkeit zulässt. Die bei hohen Hitzgraden anzuwendenden Pyrometer werden in der Wärmelehre erklärt.

Die Umwandlung der am häufigsten vorkommenden Reaumur'schen und Celsi'schen Grade geschieht einfach nach folgenden Regeln:

$$x (C) = m + \frac{1}{4} m (R) \text{ und } x (R) = m - 0,2 m (C)$$

Vergleichungstafeln.



20. Wesen der Materie. — Das Wesen der Materie bleibt zwar unsern Sinnen entzogen; dennoch bildete man sich von jeher zur Verknüpfung der allgemeinen Körpereigenschaften bestimmte Vorstellungen darüber. Der Streit über die Priorität von Kraft oder Stoff hat geringe Bedeutung mehr. Der Erfahrung nach treten in der sinnlichen Welt beide stets vereint auf, weil unsern Sinnen keine andern Kraftäusserungen zugänglich sind, als die von Materie auf Materie ausgeübt werden. Hingegen sind die philosophischen Schulen über die Art, wie der Raum erfüllt wird, noch jetzt nicht einig und theilen sich in zwei Ansichten, welche, consequent ausgedrückt, die folgenden sind:

1. Nach der dynamischen Ansicht bildet die Materie eines Körpers ein stetiges Ganzes, durch welches allenthalben und nach allen Seiten Kräfte wirken. Die Porosität ist rein zufällig, daher unwesentlich; die Theilbarkeit ist in mathematischem Sinne unbegrenzt; Zusammendrückung ist ein wahres Ineinandergehen der Materie; chemische Verbindung eine wirkliche Durchdringung u. s. f.

2. Nach der atomistischen Ansicht bestehen die Körper aus absolut unveränderlichen, durch relativ sehr grosse Zwischenräume getrennten, von Kräften gehaltenen Theilchen, die Atome. Porosität, auf diese Zwischenräume angewandt, ist wesentlich; die Theilbarkeit trifft in den kleinsten Atomen auf eine wirkliche Grenze; Zusammendrückung ist eine blosser Näherung der unveränderlichen Theilchen; chemische Verbindung ein gesetzmässiges Gemenge verschiedener Atome u. s. f. v. II. 356

Beide Ansichten sind Hypothesen; doch kömmt der letztern grössere Klarheit, Schärfe und Geschmeidigkeit zu, wesshalb sie von der Mehrzahl der Physiker und Chemiker angenommen und darum auch weiter ausgebildet worden ist.

Cap. 3. Aggregatformen der Körper.

21. Verschiedene Aggregatformen. — Die Theilchen eines Körpers können unter dem Einfluss der zwischen ihnen thätigen Kräfte auf verschiedene Weise verbunden sein und diess begründet die Verschiedenheit der Aggregatformen, deren drei unterschieden werden:

1. Im festen oder starren Zustande sind die Theilchen einzeln wenig beweglich und widerstehen bedeutend allen Kräften, die ihre Stelle und Stellung zu verändern streben. Der feste Körper hat daher einen starken Zusammenhang, wird deshalb tastbar und fähig, eine eigenthümliche Gestalt zu behaupten.

2. Im flüssigen oder liquiden Zustande besteht noch immer ein gewisser Zusammenhang der Theilchen, in Folge dessen z. B. die untern Theile eines Wassertropfens von den obern gehalten werden. Ungeachtet aber die Flüssigkeit ein Ganzes mit nahe unveränderlichem Volumen darstellt, sind dennoch die Theilchen aneinander leicht ver-

schiebbar; weichen vor jedem eindringenden Körper und schmiegen sich an die Form der Gefässe.

3. Der luft- oder gasförmige Zustand endlich zeichnet sich durch eine noch höhere Beweglichkeit der Theilchen aus, durch eine den festen und flüssigen Körpern fehlende grosse Zusammendrückbarkeit, endlich, statt des Zusammenhanges, durch ein stetes Bestreben der Theilchen in ein grösseres Volumen auseinander zu weichen. Vermöge dieser von Innen nach Aussen wirkenden Expansivkraft oder Spannkraft dehnt sich eine Luft enthaltende Blase unter der Luftpumpe aus, entweicht ein Gas aus einem nicht dicht geschlossenen Gefässe u. s. f.

22. Zwischenzustände. — Meist sind die Aggregatformen scharf geschieden. Aus der stets nur oberflächlich erfolgenden Schmelzung des Eises entsteht unmittelbar flüssiges Wasser. Wenn Wasser verdampft, hört plötzlich der Zusammenhang auf und die Expansivkraft tritt hervor. Das Zähflüssige, Schleimige, Gallertartige u. s. f. sind indess Zwischenstufen zwischen dem Flüssigen und Festen, bei welchen der Zusammenhang auf Kosten der Beweglichkeit zugenommen hat; doch ist es möglich, dass manche dieser meist bei organischen Stoffen beobachteten Fälle aus einer Mengung schwer- und leichtflüssiger Theilchen zu erklären sind. Unter den chemisch einfachen Stoffen zeigen nur wenige, z. B. Schwefel und Phosphor, solche Zwischenstufen.

Zwischen dem Flüssigen und Luftförmigen ist kein Uebergangszustand bekannt. Dämpfe sind wahre, mit Expansivkraft begabte Luftarten, doch wird der Ausdruck vorzugsweise für solche gebraucht, welche sich leicht in Flüssigkeiten umwandeln lassen (Wasser-, Alcohol-, Quecksilberdampf), während die übrigen vorzugsweise Gase genannt werden. Dunst und Nebel dagegen bezeichnen eine Trübung der Luft, herrührend von zahllosen, in der Luft schwebenden flüssigen Theilchen. An das Wort Dampf knüpft sich daher die Vorstellung eines Druckes (Dampfmaschine); an das von Dunst diejenige des Netzen- den. Rauch endlich ist eine von festen Theilen herrührende Trübung der Luft (Kohlen, Arsenik, Zinkrauch u. s. f.).

1. Das leichte Schweben und gewisse optische Erscheinungen führen dazu, die kleinen Wassertheilchen des Dunstes als Bläschen und nicht als volle Kügelchen zu betrachten.

2. Forbes betrachtet die rothe Färbung des entstehenden Dunstes im durchgehenden Licht, so wie die Färbungen des Abendhimmels, als von einem Zwischenzustande herrührend, — was nicht erwiesen ist.

23. Aenderung der Aggregatform. — Der nämliche Körper kann im Allgemeinen alle drei Aggregatformen annehmen. Diess z. B. ist der Fall für Wasser, Oel, Quecksilber, Schwefel, Zink u. s. f. Von einigen Körpern kennt man indess nur einzelne Zustände; vom Sauerstoff, Stickstoff und Wasserstoff nur den gasförmigen; von der Kohle genauer nur den festen; von dem Eisen, Kupfer und Platin nur den festen und flüssigen; doch ist kein Zweifel, dass mit noch kräftigeren Mitteln, als uns gegenwärtig zu Gebote stehen, auch hier die Ueberführung gelingen werde.

Man verändert die Aggregatform:

1. Durch mechanischen Druck. Diess Mittel scheint nur dann wirksam, wenn das Volumen in dem neuen Zustande bedeutend kleiner als in dem früheren ist. Dampfsarten, durch Druck zusammengepresst, scheiden Dunst oder flüssige Tröpfchen aus. So entsteht ein Nebel, wenn feuchte Luft in einer Glasröhre mittelst eines Stempels schnell comprimirt wird. Faraday brachte die Verdichtung mancher Gase durch die Kraft ihrer chemischen Entwicklung zu Stande, indem er die Substanzen, die das Gas entwickelten, in den einen Schenkel einer winkelförmigen starken Röhre, die zugeschmolzen wurde, einschloss und die Entwicklung bis zur Verdichtung des Gases im andern Schenkel andauern liess. Thilorier und Natterer wandten, wie später erläutert wird, starke Pumpen an, um Kohlensäure, Stickstoffoxydulgas etc. zu condensiren. — Hingegen gelingt es selten durch blossen Druck Flüssigkeiten in feste Körper umzuwandeln, weil das Volumen der letztern wenig verschieden, oft sogar grösser als das der erstern ist.

2. Durch Erwärmung und Erkältung. — Schon bei der Ausdehnung vermehrt die Wärme die Beweglichkeit der Theilchen. Durch noch stärkere Wärme wird der feste Körper, wenn er sich nicht chemisch verändert, zum Schmelzen, der flüssige zum Verdampfen gebracht. Erkältung wirkt umgekehrt. — Der durchsichtige Dampf eines heissen Wassergefässes trübt sich erst bei seiner Erkältung an der Luft. Ebenso bildet sich im Grossen Nebel, wenn auf einen warmen und feuchten Tag eine kalte Nacht folgt.

Die Verwandlung des festen in den luftförmigen Zustand geht bisweilen mit Ueberspringung des flüssigen vor sich. Eisstücke z. B. schwinden durch allmälige Verdampfung an Tagen, deren Wärmegrad unter 0° steht, und umgekehrt scheidet sich an sehr kalten und feuchten Tagen, der Dampf als schneeartiger Gist aus der Luft ab. Vielleicht gehen indess auch hier die Theilchen, freilich nur nacheinander statt vereint, durch den Zustand des Flüssigen.

Manche Substanzen zersetzen sich chemisch durch Wärme vor ihrer Schmelzung. So z. B. der kohlensaure Kalk. J. Hall gelang es jedoch durch Glühen in einem verschlossenen Flintenlauf, das heisst unter starkem Druck, auch diesen in Fluss zu bringen. Vielleicht war ein grosser Druck bei der Entstehung mancher in der Natur vorkommenden Gesteine wirksam.

B. Von den Körperwirkungen im Allgemeinen.

Cap. 4. Von der Bewegung.

24. Bahn oder Weg des Körpers. — Da die Wirkungen der Körper aufeinander, insofern sie der Physik angehören, vorzüglich in Mittheilung, Umwandlung und Vernichtung von Bewegungen bestehen, so muss man vor Allem die Eigenschaften des Bewegungszustandes selbst genauer kennen.

Jedes Theilchen eines in Bewegung begriffenen Körpers geht durch eine stetige Folge räumlicher Stellen, die vereint dessen Weg oder Bahn bilden. Je nach der Gestalt dieser Linie ist die Bewegung gerade oder krummlinigt, ersteres z. B. bei einem fallenden, letzteres

bei einem geworfenen Steine. Die Tangente an einem Punkte der Bahn bezeichnet die Richtung der Bewegung an dieser Stelle, welcher Richtung das Theilchen, seiner Inertie überlassen (16), folgen würde.

Durchlaufen die sämmtlichen Theilchen eines Körpers ganz gleiche Bahnen, was der Fall ist, wenn dessen Stellung im Raume unverändert bleibt, so heisst die Bewegung eine fortschreitende (Translationsbewegung); frei drehend heisst sie, wenn jedes Theilchen während der Bewegung eine gleiche Entfernung von einem festen Centrum bewahrt, also auf einer Kugelfläche bleibt. Bei der Axendrehung (Rotation) beschreiben sämmtliche Theilchen parallele Kreise, deren Mittelpunkte in der gleichen Geraden, der Axe liegen — Andere Bewegungen pflegt man sich aus einem gleichzeitig erfolgenden Fortschreiten und Drehen zusammengesetzt zu denken.

1. Wie jede Curve wird im Allgemeinen die Bahn eines Theilchens, in der Ebene, durch eine Gleichung

$$y = \varphi(x)$$

zwischen zwei rechtw. Coordinaten x, y ; im Raume durch zwei Beziehungen

$$x = \varphi(z), y = \psi(z)$$

zwischen drei rechtw. Coordinaten, welche die Gleichungen der Bahnprojektionen auf den (xz) und (yz) Ebenen darstellen, mathematisch bezeichnet.

2. Entspricht, in der Ebene, einem Curvenelement δs eine Variation δx , δy der Coordinaten, so gibt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\delta y}{\delta x}$$

den Winkel α der Bewegungsrichtung mit der x Axe.

Bildet im Raume δs mit den drei Axenrichtungen die Winkel α, β, γ , so hat man

$$\cos \alpha = \frac{\delta x}{\delta s}, \cos \beta = \frac{\delta y}{\delta s}, \cos \gamma = \frac{\delta z}{\delta s}$$

und überdiess

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

wodurch die Bewegungsrichtung sich gleichfalls ergibt.

3. Bei der fortschreitenden Bewegung weichen die Curvengleichungen von einem Theilchen zum andern nur durch den Werth der Constanten a und b in den Beziehungen

$$x = a + \varphi(z), y = b + \psi(z)$$

ab.

4. Bei freier Drehung um einen festen Punkt, dieser als Anfangspunkt der Coordinaten genommen, hat man die Bedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

wenn r den constanten Radius bezeichnet.

Bei Drehung um eine feste Axe, diejenige der z z. B., ist die Bahn eines Theilchens ganz bestimmt, durch die Bedingungen

$$x^2 + y^2 = r^2, z = c.$$

Von einem Theilchen zum andern ist in beiden Fällen r veränderlich.

25. Geschwindigkeit. — Man hat zweitens die Art und Weise zu berücksichtigen, wie die Bahn durchlaufen wird. Bleibt die Bewegung unverändert, indem in gleichen Zeiten gleiche Wege durchlaufen werden, so heisst sie gleichförmig, wo nicht ungleichförmig oder veränderlich; wiederholen sich die Veränderungen in gleichen Zeiträumen, so heisst sie periodisch. Ein Mühlrad hat eine gleichförmige, der fallende Stein eine veränderliche, das Uhrpendel eine periodische Bewegung.

Die Stärke der gleichförmigen Bewegung beurtheilt man nach

dem Verhältnisse des Weges zu der erforderlichen Zeit, oder, was auf das Gleiche kommt, nach dem in der Zeiteinheit (1 Secunde) durchlaufenen Wege. Dieser Weg, in Längeneinheiten ausgedrückt, heisst die Geschwindigkeit des Körpers. Mit der Secundenzahl t multipliziert, gibt die Geschwindigkeit u den ganzen durchlaufenen Weg s . Das Gesetz (3) der gleichförmigen Bewegung wird demnach durch die Beziehung

$$s = u \cdot t$$

dargestellt, welche von den drei Grössen: Weg, Geschwindigkeit und Zeit eine aus den beiden übrigen gegebenen berechnen lässt.

Bei einer drehenden Bewegung, die gleichförmig vor sich geht, wird s ein Bogen $r \cdot \varphi$ sein, φ als Bogenlänge des Kreises vom Radius 1 angenommen, daher, wenn die Winkel oder Angulargeschwindigkeit, die Bogenlänge in 1 Secunde auf letzterem Kreise, w ist

$$\varphi = w \cdot t$$

Als Beispiele in der Natur vorkommender Geschwindigkeiten lassen sich mit Muncke folgende anführen:

	m.		m.
Schnecke	0,0016	Eisenbahn	7,0
Fliege, ruhig fliegend	1,7	Grössere Flüsse bis	3,0
» gejagt	9,7	Bergströme bis	6,0
Adler	31,7	Mässiger Wind	3,3
Pferd im Trab	3,8	Orkan bis	38,0
Schnellster Reiter	26,0	Geworfener Stein	17,0
Fussgänger	1,7	Büchsenkugel	400,0
Wettläufer	6,7	12pf. Kugel	750,0
Schlittschuhläufer	13,0	Schall	340,0
Schnellseg.Schiff	3,6	Licht	318300000,0
Gutes Dampfschiff	5,0		

26. Veränderliche Bewegung. — Bei einer veränderlichen Bewegung versteht man unter Geschwindigkeit oder erlangter Geschwindigkeit den Weg, den der Körper in 1 Secunde durchlaufen würde, wenn von dem berücksichtigten Augenblicke an die Bewegung gleichförmig, der Körper gleichsam der blossen Inertie überlassen bliebe (16). Die Geschwindigkeit ändert von Augenblick zu Augenblick; nimmt sie stetig zu, so heisst die Bewegung beschleunigt, nimmt sie ab, verzögert. Sind die Zu- und Abnahmen in gleichen Zeiten gleich, so ist die Bewegung gleichmässig beschleunigt oder verzögert, wo nicht, zu- oder abnehmend.

Bezeichnet bei der gleichmässig beschleunigten Bewegung g die Beschleunigung, d. h. die in 1 Secunde gewonnene Geschwindigkeit, so wird nach t Secunden eine Geschwindigkeit erlangt sein

$$u = g \cdot t \quad 1.$$

Der Weg in irgend einer Secunde n lässt sich, wegen des gleichmässigen Wachsens der Geschwindigkeit, aus dem Mittel zwischen demjenigen der Anfangs- und dem der Endgeschwindigkeit dieser Secunde; oder zwischen $(n - 1) g$ und $n g$, finden und ist also

$$\left(n - \frac{1}{2}\right) g$$

Die Summe aller solcher einzelnen Wege von $n = 1$ bis $n = t$, nämlich

$$s = g \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] g = \frac{1}{2} g t^2 \quad 2.$$

liefert den ganzen Weg s in t Secunden.

Die beiden Ausdrücke 1 und 2 enthalten die Gesetze der gleichmässig beschleunigten Bewegung und erlauben von den vier Grössen: Weg, Geschwindigkeit, Zeit und Beschleunigung zwei zu bestimmen, wenn die beiden andern gegeben sind. Beispiele solcher Bewegungen werden sich später darbieten.

Wie man sich eine Curve aus kleinen geraden Elementen δs zusammengesetzt vorstellt, so kann man bei einer veränderlichen Bewegung annehmen, dass jedes Element δs mit gleichbleibender Bewegung durchlaufen werde, so dass

$$\delta s = u \delta t$$

In Folge der veränderlichen Bewegung nehme ferner u in der Zeit δt um δu zu, so wird, diese Zunahme, gleichförmig gedacht, sein

$$\delta u = g \cdot \delta t.$$

Bei drehenden Bewegungen wird man haben

$$\delta \varphi = w \delta t$$

und wenn Θ die Winkelbeschleunigung ist

$$\delta w = \Theta \delta t.$$

Es sind hiernach die Linear- und Winkelbeschleunigungen auf 1 Secunde berechnet

$$g = \frac{\delta u}{\delta t}, \quad \text{und} \quad \Theta = \frac{\delta w}{\delta t}$$

27. Zusammensetzung der Bewegungen. — Erhält ein Körper zwei von einander unabhängige Bewegungen, so kann er keiner derselben ausschliesslich folgen, sondern nimmt eine aus beiden zusammengesetzte oder resultirende Bewegung an. Eine Kugel a z. B. (Fig 7), welche, auf dem Boden eines Schiffes A nach der Richtung ae fortrollend, in der nämlichen Zeit nach b gelangt, in welcher der Ausgangspunkt a mit dem Schiffe nach c vorrückt, erreicht in der Wirklichkeit den Punkt d , als hätte sie die beiden Verschiebungen ab und ac , statt mit einander, nach einander erhalten. Wenn b und c gleichförmig vorrücken, bewegt sich d ebenfalls gleichförmig auf der Diagonale des auf den gegebenen Geschwindigkeiten construirten Parallelogramms. Diese Diagonale, mit der gleichen Maasseinheit der Seiten gemessen, stellt der Richtung und Grösse nach die resultirende Geschwindigkeit dar.

Bei einer grössern Zahl unabhängiger Bewegungen ab , $ac \dots af$, welche gleichzeitig einen Körper ergreifen, kann man sich die Verschiebungen (oder Geschwindigkeiten) der einzelnen gleichförmigen Bewegungen ab , ac , $ad \dots$, (Fig 8) auch wieder nach einander, statt mit einander, eintretend denken. Der Endpunkt f' des so gebildeten Polygons der Bewegungen $abc'd' \dots$ bezeichnet die wahre Stelle des Körpers nach 1 Secunde, die er auf dem Wege und mit der Geschwindigkeit af' , gleichförmig vorrückend, erreicht.

Folgen die einzelnen Bewegungen der gleichen Linie und zielen nach der gleichen oder entgegengesetzten Seite, so wird die resultirende Bewegung ihrer Summe oder ihrer Differenz gleich sein. — Sind

zwei Bewegungen zu einander senkrecht gerichtet, so kann keine von beiden auf das Vorrücken nach der Richtung der andern Einfluss haben; bilden ihre Richtungen einen spitzen oder stumpfen Winkel, so unterstützen oder gefährden sie sich.

1. Zwischen den Geschwindigkeiten u, v zweier gleichförmigen Bewegungen, die den Winkel γ einschliessen und der resultirenden Geschwindigkeit w , welche mit erstern die Winkel β, α bildet, bestehen die Beziehungen der Theile eines Dreiecks und man bestimmt die letzten Grössen mittelst der Formeln

$$w = (u + v) \cos \varepsilon \text{ wenn } \sin \varepsilon = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \gamma}{u + v} \cdot \sqrt{u \cdot v}$$

woraus dann $\sin \alpha = \frac{u}{w} \sin \gamma, \sin \beta = \frac{v}{w} \sin \gamma$

2. Erhält ein Körper die rechtwinkligen Geschwindigkeiten u, v, w , so vereinigen sie sich in eine resultirende Geschwindigkeit U

$$U = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2},$$

welche mit jenen Richtungen folgeweise die Winkel α, β, γ bildet, die sich aus

$$\cos \alpha = \frac{u}{U}, \cos \beta = \frac{v}{U}, \cos \gamma = \frac{w}{U}$$

bestimmen lassen.

28. Aufhebung mehrerer Bewegungen. — Oft können mehrere Bewegungen sich vollständig aufheben und den Körper in Ruhe lassen. Mit zwei Bewegungen ist diess der Fall, wenn sie gleich gross und gerade entgegengesetzt gerichtet sind; bei mehreren Bewegungen, wenn das auf den einzelnen Bewegungen construirte Polygon (26), genau verzeichnet, mit seinem Endpunkte f' (Fig. 8) auf den Ausgangspunkt a zurückführt oder eine geschlossene Figur darstellt. Da die resultirende Bewegung verschwindet, verlässt der Körper seine Stelle nicht.

Man kann die Bedingung für die Aufhebung mehrerer Bewegungen auch so ausdrücken, dass alle Bewegungen weniger Eine eine resultirende Bewegung geben müssen, welche der letztern genau gleich und entgegengesetzt gerichtet ist.

29. Zerlegung einer Bewegung. — Wie zwei Bewegungen sich zu einer resultirenden Bewegung vereinigen, so lässt sich umgekehrt Eine Bewegung, ohne Veränderung der äussern Erscheinung, durch zwei oder mehrere andere ersetzen. Doch ist diese Aufgabe, der Zerlegung einer Bewegung in so fern unbestimmt, als sich eine Menge Systeme von Bewegungen finden lassen, welche eine gleiche Resultirende liefern. Zwischen den Endpunkten a und f' der Konstruktion (Eig. 8) sind nämlich eine unendliche Zahl verschiedener Polygone wie $a b' c' d' \dots$ denkbar, welche eben so viele Systeme von Theilbewegungen darstellen, die alle der Aufgabe genügen. Wegen dieser Unbestimmtheit der Aufgabe lassen sich noch gewisse Bedingungen hinsichtlich der Richtung und Grösse der Theilbewegungen beliebig festsetzen. Bei der Zerlegung in zwei Bewegungen z. B. kann man so viele Grössen zum voraus geben, als zur Verzeichnung des Dreiecks (Hälfte des Parallelogramms) erforderlich sind, also: 1. die Richtungen der beiden

Theilbewegungen; 2. Richtung und Geschwindigkeiten der einen derselben; 3. Richtung der einen und Geschwindigkeit der andern; 4. beide Geschwindigkeiten.

Häufig wendet man in der Ebene die Zerlegung nach zwei, im Raume diejenige nach drei rechtwinklichten Richtungen an. Die entstehenden Bewegungen sind im ersten Fall die Seiten eines Rechteckes, im andern diejenigen eines geraden Parallelopipedons und bleiben unabhängig von einander (27).

Es gelten hier die in (27) gegebenen Beziehungen

$$u = U \cos a, v = U \cos b, w = U \cos c.$$

30. Menge Bewegung, Masse, Dichte. — Die Menge oder Grösse der Bewegung eines in Bewegung begriffenen Körpers wird theils von der grössern oder kleineren Geschwindigkeit desselben, theils von der bewegten Materie, die er enthält, bedingt und steht offenbar im direkten Verhältniss zu beiden. Das Quantum Materie, d. h. des Beweglichen und Wirkungsfähigen in einem Körper, heisst dessen Masse. Demnach ist die Bewegungsmenge P sowohl der Geschwindigkeit u als der Masse M proportional und wird durch das Produkt beider

$$P = M \cdot u \quad 1.$$

ausgedrückt, vorausgesetzt, dass beide Grössen in Zahlen bekannt sind.

Die Masse M eines Körpers hängt ab von seinem Volumen V und von der Zusammendrängung seiner Theile oder seiner Dichte d , welche hinwieder nach der Masse der Volumenheit bemessen wird. Man hat also

$$M = V \cdot d \quad 2.$$

Um die Dichten der Körper in Zahl ausdrücken, vergleicht man sie mit einer Einheit von gleicher Art, der Dichte des reinen Wassers bei 4° C. Uebrigens werden Massen und Dichten, wie später gezeigt wird, nach den ihnen proportionalen Gewichten des ganzen Körpers und seiner Volumeneinheit beurtheilt. *

Cap. 5. Von den Kräften.

31. Merkmale einer Kraft. — Das Dasein und die Natur der Kräfte kennen wir nicht anders als aus den beobachteten Wirkungen (3) und müssen daher in diesen die Merkmale jener suchen. Eine Kraft wird genau definirt, wenn man 1. ihren Angriffspunkt angibt, das Körpertheilchen, auf das sie unmittelbar wirkt; 2. ihre Richtung oder die Linie, längs welcher sie, allein und ungestört wirkend, dasselbe bewegen würde; 3. endlich die Grösse oder Stärke derselben, bezogen auf eine bekannte Krafteinheit.

Wenn eine Kraft ungestört und allein auf einen Körper wirkt, so offenbart sie sich durch Mittheilung von Bewegung oder Erzeugung einer bestimmten Bewegungsmenge. Die erzeugte Bewegungsmenge stellt dann die Stärke der bewegenden Kraft dar, unter der Einschränkung jedoch, dass die zu vergleichenden Kräfte eine gleiche

Zeit durch (1 Secunde) unverändert fortgewirkt haben. Verschiedene Kräfte P, P' verhalten sich dann wie die von ihnen erzeugten Bewegungsmengen, also, wenn M, M' die bewegten Massen, g, g' die in 1 Secunde mitgetheilten Beschleunigungen bezeichnen:

$$P : P' = M g : M' g'$$

und auf den gleichen Körper wirkend wie $g : g'$

Als Einheit wird diejenige Kraftgrösse gelten, welche der Masseneinheit in 1 Secunde eine Beschleunigung gleich der Längeneinheit mitzutheilen vermag. So dient als grössere Krafteinheit die Masse von 1 Kilogramm mit 1 Meter Beschleunigung, als kleinere diejenige von 1 Gramm mit 1 Centim. u. s. f.

32. Drückende Kräfte. — Wird ein Körper, auf den eine Kraft wirkt, durch Hindernisse abgehalten, die Bewegung anzunehmen, so äussert sich die Kraft als Druck. Die Schwere z. B. kann einerseits das Fallen des Steines, anderseits den Druck hervorbringen, den er, auf der Hand ruhend, gegen dieselbe ausübt, und den man sein Gewicht nennt.

Zur Messung aller drückenden Kräfte dient der genau bestimmte Druck der Gewichtseinheit. Wir werden uns der französischen Einheit, des Grammes, bedienen, welche das Gewicht von 1 Cub.Centim. reinen Wassers bei 4°C darstellt, desjenigen Körpers also, dessen Dichte als Einheit gewählt wurde (30)

1 Gramm = 10 Decigr.; 1 = 10 Centigr.; 1 = 10 Milligr.

= 0,1 Decagr.; 1 = 0,1 Hectogr.; 1 = 0,1 Kilogr.

Das Kilogr. ist also das Gewicht von 1 Cub.decim. oder 1 Liter Wasser, das Milligr. dasjenige von 1 Cub.Millim.

Die beiden Arten, die Stärke einer Kraft anzugeben, nach Einheiten der in 1 Secunde mitgetheilten Bewegungsmenge und nach Gewichtseinheiten, stehen nicht in Widerspruch, denn es lehrt die Erfahrung, dass der Druck zweier fortwirkenden Kräfte stets den Bewegungsmengen, deren sie fähig sind, proportional ist. Ueberdiess kann man jeden in Gewichtseinheiten (Grammen) angegebenen Druck P als eine durch gleiche Gegenwirkung aufgehobene Bewegungsmenge betrachten oder als das Aequivalent derjenigen Bewegungsmenge, welche die Schwere auf die Masse jenes Gewichtes, 1 Secunde durch gleichfortwirkend, erzeugen könnte. Bezeichnet also M diese Masse, $g = 980,6$ Centim. die Beschleunigung aus der Schwere, so hätte man

$$P = M \cdot g$$

und man muss, um Einklang in die Ausdrücke zu bringen, für die unbekannte Masse

$$M = \frac{P}{g}$$

setzen, oder die Masse durch eine 980,6 mal kleinere Zahl als den Druck bezeichnen, die Masseneinheit 980,6 mal grösser nehmen als die Gewichtseinheit. Andere Einheiten verlangen ein anderes Zahlverhältniss.

Das Pfund verschiedener Länder hat, verglichen mit dem Kilogramm, folgenden Werth.

	1 Pfund in Kilogr.	1 Kil. in Pfunden.
Frankreich (altes Pfund)	0,4895058	2,042877
England (Av d. p.)	0,4535976	2,204597
Oesterreich	0,5600122	1,785675
Russland (Pud)	0,4095200	2,441883
Preussen Hessen. Hannover	0,4677110	2,138072
Schweden	0,4253395	2,351063
Baiern	0,5600000	1,785714
Sachsen. Schweiz	0,5000000	2,000000
Württemberg	0,4677289	2,137995

33. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte. — Da Kräfte ungestört wirkend nicht anders als durch hervorgebrachte Bewegungen sich aussprechen, so lässt sich auf Kräfte alles das anwenden, was früher (27), (28), (29) über Zusammensetzung, Aufhebung und Zerlegung mehrerer Bewegungen gesagt worden ist. Um die Resultirende mehrerer auf ein gleiches Theilchen wirkender unabhängiger Kräfte zu bestimmen, diejenige Kraft nämlich, die alleingedacht eine gleiche Wirkung ausübt, stellt man die Kräfte, ihrer Stärke proportional, durch Linien dar und behandelt sie als gegebene Bewegungen. Die durch das Parallelogramm oder das Polygon gefundene resultirende Bewegung wird der Richtung und Grösse nach die resultirende Kraft darstellen.

Heben sich bei Ausführung der Konstruktion die Bewegungen auf (28), so vernichten sich die Kräfte gegenseitig und stehen im Gleichgewicht. Diess also ist bei zwei Kräften der Fall, wenn sie gleich und entgegengesetzt wirken, bei mehreren, wenn irgend eine der Resultirenden aller andern gleich und entgegen ist.

Endlich lässt sich nach den gleichen, früher (29) angegebenen Regeln Eine Kraft in andere zerlegen, die gemeinsam eine gleiche Wirkung ausüben könnten.

Bei Kräften, die selbst veränderlich sind, wird natürlich das Ergebniss solcher Zusammensetzungen und Zerlegungen nur für den einzelnen berücksichtigten Augenblick und den dermaligen Werth der Kräfte Gültigkeit haben, sich aber gleichfalls von Augenblick zu Augenblick verändern.

34. Bewegungsmenge als Kraft. — Ein bewegter Körper vermag einen andern ruhenden in Bewegung zu setzen, hat daher eine Kraft in sich, die mit seiner Masse und Geschwindigkeit im Verhältnisse steht. Eine Eisenkugel, mit gleicher Geschwindigkeit fortgetrieben, wirkt, ihrer grössern Masse wegen, stärker als eine gleich grosse Holzkugel; von zwei ganz gleichen Kugeln wirkt hinwieder die mit der grössern Geschwindigkeit begabte stärker.

Die Bewegungsmenge, die ein Körper von einem andern bewegten Körper erhält, verliert letzterer, und könnte ersterer die ganze Bewegung nehmen, so würde letzterer zur Ruhe gelangen. Insofern erscheint die Bewegung als etwas ohne Verlust Uebertragbares, wozu der Körper gleichsam als Gefäss dient. Erfolgt die Uebertragung der Bewegungsmenge Mu von einer Masse M auf eine andere M' , so ändert sich die Geschwindigkeit umgekehrt in

$$u' = u \frac{M}{M'}$$

Solche Uebertragungen der Bewegung bietet der später zu erläuternde Stoss der Körper dar, doch muss bemerkt werden, dass in der Wirklichkeit die Mittheilung der Bewegung direkt nur auf einzelne Theilchen, nicht auf alle, geschehen kann, woraus für die Bewegung des Körpers als Ganzes Abweichungen von der vorgenannten Regel entspringen können.

35. Fortdauernde Kraftwirkung. — So lange eine Kraft ungestört auf einen Körper in der Richtung seiner Bewegung wirkt, nimmt seine Bewegung zu, da vermöge der Inertie (16) die bereits gewonnene Bewegung fortbesteht. Wirkt sie mit immer gleicher Stärke, so theilt sie in gleichen Zeiten auch gleich viel Geschwindigkeit mit und es entsteht eine gleichmässig-beschleunigte Bewegung (26). Wirkt sie mit steigender oder sinkender Stärke, so wird auch die Beschleunigung denselben Veränderungen folgen, und überhaupt den Charakter der Kraft beurkunden, insofern er in Bewegung sich ausspricht. Eine stetig sich ändernde Kraft P denkt man sich während verschwindend kleiner Zeitintervallen δt gleichmässig fortwirkend; vermag sie dann der Masse M während des Intervalles δt die Beschleunigung δu mitzutheilen, so wird ihre Stärke, d. h. die auf 1 Secunde fallende Bewegungsmenge

$$P = M \frac{\delta u}{\delta t}$$

sein.

Wirkt eine Kraft einer vorhandenen Bewegung entgegen, so vermindert sie die letztere um diejenige Bewegungsmenge, welche sie selbst mitzutheilen vermag. Der Körper gelangt entweder allmählig zur Ruhe oder in einen entgegengesetzten Bewegungszustand. So sehen wir eine rollende Kugel in Folge der Reibung zur Ruhe gelangen, einen aufwärts geworfenen Stein durch die andauernde Wirkung der Schwere wieder herabfallen.

Tritt nicht die ganze Kraft in der Zunahme der Bewegung hervor, so wird ein Theil derselben durch Gegenkräfte aufgehoben und wirkt als Druck. Der eine Theil, auf gleiches Maass zurückgeführt (32), ergänzt den andern zur ganzen Kraft, und wie der eine zunimmt, nimmt der andere ab. Beobachtet man, ungeachtet Kräfte wirken, eine gleichförmige Bewegung, wie unter dem Einfluss der Inertie (16) allein, so heben sich die Kräfte auf und sind am Körper im Gleichgewicht. An einem gleichförmig drehenden Wasserrade heben der Druck des Wassers und der Widerstand aus der Arbeit und Reibung der Maschine sich auf, an einem gleichförmig fahrenden Wagen die Zugkraft der Pferde und die Reibungen an den Radaxen und an der Strasse.

36. Arbeit einer Kraft. — Das Wort Arbeit (mechanischer Effekt, mechanische Wirkung) hat nicht bloss eine auf die Benutzung der Kräfte bezügliche Bedeutung, sondern bezeichnet einen mechanischen Begriff

von grösserer Allgemeinheit. Denkt man sich eine stetig gleichwirkende bewegende Kraft P , so bezeichnet P den Druck derselben in Gewichtseinheiten oder die Menge Bewegung, deren sie in 1 Secunde fähig ist (32). Wird nun der Körper, auf den sie wirkt, von der Kraft in der Zeit t durch den Weg s bewegt, so heisst das Produkt $P \cdot s$ der Kraft mit dem Wege die Arbeit der Kraft.

Bezeichnet andererseits M die Masse des bewegten Körpers, g die in Einer Secunde gewonnene Beschleunigung, so hat man nach (32)

1) $P = M \cdot g$ 2) nach den Formeln für die gleichmässig beschleunigte Bewegung (26) $s = \frac{u^2}{2g}$; man erhält also identisch

$$P \cdot s = \frac{1}{2} M u^2$$

Die zweite Grösse, Produkt der Kraft mit dem Quadrat der Geschwindigkeit, heisst die lebendige Kraft des Körpers; daher der Satz: dass die Arbeit der halben gewonnenen lebendigen Kraft gleich sei.

Für zwei Zeiten t, t' , denen die Wege s, s' und die Geschwindigkeiten u, u' entsprechen, hat man

$$P(s - s') = \frac{1}{2} M (u^2 - u'^2)$$

Wäre die Kraft eine veränderliche, so kann man sich dieselbe (34) während verschwindend kleiner Zeitintervalle δt als constant vorstellen und hat dann einerseits die Summe S aller Grössen $P \cdot \delta s$, andererseits diejenigen aller Grössen $M \delta u^2$ zu nehmen und erhält (Formel I)

$$S(P \delta s) = \frac{1}{2} M (u^2 - u_0^2)$$

wenn u_0 und u die am Anfang und Ende des Weges s vorhandenen Geschwindigkeiten sind. Die hervorgebrachte oder verrichtete Arbeit entspricht der halben gewonnenen oder verlorenen lebendigen Kraft.

37. Action und Reaction. — Die Wirkung eines Körpers auf einen andern ist nie einseitig, sondern stets von einer entsprechenden Rückwirkung begleitet. Jeder Druck hat seinen Gegendruck, jeder Stoss ruft einen Gegenstoss hervor, jede Anziehung oder Abstossung wirkt nach beiden Körpern hin etc. In allen diesen Fällen sind die Kräfte und ihre Wirkungen nach beiden Seiten als gleich gross zu betrachten. Die Gleichheit der Action und Reaction ist eines der einfachsten und allgemeinsten Naturgesetze, von dem keine Ausnahme bekannt ist.

38. Verschiedenheit der Kräfte. — Kräfte, welche von aussen auf die Oberfläche eines Körpers wirken und von seiner innern Natur vollkommen unabhängig sind, heissen äussere Kräfte. So verhält es sich mit dem Druck, dem Stoss, dem Luftwiderstand u. s. f. Die Geschwindigkeit, die sie bei gleicher Stärke einem Körper zu geben oder nehmen vermögen, sind seiner Masse verkehrt proportional. Daher z. B. verliert von zwei gleich grossen schwingenden Kugeln, die eine von Eisen, die andere von Holz, die letztere, wegen geringerer Masse, ihre Bewegung schneller als die erstere. Andere Kräfte, wie die Schwere,

die magnetische Anziehung u. s. f. wirken direkt auf die innern Theile und heissen daher innere Kräfte. Wirken sie gleich auf alle Theilchen, so entstehen Druck und Bewegungsmengen, welche den Massen proportional sind, wogegen die Geschwindigkeit davon unabhängig bleibt.

Die innern Kräfte der Körper sind entweder anziehende oder abstossende (attractive oder repulsive) und lassen sich nach dem Bereiche ihrer Wirkung in zwei Classen bringen. Die einen wirken mit wahrnehmbarer Stärke schon zwischen entfernten Körpern, die andern nur zwischen sehr nahen Theilchen, gleichsam nur bei der Berührung.

Aller bisherigen Erfahrung zufolge hängt die Stärke einer auf Entfernung wirkenden Kraft immer, wie durch Ausbreitung geschwächt, von der Entfernung ab und ändert sich verkehrt mit dem Quadrate der Entfernung. Ist sie ϖ in der Entfernung 1, so hat sie in der Entfernung r den Werth

$$P = \frac{\varpi}{r^2}$$

Wie erläutert werden wird, folgen die Schwere, die elektrische, die magnetische Anziehung u. s. f. diesem einfachen Gesetze.

Die in unmerklicher Entfernung wirkenden Kräfte nennt man auch Molecularkräfte. Zu ihnen gehören: 1. die chemische Affinität, welche die innige Verbindung und Scheidung der letzten Körperatome bestimmt; 2. die Cohäsionskräfte, denen der Zusammenhang der Theilchen eines Körpers zugeschrieben wird; 3. die Wärme und überhaupt die Kräfte des Aethers (4), insofern sie sich mittelbar oder unmittelbar zwischen materiellen Theilen äussern. Aus dem Widerstreite der beiden letzten Kräfte gehen, wie später erläutert wird, die Aggregatformen und ihre Eigenschaften hervor. *

Abschnitt II.

Wirkungen der Schwere und der äussern Kräfte.

A. Feste Körper.

Cap. 1. Allgemeine Sätze.

39. Versetzung des Angriffspunktes. — Denkt man sich einen festen Körper, wie es oft erlaubt ist, als eine ganz unveränderliche Verbindung von Theilchen, so wird jede Kraft P , die an einem einzelnen derselben befestigt ist, mittelbar auch auf die andern einwirken. Alle Theilchen aber, die auf der Richtung der Kraft liegen, streben wegen ihrer unveränderlichen Verbindung, sich vollkommen gleich zu bewegen; daher ist es gleichgültig, auf welches derselben die Kraft wirke. Mit andern Worten: man kann den Angriffspunkt einer Kraft, der Wirkung unbeschadet, auf jedes andere Theilchen ihrer Richtung verlegen.

Bei einem drehenden Körper ist noch eine andere Versetzung des Angriffspunktes möglich. Da nämlich alle Theilchen, die zu dem nämlichen Kreise gehören, dieselbe Drehung anzunehmen streben, so kann die Kraft durch entsprechende Drehung ihrer Richtung an jeden dieser Punkte verlegt werden. Verbindet man diesen Satz mit dem vorigen, so lässt er sich allgemeiner so fassen, dass die drehende Wirkung einer Kraft, welches auch ihr Angriffspunkt sei, die gleiche bleibt, sobald sie im gleichen Sinn dreht und ihre Richtung in gleicher Entfernung vom Drehpunkte vorbeigeht.

40. Gleichgewicht mehrerer Kräfte. — Zwei an einem festen Körper wirkende Kräfte heben sich auf, wenn sie 1. entgegengesetzt wirken, 2. ihrer Grösse nach gleich sind, 3. in eine Linie fallen oder an einen gleichen Angriffspunkt verlegbar sind. Jede andere Kraft bewirkt Drehung.

Ebenso werden drei oder mehrere Kräfte an einem festen Körper im Gleichgewicht sein (33), wenn Eine derselben mit der Resultirenden aller übrigen gleich, entgegengesetzt und der Richtung nach zusammenfallend ist. Es fragt sich also, wie diese Resultirende zu bestimmen sein wird.

Die Resultirende zweier Kräfte P und Q (Fig. 9), die in Einer Ebene auf die Angriffspunkte a und b wirken, wird gefunden, indem man diese letztern an den Durchschnittspunkt c der Krafrichtungen verlegt und die Kräfte nach dem Satze des Parallelogramms (33) zu einer Resultirenden R zusammensetzt. Diese, auf irgend einen Punkt ihrer Richtung entgegengesetzt wirkend angenommen, stellt Gleichge-

wicht her. — Bei mehreren Kräften wird die Resultirende zweier Kräfte mit einer dritten, die neue Resultirende mit einer vierten u. s. f. bis zur letzten zusammengesetzt.

Wenn im Raume die verlängerten Richtungen zweier Kräfte an einander vorbeigehen, ohne sich zu schneiden, so ist keine Resultirende möglich; daher kann man nicht durch eine dritte Kraft Gleichgewicht herstellen, nicht durch Festhalten eines einzigen Punktes den Körper in Ruhe halten.*

41. Gleichgewicht eines drehenden Körpers. — Das Gleichgewicht eines drehenden Körpers, auf den zwei Kräfte P und Q (Fig. 9) wirken, tritt offenbar nur dann ein, wenn ihre Resultirende R durch den festen Punkt d geht und von dessen Widerstand vernichtet wird. Die Wirkungen beider Kräfte zur Umdrehung sind alsdann entgegengesetzt und da sie sich aufheben, als gleich stark zu betrachten. Nun beweist man, dass in diesem Falle die Kräfte P und Q sich umgekehrt wie ihre Entfernungen m und n vom festen Punkte d verhalten, so dass die Produkte der Kräfte mit den zugehörigen Entfernungen einander gleich sind

$$P \cdot m = Q \cdot n$$

Ein solches Produkt der Zahlen, welche Kraft und Entfernung ausdrücken, heisst das statische Moment der Kraft; es muss dasselbe als das Vermögen der Kraft, zur Umdrehung einzuwirken, betrachtet werden. In dieser Hinsicht wirkt eine Kraft um so stärker, je stärker sie selbst ist und je weiter ihre Richtung an dem Drehpunkte vorbeigeht.

Für das Gleichgewicht mehrerer in einer oder in parallelen Ebenen zur Umdrehung um eine Axe wirkender Kräfte gilt allgemein die Bedingung, dass die Summe aller nach einer Seite drehenden statischen Momente wie Pm derjenigen der nach der andern Seite drehenden wie Qn gleich sei

$$S(P \cdot m) = S(Q \cdot n)$$

Liegt der feste Punkt nicht auf der Richtung der Resultirenden, so lassen sich die Momente der einzelnen Kräfte durch dasjenige der einzigen Resultirenden ersetzen, da die letztere Kraft in jeder Beziehung die ersteren vertreten kann. Umgekehrt ist es erlaubt, an die Stelle des Momentes einer Kraft, die Momente der durch Zerlegung entstandenen Theilkräfte in Rechnung zu bringen.

1. Die Gleichheit der Momente zweier Kräfte P , Q , für einen auf der Richtung ihrer Resultirenden R liegenden Drehpunkt d (Fig. 9), folgt aus der Vergleichung der Dreiecke $c\alpha\alpha'$, $c\beta\beta'$ mit ihren ähnlichen cde , cdf . Sie liefert

$$de : \alpha\alpha' = cd : c\alpha \text{ und } df : \beta\beta' = cd : c\beta$$

oder da $\alpha c = P$, $\beta c = Q$, ferner $\alpha\alpha' = \beta\beta'$

$$P \cdot de = Q \cdot df$$

2. Dass das Moment der Resultirenden Ro für einen ausserhalb derselben liegenden Drehpunkt d durch die Momente der Theilkräfte Pm , Qn (Fig. 10) ersetzt werden kann, folgt daraus, dass die Produkte Ro , Pm , Qn den Inhalt der Parallelogramme dg , de , df darstellen, von welchen das erste, wie leicht zu erkennen, den beiden letztern gleich ist, so dass

$$Ro = Pm + Qn.$$

42. Parallele Kräfte. — Die in (40) gegebene Construction zur Bestimmung der Resultirenden R lässt sich auf parallele Kräfte P und Q , deren Durchschnittspunkt ins Unendliche fällt, nicht anwenden; doch ist leicht einzusehen, dass R jedenfalls den Kräften selbst parallel, und, der Grösse nach, ihrer Summe $P + Q$ oder ihrer Differenz $P - Q$ gleich sein muss, je nachdem P und Q nach einer oder nach entgegengesetzter Seite wirken. Was die Angriffspunkte der Resultirenden betrifft, so lassen sie sich aus der Bedingung ableiten, dass für alle Punkte ihrer Richtung die Momente $P \cdot m$ und $Q \cdot n$ gleich und entgegengesetzt sein sollen (41).

Bei Kräften nach der gleichen Seite (Fig. 11) ist diess der Fall, wenn sie zwischen ihnen durchgeht und die Entfernung derselben $l = m + n$ in zwei Theile m und n theilt, die sich umgekehrt wie die Kräfte verhalten. Bei Kräften nach entgegengesetzter Seite (Fig. 12) geht sie ausserhalb der stärkern P und im Sinne derselben vorbei, so dass die Entfernung beider $l = n - m$ ist. Man erhält dann

$$m = l \cdot \frac{Q}{R}, \quad n = l \cdot \frac{P}{R}$$

Auch hier natürlich stellt die Resultirende, entgegengesetzt genommen, Gleichgewicht her. Nur in dem einzigen Falle, wo die entgegengesetzt wirkenden Kräfte p und q einander gleich sind, verschwindet die Resultirende und es ist keine dritte Kraft gedenkbar, welche allein die Wirkung der andern zwei aufzuheben vermöchte.

Sind der parallelen Kräfte in einer Ebene mehrere vorhanden, so wird man, um die Resultirende zu finden, successiv verfahren, nämlich zuerst zwei Kräfte berücksichtigen, dann ihre Resultirende und die dritte u. s. f. Die Grösse R und die Angriffspunkte müssen immer den Bedingungen entsprechen

$$R = S(P) \text{ und } S(Pm) = 0$$

wo die Summe S im algebraischen Sinne, d. h. mit Rücksicht auf gleiche oder entgegengesetzte Zeichen der Kräfte P und der Momente $P \cdot m$, zu nehmen sind.

Oft auch kommt die umgekehrte Aufgabe vor; eine Kraft R in andere parallele P und Q zu zerlegen, welche an gegebenen Angriffspunkten a und b wirken sollen. R muss dann in zwei Theile zerlegt werden, die sich umgekehrt wie die Entfernungen verhalten. Man erhält

$$P = R \frac{n}{l}, \quad Q = R \frac{m}{l}$$

43. Mittelpunkt der parallelen Kräfte. — Wie die Entfernung zweier parallelen Kräfte P, Q (Fig. 13) wird auch die Entfernung $a b$ ihrer Angriffspunkte von der Resultirenden in zwei Abschnitte $a b, b c$ getheilt, die sich verkehrt wie die Kräfte verhalten. Da diess für jede andere Richtung P', Q', R' der parallelen Kräfte auf gleiche Weise der Fall ist, so liegt c stets in der Resultirenden, wie man sich auch die parallelen Kräfte oder den Körper gedreht denken mag. Der Punkt c , als bleibender Angriffspunkt der Resultirenden gedacht, heisst der Mittelpunkt der parallelen Kräfte. Man findet diesen Punkt, wenn man

von a und b auf der Richtung der Kräfte, aber nach entgegengesetzter Seite Stücke ad , be abmisst, die sich umgekehrt wie Q zu P verhalten und den Durchschnitt der die Endpunkte verbindenden Linie mit ab bestimmt.

Das gleiche Verfahren, successiv angewandt, führt gleichfalls auf die Bestimmung des Mittelpunktes mehrerer parallelen Kräfte.

Dem Mittelpunkte der parallelen Kräfte kommt eine andere bemerkenswerthe Eigenschaft zu. Bildet man nämlich z. B. für zwei Kräfte P und Q (Fig. 14) die Produkte ihrer Stärke mit den Entfernungen aa' , bb' von einer beliebigen Ebene AB oder mit den parallel CD genommenen Coordinaten der Angriffspunkte — Produkte welche man die Momente für die Ebene AB oder parallel CD heisst — so ist die Summe dieser Momente demjenigen $R \cdot cc'$ der Resultirenden gleich. Auch dieser Satz lässt sich leicht auf eine beliebige Zahl paralleler Kräfte ausdehnen.

1. Für zwei Kräfte P und Q erhält man, da $R = P + Q$, durch Multiplication beider Seiten mit cc' , dann durch Addition und Subtraction der gleichen Produkte $P \cdot aa'$ und $Q \cdot cc'$ auf der rechten Seite

$$R \cdot cc' = P \cdot aa' + Q \cdot bb'$$

Geht die Ebene durch den Mittelpunkt c , so erhalten die Produkte entgegengesetzte Zeichen und ihre algebraische Summe wird 0.

2. Allgemein, bezeichnet x die Entfernung des Angriffspunktes einer Kraft P von einer beliebigen Ebene, so hat man für die Entfernung z des Mittelpunktes der parallelen Kräfte

$$R \cdot z = S(P \cdot x)$$

Geht die Ebene durch den Mittelpunkt selbst

$$S(P \cdot x) = 0,$$

wobei natürlich die diess- und jenseits der Ebene liegenden x mit $+$ und $-$ zu nehmen sind.

44. Statische Momente mehrerer Axen. — Zwischen den statischen Momenten, welche zwei verschiedenen durch einen gleichen Punkt a gehenden Drehungsaxen aA und aB (Fig. 15) angehören, und zwei Kräften findet eine bemerkenswerthe Analogie statt. Stellt man nämlich jene Momente, ihrer Grösse nach, durch Linien ab und ac , auf den entsprechenden Axen abgemessen, dar und zwar nach der Seite der Axe hin, für welche die Momente im gleichen Sinne, z. B. im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers wirken, construirt dann das Parallelogramm, so bezeichnet in ähnlicher Weise wie bei Kräften die Diagonale ad durch ihre Richtung und Grösse die Axe, die Richtung und die Grösse des resultirenden Momentes. Daraus folgt allgemein, dass Momente auf gleiche Weise wie nach ihren Axen gerichtete Kräfte behandelt und nach denselben Regeln zusammengesetzt und zerlegt werden können.

Gehen also die Axen verschiedener Momente durch einen gleichen Punkt, so lässt sich immer (33) ein resultirendes Moment bestimmen, das allein an die Stelle aller gesetzt werden kann und das Polygon der Kräfte (27), auf die Axenrichtungen angewandt, führt auf die Bestimmung derselben.

Sind A und B zwei durch a gehende Axen, so lassen sich die Momente M und N als an der gleichen, zur Ebene AB senkrechten, Entfernung $ab = 1$ zur Drehung einwirkende Kräfte betrachten. Die Wirkung dieser Kräfte

wird durch ihre Resultirende O ersetzt, zu der die auf O senkrecht gerichtete Axe a gehört. Da die Winkel der Kräfte M, N, O die gleichen sind, wie diejenigen der Axen a, A, a, B, a, C , so hätte man das Parallelogramm zur Bestimmung des resultirenden Momentes O und seiner Axenrichtung a gleichfalls durch Auftragen der Momente M und N auf den Richtungen der entsprechenden Axen a, A, a, B finden können.

45. Allgemeine Gleichgewichtsbedingungen. — 1. Auf das Theilchen m eines Körpers, dessen rechtwinklichte Ordinaten x, y, z sind, wirke eine Kraft p , welche mit den positiven Axen die Winkel α, β, γ bilde. Sie zerlegt sich den Axen parallel in

$$p \cos \alpha, p \cos \beta, p \cos \gamma$$

wobei $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$

Zerlegt man alle andern Kräfte auf die nämliche Weise, so entstehen 3 Summen paralleler Kräfte, die als rechtwinklich nicht auf einander einwirken und für das Gleichgewicht einzeln verschwinden müssen, woraus, wenn S die Summe aller gleichartigen Grössen bezeichnet, die Bedingungen

$$S(p \cos \alpha) = 0, S(p \cos \beta) = 0, S(p \cos \gamma) = 0 \quad (1)$$

2. Durch diese Bedingungen ist das Gleichgewicht noch nicht gesichert, wenn die Kräfte auf verschiedene Angriffspunkte wirken. Man fügt daher die Bedingung hinzu, dass um keine der drei Coordinataxen Drehung erfolge.

Um die Axe z liefert $p \cos \alpha$ das Moment $p \cos \alpha y$, $p \cos \beta$ dasjenige $p \cos \beta x$. Beide wirken einander entgegen, daher $p(y \cos \alpha - x \cos \beta)$ das ganze Moment von p um jene Axe darstellt. Damit also um keine der drei Axen Drehung erfolge, wird erfordert, dass:

$$S[p(z \cos \beta - y \cos \gamma)] = 0, S[p(x \cos \gamma - z \cos \alpha)] = 0, S[p(y \cos \alpha - x \cos \beta)] = 0 \quad (2)$$

3. Besteht kein Gleichgewicht, so geben jene drei Systeme paralleler Kräfte drei Resultirende P, Q, R , und ebenso diese drei Systeme von Momenten drei resultirende Momente L, M, N .

Haben die sämtlichen Kräfte eine einzige Resultirende, welche durch einen Punkt X, Y, Z geht, so dient zur Bestimmung ihrer Grösse T der Ausdruck

$$T^2 = P^2 + Q^2 + R^2 \quad (3)$$

und zu derjenigen ihrer Richtungen oder ihrer Winkel a, b, c mit den Axen

$$\cos a = \frac{P}{T}, \cos b = \frac{Q}{T}, \cos c = \frac{R}{T} \quad (4)$$

Die Bestimmung eines ihrer Angriffspunkte folgt aus

$$QZ - RY = L, RX - PZ = M, PY - QX = N \quad (5)$$

4. Die Gleichungen (5) lassen nur zwei der drei Grössen X, Y, Z aus der dritten bestimmen, stellen also eine bestimmte gerade Linie dar, Richtung der Kraft. Ueberdiess führen sie durch Elimination von X und Y aus der dritten Gleichung auf die Beziehung

$$PL + QM + RN = 0 \quad (6)$$

welche zwischen den gegebenen Grössen erfüllt sein muss, sollen die Kräfte eine einzige Resultirende haben.

5. Vereinigt man die Momente L, M, N in ein resultirendes Moment O , für welches sein wird

$$O^2 = L^2 + M^2 + N^2 \quad (7)$$

und dessen Drehungsaxe die Winkel A, B, C bildet, welche sich aus

$$\cos A = \frac{L}{O}, \cos B = \frac{M}{O}, \cos C = \frac{N}{O} \quad (8)$$

ergeben, so verwandelt sich die Gleichung (6) nach Division durch $T \cdot O$ in

$$\cos a \cos A + \cos b \cos B + \cos c \cos C = 0 \quad (9)$$

welche ausdrückt, dass die Axenrichtung des resultirenden Hauptmomentes und die Resultirende selbst senkrecht zu einander stehen müssen.

Cap. 2. Vom Schwerpunkte.

46. Die Schwerkraft. — Keine Kraft ist für den Erdbewohner wichtiger als die Schwere, welche alle Körper gegen die Erde zieht und alles an sie bindet, was zu ihr gehört. Sie wirkt auf alle Theilchen der Körper und beständig gleich. An dem Gewichte der Körper, dem Drucke den sie vermöge der Schwere gegen eine Unterlage ausüben (32), kennen wir keinerlei Veränderung. Die Schwere erscheint daher als eine der wesentlichsten eigenthümlichsten Eigenschaften der greifbaren Materie.

Die Richtung der Schwere erkennen wir aus dem Wege des freien Falles oder aus der Richtung eines hängenden Lothes. Diese Richtung, an jedem Orte der Erde zu der freien (horizontalen) Wasseroberfläche senkrecht stehend, heisst die *Verticale*. Sie bezeichnet für uns das Oben und Unten und dient, neben den horizontalen Richtungen *NS* und *WO*, als dritte Coordinatenrichtung zur Bestimmung der Lage eines Punktes auf der Erde. Die Verticalen verschiedener Orte der Erdkugel gehen von allen Seiten gegen ihren Mittelpunkt.

Die Schwere wirkt auf alle materiellen Theilchen in so fern gleich, dass sie beim freien Falle im leeren Raume dem schwersten Metall, wie dem leichtesten Korkstück die gleiche Beschleunigung mittheilt. In der Gleichung (32)

$$M = \frac{P}{g}$$

welche die Gleichheit der Kraft ausdrückt, wenn sie drückend, oder bewegend wirkt, hat *g* für alle Körper den gleichen Werth. Folglich ist die Masse dem Gewichte proportional und kann nach diesem beurtheilt werden. Verschiedene Körper unterscheiden sich nur durch ihre Dichte, nicht durch eine verschiedene Wirkung der Schwere auf ihre Theilchen.

Wenn in der Luft bei gleicher Grösse der eine Körper schneller fällt, als der andere, so rührt diess daher, dass er grössere Masse, daher eine grössere Bewegungsmenge oder Kraft (34) in sich schliesst, gegen welche der Luftwiderstand weniger vermag. In der That genügt es eine Papierscheibe mit und über einer Metallscheibe fallen zu lassen, um sie ebenso schnell unten eintreffen zu sehen.

47. Begriff des Schwerpunktes. — Für jeden Körper gibt es einen inner- oder ausserhalb desselben liegenden Punkt, den *Schwerpunkt*, der die Eigenschaft besitzt, mit dem Körper verbunden und fest unterstützt, ihn in jeder Stellung im Gleichgewicht zu halten. In jeder Stellung nämlich wirken die Theilchen der einen Seite eben so stark zur Umdrehung als diejenigen der andern, und die Resultirende aller geht durch den Schwerpunkt. Da die Schwere auf alle Theilchen parallel wirkt, so ist der Schwerpunkt nichts anderes als der *Mittelpunkt* der sämmtlichen parallelen Schwerkkräfte (43), an dem man sich die Resultirende, d. h. das ganze Gewicht des Körpers, als eine einzige

Kraft befestigt denken kann. Wegen der gleichen Wirkung der Schwere auf alle Theilchen bezeichnet der Schwerpunkt zugleich den Massenmittelpunkt des Körpers.

Hält man einen Körper, statt im Schwerpunkte a (Fig. 16) in einem andern Punkte b oder b' , so bleibt derselbe nur dann in Ruhe, wenn dieser Punkt genau über oder unter dem Schwerpunkte liegt, nur dann vermag er die Resultirende zu vernichten. Darauf gründet sich die empirische Bestimmung des Schwerpunktes. Hängt man den Körper nach einander an mehreren Punkten c, c' frei beweglich auf, so muss der Schwerpunkt jedesmal auf den Verticalen, Verlängerung des Fadens, liegen und wird daher aus dem Durchschnittspunkte zweier oder mehrerer solcher Linien oder Schwerendurchmesser gefunden.

Der in (44) erläuterte Satz bezüglich auf die Momente paralleler Kräfte für eine beliebige Ebene, führt auf die Beziehung

$$M \cdot X = S(m \cdot x)$$

und wenn die Ebene durch den Schwerpunkt geht, auf

$$S(m \cdot x) = 0$$

M bezeichnet die Masse $S(m)$ des ganzen Körpers, m diejenige irgend eines Theilchens.

48. Theoretische Bestimmung des Schwerpunktes. — Bei homogenen (im Innern gleichartigen) Körpern von einfacher Gestalt kann der Schwerpunkt auf theoretischem Wege bestimmt werden.

Der Schwerpunkt einer Geraden liegt, der Simetrie wegen, in ihrer Mitte.

Der Schwerpunkt eines Dreieckes ABC (Fig. 17) liegt in den Linien, welche von den Winkelpunkten A, B, C nach a, b, c , den Mitten der gegenüberliegenden Seiten, gezogen werden können, folglich in ihrem gemeinsamen Durchschnitte g . Denn, denkt man sich das Dreieck in lauter schmale Streifen, z. B. parallel mit BC zerlegt, so enthält die Halbirungslinie Aa den Schwerpunkt aller dieser Streifen, folglich auch denjenigen des ganzen Dreieckes. — Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke AdB, adb ergibt sich dann

$$Ad : da = AB : ab = 2 : 1$$

Auf jeder Halbirungslinie liegt derselbe $\frac{2}{3}$ vom Winkelpunkte, $\frac{1}{3}$ von der Seite entfernt.

Auf ähnliche Weise beweist man für die dreiseitige Pyramide $ABCD$ (Fig. 18), indem man sich eine Zerlegung in parallele Schichten denkt, dass jede von einem Eckpunkte A nach dem Schwerpunkte a der gegenüberliegenden Fläche gezogene Linie den Schwerpunkt enthält. Solcher Linien sind 4 möglich, die den Schwerpunkt b als gemeinsamen Durchschnittspunkt haben. Auf jeder solchen Linie liegt derselbe $\frac{3}{4}$ von der Ecke, $\frac{1}{4}$ von der Fläche entfernt.

Bei Körpern, die einen geometrischen Mittelpunkt haben, im Kreise, der Ellipse, der Kugel, dem Ellipsoid, dem Parallelopipedon u. s. f. liegt natürlich der Schwerpunkt in diesem Punkte; in hohlen und ringförmigen Körpern ausserhalb ihrer wirklichen Theile; in conischen und pyramidalen Körpern theilt er die vom Scheitel nach dem Schwerpunkt der Basis gezogene Linie in zwei Abschnitte wie $3 : 1$; in nicht homogenen Körpern nähert er sich den dichtern Theilen u. s. f. Endlich

findet man den Schwerpunkt eines aus einfachern Theilen gebildeten Körpers, indem man das Gewicht jedes Theiles als eine im Schwerpunkt desselben befestigte Kraft betrachtet und den Mittelpunkt der so erhaltenen parallelen Kräfte sucht (43). So wird der Schwerpunkt des Umfangs und Inhaltes eines Polygons aus denjenigen der geraden Linie und des Dreieckes, derjenige der Oberrfläche und des Volumens eines Polyeders aus denen des Dreieckes und der dreiseitigen Pyramide abgeleitet.

1. Die theoretische Bestimmung des Schwerpunktes gründet sich auf die zweite in (43) erläuterte Eigenschaft des Mittelpunktes paralleler Kräfte. Sind nämlich x, y, z die rechtwinklichten Coordinaten irgend eines Theilchens, dessen Masse oder Gewicht m , bezeichnen ferner X, Y, Z die gesuchten Coordinaten des Schwerpunktes der ganzen Masse $M = S(m)$, so hat man

$$X = \frac{S(mx)}{M}, Y = \frac{S(my)}{M}, Z = \frac{S(mz)}{M}$$

und es hängt die Bestimmung von der Ausführung der angedeuteten Summationen ab.

2. Bezeichnet auf einem Kreise, dessen Radius r , l die Länge eines Kreisbogens, der zum Centrumwinkel 2α gehört, so dass $l = \frac{\pi \cdot r}{90} \cdot \alpha$, so liegt der Schwerpunkt auf der Mittellinie vom Centrum entfernt

für den Bogen, um

$$2 \frac{r^2 \sin \alpha}{l}$$

für die Fläche des Kreissektors, um

$$\frac{4}{3} \frac{r^2 \sin \alpha}{l}$$

für die Fläche des Kreissegmentes

$$\frac{4}{3} \frac{r^2 \sin^3 \alpha}{l - 2r \sin \alpha \cos \alpha}$$

Für den Halbkreis wo $\alpha = 90^\circ$ erhält man $l = r\pi$

Bogen $2 \frac{r}{\pi}$,

Fläche $\frac{4}{3} \frac{r}{\pi}$

3. Sei r der Radius einer Kugel, α ein Centrumwinkel, durch dessen Umdrehung ein Abschnitt der Oberfläche abgegrenzt wird, so erhält man als Entfernung des Schwerpunktes vom Centrum folgende Grössen

für die Segmentoberfläche

$$\frac{1}{2} r (1 + \cos \alpha)$$

für den Inhalt des conischen Factors

$$\frac{3}{8} r (1 + \cos \alpha)$$

für den Inhalt des Kugelsegmentes

$$\frac{3}{8} \frac{r \sin^4 \alpha}{1 - \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \cos \alpha}$$

49. Unterstützung und Nichtunterstützung. — Um in Ruhe zu bleiben, muss ein Körper so unterstützt sein, dass die Verticale des Schwerpunktes, Richtung der Resultirenden, durch einen festen Punkt geht oder in die Grundfläche des Körpers fällt. Diese Bedingung ist immer erfüllt, wenn wir Körper (Gefässe, Mobilien, Gebäude u. s. f.) in ihrer Stellung verharren sehen. Viele Bewegungen, welche der Mensch unbewusst beim Stehen, Gehen, Heben, Tragen macht, haben zum Zwecke den zwischen und über den Hüften liegenden Schwerpunkt über die stützende Fläche des Fusses zu bringen.

Findet sich jene Bedingung nicht erfüllt, so bewegt sich der Körper, und der Schwerpunkt sinkt, was das bezeichnende Merkmal aller von der Schwere verursachten Bewegungen ist. Eine Ruhestellung, zu welcher der Körper, nach kleiner Bewegung, von selbst zurückkehrt,

heisst ein *stetes* (*stabiles*) Gleichgewicht; entfernt er sich davon ein *unstetes* (*labiles*). Jene wird eine tiefste, diese eine höchste unter allen benachbarten Stellungen des Schwerpunktes sein.

Ein in Einem Punkte gehaltener Körper hat ein *stabiles* Gleichgewicht, wenn der Schwerpunkt vertical unter dem Stützpunkte liegt, ein *labiles*, wenn vertical über demselben. Polyedrische auf Flächen ruhende Körper haben meist mehrere Lagen *steten* Gleichgewichtes, entsprechend den Flächen, andere *unsteten*, entsprechend den Kanten und Ecken. Beim Wälzen eines solchen Körpers geht derselbe abwechselnd durch eine gleiche Zahl stabiler und labiler Stellungen und sein Schwerpunkt beschreibt eine Reihe von Bogenlinien. Die Zahl dieser Stellungen hängt von der Gestalt des Körpers ab und wird für die Kugel unendlich. Aus leichtbegreiflichen Gründen bietet uns die Natur in der Regel nur *stabile* Stellungen dar, *labile* nur vorübergehend.

Uebrigens gelten ähnliche Betrachtungen, nicht für die Resultirende der Schwere allein, sondern für jede andere Kraft, die auf einen bestimmten Angriffspunkt eines gehaltenen oder gestützten Körpers wirkt.

Auffallende Unterstützungen. — Schiefe Thürme zu Pisa und Bologna. — Zweck der Balancierstange beim Seiltanzen. — Bewegungen beim Gehen, Bücken, Tragen. — Schaukel und Purzelmännchen. — Bergaufrollender Cylinder und Conus. — Lenormand's Zeitmesser. — Lampe des Cardanus. — Lampenaufhängung in Schiffen. — Hodometer u. s. f.

50. Festigkeit der Stellung. — Die Stabilität oder Festigkeit der Stellung eines Körpers, der auf einer Fläche ruht, wird nach der Kraft Q (Fig. 19) beurtheilt, welche im Schwerpunkte a horizontal wirkend erforderlich ist, um den Körper durch Drehung um den Rand b seiner Grundfläche aus seiner Lage zu bringen. Der kleinste Werth von Q , genügend dem Gewichte P des Körpers bei Umdrehung um b das Gleichgewicht zu halten, gilt als Maass der Stabilität. Die Gleichheit der Momente um b als Drehpunkt führt auf

$$Q = P \frac{m}{n}$$

wo m die Entfernung der Verticalen des Schwerpunktes vom Rande b der Grundfläche, n die Höhe des gleichen Punktes über der Grundfläche ist. Die Stabilität wächst also 1) wie das Gewicht P des Körpers, — ein Steinblock ruht deshalb fester als ein gleich grosser Holzblock; 2) wie die Entfernung n der Verticalen vom Rande der Basis, wesshalb durch Vergrösserung des Fusses an Gefässen, an Mauern, an Gebäuden die Stabilität gewinnt; 3) verkehrt wie die Höhe des Schwerpunktes. Hohe Gegenstände (Urnen, Lampen, Statuen etc.) werden im Fusse beschwert, Fuhrwerke mit den schweren Lasten unten befrachtet u. s. f.

Bei Körpern, die auf einer gekrümmten Fläche aufruhend, beurtheilt man die Stabilität nach der Kraft, welche erforderlich ist, dieselben um einen bestimmten kleinen Winkel aus ihrer Stellung zu bringen.

Nennt man im letztern Falle r den Krümmungsradius, n die Höhe des Schwerpunktes über der Unterlage, so hat man (Fig. 20) wieder

$$Q = P \cdot \frac{ab}{ac} = P \frac{r-n}{n} \sin \alpha$$

Die Stabilität wächst wieder mit dem Gewichte P , mit dem Radius r und nimmt ab mit der Höhe des Schwerpunktes n .

Cap. 3. Maschinen mit Drehung.

51. Maschinen überhaupt. — Um die von der Natur uns gebotenen Kräfte (Muskelkraft der Thiere, Schwere, Druck des Wassers und des Windes, Expansivkraft des Dampfes u. s. f.) zu nützlichen Zwecken zu verwenden, müssen dieselben auf verschiedene Weise umgeändert werden, und dazu dienen mannigfache Vorrichtungen, die man im Allgemeinen Maschinen nennt. An jeder solchen Vorrichtung lassen sich drei Theile, jeder einen besondern Zweck erfüllend, unterscheiden: der erste nimmt die Einwirkung der Naturkraft so vollständig als möglich auf, wesshalb er nach der Natur der letztern gebaut sein muss; der zweite hat sie auf bestimmte Weise umzuwandeln, was auf verschiedenem Wege geschehen kann; der dritte endlich verrichtet die beabsichtigte Arbeit und muss auf die Beschaffenheit dieser berechnet sein. Bald sind diese drei Theile, wie in den meisten Handwerkzeugen, höchst einfach und in Einen Körper vereinigt, bald hingegen bestehen sie selbst wieder aus einer Reihe mit und nach einander wirkender Theile. Auch im letztern Falle kann aber jeder solche Theil als eine einfache Maschine betrachtet werden, welche von der einen Seite die Wirkung eines frühern, bewegenden Theiles empfängt, nach der andern sie an einen folgenden widerstehenden Theil abgibt.

Jede nützliche Arbeit verlangt einen Druck des arbeitenden Theiles zur Ueberwindung der Widerstände, welche der zu bearbeitende Körper entgegenstellt, und zugleich eine Geschwindigkeit desselben, damit immer neue Theile in Arbeit fallen. Bei regelmässigem Gange bleiben Druck und Geschwindigkeit gleich oder variiren wenigstens periodisch. Grössere Geschwindigkeit und grösserer Druck sind als Vorthelle von gleichem Werthe zu betrachten, da, wie sich zeigen wird, die eine Grösse in die andere umgewandelt werden kann. Desshalb bestimmt man die Arbeitsgrösse einer Maschine aus dem Produkte der Geschwindigkeit U des arbeitenden Theiles mit dem Drucke P , der in der Richtung der Bewegung ausgeübt wird und dieselbe unterhält, und misst sie durch ein auf eine bestimmte Höhe gehobenes Gewicht. 1 Kil. in 1 Sec. auf 1 Met. gehoben ist die kleinere Einheit für Maschinenarbeit, das Kilogrammeter; als grössere, besonders für Dampfmaschinen, benutzt man die Pferdekraft, die 75 Kil. in 1 Sec. auf 1 Met. gehoben gleich kommt.

Bestimmt man die Arbeitsgrösse an dem ersten Maschinentheile, wo die Naturkraft auf denselben wirkt, dann an dem letzten, wo die Arbeit verrichtet wird, so findet man letztere stets kleiner als erstere, weil ein Theil der Naturkraft auf die Hindernisse der Maschine selbst verwendet wird. Je geringer dieser Unterschied ausfällt, für desto vollkommner muss die Maschine gelten. Vernachlässigt man diese Hindernisse, so ergibt sich die Umänderung, welche die Geschwindigkeit durch Vermittlung einer Maschine erfährt, aus den geometrischen Verhältnissen ihrer Theile, die Veränderung, welche der Druck erleidet, aus den Bedingungen des Gleichgewichtes, da bei gleichförmigem Gange bewegende und widerstehende Kräfte sich nothwendig

aufheben (35). Die einfachen Maschinen haben die einen eine drehende, die andern eine gleitende Bewegung; bei jenen hängt das Gleichgewicht vom Grundsatz der statischen Momente ab, bei diesen von demjenigen der Kräftezerlegung.

Zwischen dem früher gegebenen Begriff des Wortes Arbeit (36) und der Arbeitsgrösse einer Maschine besteht ein wesentlicher Unterschied. Dort nämlich wirkt die Kraft frei und die Arbeit spricht sich ganz in einer Veränderung der lebendigen Kraft aus; hier hingegen entsteht, ausser am Anfang, keine neue Geschwindigkeit, so dass die ganze bewegende Arbeit, von einer eben so grossen widerstehenden aufgezehrt wird.

52. Der Hebel. — Hebel nennt man jeden geraden oder gekrümmten, um eine Axe beweglichen Stab, auf den Kräfte wirken. Der wirkliche, aus schweren Theilen bestehende Hebel lässt sich auf den gewichtlosen zurückführen, indem man den vorhandenen Kräften das Gewicht des Stabes als eine neue, im Schwerpunkt befestigte Kraft hinzufügt. Soll dann der Hebel im Gleichgewicht sein, so müssen, dem Früheren zufolge (41), alle im einen Sinne drehenden Momente $P m$, denen im entgegengesetzten $Q n$ gleich sein

$$S(P m) = S(Q n)$$

wobei die Resultirende durch den Stützpunkt geht und den Druck bezeichnet, den dieser erleidet. Doch kann bei beliebig gerichteten Kräften nur derjenige Theil derselben zu den Momenten beitragen, welcher durch Zerlegung in die Drehungsebene fällt.

Für zwei in der Drehungsebene liegende Kräfte P, Q hat man einfach

$$P m = Q n$$

Die Kräfte verhalten sich ~~verkehrt~~ wie ihre Entfernungen.

Bilden die Kräfte (Fig. 21) die Winkel α, β mit den Verbindungslinien a, b ihrer Angriffspunkte mit dem Stützpunkte, so hat man $m = a \sin \alpha, n = b \sin \beta$, folglich

$$P \sin \alpha \cdot a = Q \sin \beta \cdot b$$

wo $P \sin \alpha, Q \sin \beta$ die Theilkräfte senkrecht zu a und b sind. Eine Kraft wirkt am stärksten, wenn $\alpha = 90^\circ$, wenn sie senkrecht zu ihrer Verbindungslinie gerichtet ist.

Wird der Hebel gedreht, so verhalten sich die Geschwindigkeiten u, v der beiden Angriffspunkte wie a zu b , folglich erhält man

$$P \sin \alpha \cdot u = Q \sin \beta \cdot v$$

Die Arbeitsgrösse für die beiden Theilkräfte nach der Richtung der Bewegungen oder für die beiden Geschwindigkeiten nach der Richtung der Kräfte ist gleich; daher kann durch Vermittlung des Hebels die Kraft nur auf Unkosten der Geschwindigkeit vermehrt werden.

Der Hebel wird mannigfach benutzt, er dient namentlich in vielen alltäglichen Instrumenten und Werkzeugen (Hebe- und Brechstangen, Scheere, Zange, Hebelade, Wage u. s. f.). Auch die Bewegungen des Knochengerüsts des thierischen Körpers lassen sich auf das Princip des Hebels zurückführen. Aus der schiefen und daher unvortheilhaften Richtung der Muskeln an den Gliedmassen ergibt sich, dass die Natur im Bau dieser Theile mehr die Leichtigkeit und Mannigfaltigkeit der Bewegungen als Krafterparniss beabsichtigt hat.

Hält der ausgestreckte Arm auf der Hand 30 Kil., so muss der Schulter-

muskel, der schief in etwa 4 Centim. vom Schultergelenk vorbeigeht, die Armlänge zu 72 Centim. angenommen, mit 540 Kil. wirken. Beinahe senkrecht, daher vortheilhafter wirken die Kaumuskeln, die Intercostalmuskeln etc. *

53. Die Wage. — Statische Bedingungen. — Für den Physiker und Chemiker ist wohl keine Vorrichtung wichtiger als die Hebelwage, bestimmt, das ganze oder absolute Gewicht der Körper nach Gewichtseinheiten zu messen. Die gemeine Wage (Fig. 22) besteht aus einem gleicharmigen Hebel, dem Wagebalken, ab , der leicht beweglich auf dem Stützpunkte c ruht und an seinen Enden die Aufhängepunkte d, e der Schalen trägt. In die eine Schale legt man den zu bestimmenden Körper, in die andere Gewichtsteine, welche beim Einspielen der Zunge f das Gewicht desselben darstellen sollen.

Eine richtige Wage hat folgende Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen:

1. Unbelastet soll der Balken horizontal schweben; — die Momente beider Arme und Schalen müssen gleich sein, was am einfachsten durch vollkommenes Gleichmachen der beidseitigen Theile erreicht wird.

2. Das Gleichgewicht soll stabil sein; damit die Wage von selbst in ihre Stelle zurückkehre; — hiefür ist erforderlich, dass der Schwerpunkt der ganzen Wage unter den Stützpunkt falle (49).

3. Gleiche Belastungen beider Schalen sollen das Gleichgewicht nicht stören; — die Momente der Lasten sollen also gleich sein, was eine gleiche Entfernung der Aufhänge- vom Stützpunkte voraussetzt.

4. Die Wage soll empfindlich sein, das heisst bei geringer Ueberlast, erst in stark geneigter Stellung zur Ruhe kommen; — was, wie gleich gezeigt wird, um so mehr der Fall ist, als der Schwerpunkt näher dem Stützpunkte liegt, die Arme der Wage länger sind und ihr Gewicht ein kleineres ist.

5. Endlich soll — theoretisch genommen — die Neigung einzig von der Ueberlast abhängen, mit andern Worten die Empfindlichkeit bei allen Belastungen die nämliche bleiben; — diess setzt voraus, dass Aufhänge- und Stützpunkt in eine gleiche gerade Linie fallen.

An genauen Wagen sind die Mittel vorhanden, durch kleine Veränderungen der Aufhängepunkte und des Schwerpunktes der Wage, diese Bedingungen genau zu erfüllen. Eine oft einfach benutzte Aufhängung ist in Figur 23 dargestellt. Der Aufhängepunkt a wird von dem gekrümmten Stahlstück abc gebildet und kann mittelst der Schrauben α, β, γ etwas gehoben und gesenkt werden, während das Gewichtchen d das Moment des Armes verändern lässt.

Die Bedingungen 4 und 5 ergeben sich aus folgender Betrachtung: Die Wage habe ein Gewicht Q und ihren Schwerpunkt um die Grösse d (Fig. 24) vom Stützpunkte entfernt; an den Aufhängepunkten, die auf einer vom Stützpunkte um δ abstehenden Linie liegen, wirken die Lasten P , das Uebergewicht p , auf der einen Seite hinzugefügt, dreht den Balken um den Winkel α , bis das Gewicht der Wage ein Moment liefert, genügend, dasjenige der kleineren Last zu ergänzen. Nun wirkt auf Seite der Ueberlast die Kraft $P + p$ in einer Entfernung $(l \cos \alpha - \delta \sin \alpha)$, auf der andern Seite die Last P in der

Entfernung $(l \cos \alpha + \delta \sin \alpha)$ und dazu das Gewicht Q in der Entfernung $d \sin \alpha$, das Gleichgewicht verlangt dass

$$(P + p)(l \cos \alpha - \delta \sin \alpha) = P(l \cos \alpha + \delta \sin \alpha) + Q \sin \alpha$$

woraus folgt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p \cdot l}{(2P + p)\delta + Q \cdot d}$$

Wenn $\delta = 0$, fällt P aus der Formel. Dann ist die Tangente des Ausschlages oder, bei kleinerer Neigung, dieser selbst proportional 1) dem Uebergewicht p , 2) der Länge der Arme l , 3) verkehrt dem Gewichte Q der Wage, 4) verkehrt der Entfernung d von Schwerpunkt und Stützpunkt. *

54. Physikalische Bedingungen. — Andere Bedingungen beziehen sich mehr auf die Ausführung, die Dauerhaftigkeit und Benutzung der Wage. Um möglichst leicht und unbiegsam zu sein, erhält der Balken eine in der Mitte verstärkte, an den Enden auslaufende Gestalt. Da alles Putzen die Richtigkeit der Wage gefährdet, muss der Balken aus einem der Wärme und Feuchtigkeit widerstehenden Metalle bestehen, gewöhnlich Messing, das bisweilen vergoldet oder platinirt wird. Der Stützpunkt und die Aufhängepunkte bedürfen hinlänglicher Stärke und möglicher Beweglichkeit und erhalten daher die Gestalt von Schneiden, die, so wie die Unterlagen derselben, aus hartem Stahle hergestellt werden. Ueberdiess sind bewegliche Träger angebracht, die Schneiden während des Nichtgebrauchs zu schonen. Ein langer Zeiger lässt das Spiel der Wage erkennen, indem man entweder das ruhige Einstehen desselben oder, genauer, die Mitte seiner Schwingungen beobachtet. Beim Gebrauche achte man auf die richtige Stellung und den Parallelismus der Schneiden, die horizontale Lage der Unterstützungsfläche, vermeide alle Erschütterungen und Luftbewegungen, die zu starken Belastungen, die plötzlichen Aenderungen der Belastung, die ungleiche Erwärmung der Arme u. s. f.

Die häufigsten Fehler der Wägungen im Verkehr rühren von Ungleichheit der Arme oder der Schalen her, indem ein leichterer Körper an dem längern Arme oder auf der schwerern Schale nur durch grössere Gewichtssteine abgewogen wird. Durch Umtauschen von Waare und Gewicht entdeckt man den Fehler. — Bei sehr genauer Wägung wird auf gleicher Schale gewogen, ein Verfahren, das von allen Fehlern der Wage, hinlängliche Beweglichkeit vorausgesetzt, unabhängig ist. Erst bringt man den Körper durch Hüllsgewichte (Sand, Schrot z. B.) ins Gleichgewicht und ersetzt denselben nachher, ohne Berührung der andern Schale durch die erforderlichen Gewichtsteine, welche beim Wiedereinspielen offenbar das Gewicht des Körpers darstellen.

In Folge der unvermeidlichen Reibung an der Schneide sind in der Regel die Wagen bei grosser Belastung unempfindlicher als bei kleiner. Daher schätzt man die Genauigkeit einer Wage nach dem Verhältniss der kleinsten bemerkbaren Ueberlast zu der grössten erlaubten Belastung. Eine gute physikalische Wage soll 1 Kil. tragen und dabei 1 Milligr. oder 1 Milliontel anzeigen können.

55. Andere Hebelwagen. — Ausser durch veränderliche Gewichtsteine lässt sich das Gewicht eines Körpers noch auf andere Weise

beurtheilen: 1) aus der Aenderung der Entfernung eines gleichen Gewichtes, 2) durch Beobachtung des Ausschlagwinkels. Daraus ergeben sich zwei andere Arten von Hebelwagen, die indess weniger für wissenschaftliche, als für Zwecke des gewöhnlichen Lebens verwendet werden.

1. Die Schnellwage (Fig 25), an welcher die Waare von einem kurzen unveränderlichen Arme $a c$ getragen, der unveränderliche Gewichtsstein Q (Läufer) aber längs des andern langen Armes $b c$ verschoben wird. Man bildet die Eintheilung durch Abwägen zweier bekannten Lasten p und p' , da dann der Zwischenraum beider Stellungen des Läufers in $p - p'$ gleiche Theile eingetheilt wird. Gleiche Zunahmen der Lasten entsprechen offenbar gleichen Zunahmen der Entfernung.

2. Die Zeiger- oder Sortirwage besteht aus einem massiven Zeiger $b c$ (Eig. 26), welcher den einen Arm darstellt und bei unbelasteter Wage vertical auf den Nullpunkt d einer kreisförmigen Theilung weist. Durch Anhängen der Waare P an den Punkt a dreht sich der Zeiger, bis sein eigenes Moment demjenigen der Waare gleichkömmt, wobei die Eintheilung das gesuchte Gewicht angibt. Auch hier wird die Eintheilung durch Versuche gebildet und zwar, weil die Theile ungleich ausfallen, durch Anwendung einer Reihe bekannter Gewichte:

Der früher (53) gegebene Ausdruck für den Ausschlag gibt hier

$$P = Q \frac{d}{l} \operatorname{tg} \alpha$$

wo Q , d , l das Gewicht der Wage, die Entfernung ihres Schwerpunktes vom Stützpunkte und die Länge des Armes für die Last, drei unveränderliche Grössen, bezeichnen. Hiernach muss die Eintheilung nach der Tangente des Ausschlagwinkels gebildet werden.

3. Die Brückenwagen, bestimmt, grosse Lasten mit Hülfe kleiner Gewichte zu wägen, sind aus mehrern Hebeln zusammengesetzt. Die gebräuchlichste ist die Decimalwage (Fig. 27), die aus 3 Hebeln besteht. Der erste $a b$ (Stützpunkt c) trägt einerseits die Gewichtssteine P , anderseits den Druck der beiden andern Hebel $d e$ (Stützpunkt e) und $f g$ (Stützpunkt g), von denen der erstere den Stützpunkt des zweiten hält, dieser aber die Brücke für die Last bildet. Man kann leicht die Verhältnisse so combiniren, dass das Gewicht $1/10$ der Last ist, die Brücke sich parallel bewegt und die Stelle der Last auf derselben gleichgültig erscheint.

Seien am ersten Hebel l , m , n die Entfernungen (vom Stützpunkte) des Gewichtes P und der vom zweiten und dritten Hebel ausgehenden Kräfte p und q . Man muss haben

$$P = p \frac{m}{l} + q \frac{n}{l}$$

Am dritten Hebel sei n'' die Entfernung der Last Q (Verticale ihres Schwerpunktes), m'' diejenige von q . Die Kraft q und der Druck q' auf den Stützpunkt werden sein

$$q = Q \frac{n''}{m''} \text{ und } q' = Q \frac{m'' - n''}{m''}$$

Am zweiten Hebel endlich wirke p in der Entfernung m' , q' in derjenigen n' ; man erhält

$$p = q' \frac{n'}{m'} = Q \frac{n'}{m'} \cdot \frac{m'' - n''}{m''}$$

Die Werthe von p und q in den Ausdruck von P eingeführt, geben

$$P = \frac{Q}{l \cdot m''} \left[n n'' + (m'' - n'') \frac{m \cdot n'}{m'} \right]$$

Soll die Brücke horizontal bleiben, so müssen die Angriffspunkte von q und q' sich gleich bewegen oder es muss $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$. Es bleibt

$$P = Q \frac{n}{l}$$

Da n'' aus der Formel gefallen ist, hat der Ort der Last auf der Brücke keinen Einfluss mehr. In der Decimalwage endlich ist $n = \frac{1}{10} l$.

56. Rollen und Rollenverbindungen. — Eine um ihren Mittelpunkt a drehbare Scheibe (Fig. 28), von einer Hülse b gehalten und von einem Seile umschlungen, an dem Kräfte P und Q ziehend wirken, heisst eine Rolle. Da die Entfernungen m, n der beiden Kräfte vom Stützpunkte gleich sind, so ändert eine einfache Rolle weder die Stärke einer Kraft, noch die Geschwindigkeit ihrer Angriffspunkte, kann also einzig zur Aenderung ihrer Richtung dienen. Den Druck auf die Axe stellt die Resultirende der beiden gleichen Kräfte dar (41).

Durch Verbindung mehrerer fester und beweglicher Rollen setzt man die zum Heben schwerer Lasten viel benützten Rollen- und Flaschenzüge zusammen.

Im Rollenzug (Fig. 29) hängt eine Reihe beweglicher Rollen $a, a', a'' \dots$ an Seilen, welche einerseits in $b, b', b'' \dots$ an einem festen Gegenstande, anderseits je an der Hülse der vorhergehenden Rolle befestigt sind: Die Kraft P wirkt am ersten Seile, während die Last Q an der letzten Hülse hängt. Da, wie leicht zu ersehen, jede bewegliche Rolle die erforderliche Kraft P auf die Hälfte vermindert, so bedarf es für n solchen Rollen einer Kraft

$$P = \frac{Q}{2^n}$$

Der Flaschenzug (Fig. 30) besteht aus einer festen und einer beweglichen Flasche (Kloben) A und B , jede aus mehreren von einer Hülse gefassten Rollen gebildet. Beide Flaschen werden durch ein einziges Seil verbunden, das mit dem einen Ende an einer der Hülsen befestigt ist, sich dann nach der Reihe um alle Rollen schlingt und mit seinem andern Ende der Kraft als Angriffspunkt dient. Sind n Rollen vorhanden, so wird die an der untern Flasche hängende Last von n gleichgespannten Seilstücken getragen, wesshalb man erhält

$$P = \frac{1}{n} Q$$

Auch bei diesen zusammengesetzten Rollenverbindungen wird in gleichem Verhältnisse, wie man Kraft gewinnt, Geschwindigkeit verloren.

57. Räder und Wellen. — Eine andere zur Vergrößerung der Kraft dienende Vorrichtung ist das Wellrad (Fig. 31). Die Kraft P wirkt an dem Radius R eines Rades A , die Last Q , mittelst eines sich aufwindenden Seiles an dem Radius r der Welle B . Das Gleichgewicht verlangt, dass

$$P = \frac{r}{R} \cdot Q$$

dass Kraft und Last sich wie die Radien von Welle und Rad verhalten.

Der Grundsatz des Wellrades findet seine Anwendung in den Kurbeln, Krummzapfen, Kreuz- und Radhaspeln, Winden, Göpeln, Tret- und Wasserrädern u. s. f., kurz in zahlreichen Vorrichtungen, die sich nur durch ihren Zweck, die Natur der Kraft und die Stellung der Welle unterscheiden.

Um einen grossen Kraftgewinn zu erhalten, ohne die Welle zu sehr zu schwächen oder das Rad unmässig gross zu machen, lässt man die Last Q an einer Differenzialwelle (Fig. 32) wirken, die aus zwei mit ihren Radien r und r' wenig abweichenden Welltheilen besteht. Das Seil windet sich vom kleinen Radius r' ab, während es sich auf dem grössern r aufwindet. Man findet aus der Gleichheit der Momente

$$P = \frac{1}{2} \frac{r - r'}{R} \cdot Q$$

und es hängt das Verhältniss von P zu Q von der Grösse $r - r'$ ab, die man beliebig verkleinern kann.

58. Zahnräder. — Die Mittheilung und Umwandlung drehender Bewegungen von einer Welle zur andern geschieht gewöhnlich durch das Mittel der Zahnräder (Fig. 33). Jede Welle trägt ein grösseres Rad und ein kleineres Getriebe, und greift mit ersterem in das Getriebe einer frühern, mit letzterem in das Rad einer spätern Welle ein. Die beiden ineinandergreifenden Theile haben nothwendig gleiche Zähne, deren Zahl sich wie die Umfänge oder wie die Radien verhalten wird. Die Umlaufszeiten zweier sich folgenden Wellen werden sich verhalten wie die Zahl der Zähne der ineinandergreifenden Theile.

Nennt man $R, r; R', r'; R'', r'' \dots$ die Radien der Räder und Getriebe der einzelnen Wellen, P und Q die an dem ersten und letzten Theile wirkenden Kräfte, endlich $p, p' \dots$ den Druck der Zähne aufeinander, so verlangt das Gleichgewicht der einzelnen Wellen

$$\frac{P}{p} = \frac{r}{R}, \frac{p}{p'} = \frac{r'}{R'}, \frac{p'}{p''} = \frac{r''}{R''} \dots$$

woraus durch Multiplication gefunden wird

$$\frac{P}{Q} = \frac{r \cdot r' \cdot r'' \dots}{R \cdot R' \cdot R'' \dots}$$

Die Kraft verhält sich zur Last, wie das Produkt der Radien aller Getriebe (oder Wellen) zu demjenigen aller Radien der Räder. Solche Vorrichtungen, aus zusammengesetzten Hebeln gebildet, verschaffen daher einen ungeheuren Kraftgewinn, freilich wie immer auf Unkosten der Geschwindigkeit.

Sind $n, N; n', N'; \dots$ die Anzahl Zähne je der zusammengehörenden Getriebe und Räder, t, T die Umlaufszeiten der ersten und letzten Welle, so findet man auf ähnlichem Weg,

$$\frac{t}{T} = \frac{n \cdot n' \cdot n'' \dots}{N \cdot N' \cdot N'' \dots}$$

Die Umlaufszeiten der ersten und letzten Welle verhalten sich wie die Produkte der Zähne aller Getriebe, zu dem der Zähne aller Räder.

Nach diesen Grundsätzen z. B. bestimmt man die Zahl der Zähne in einem Uhrwerke. Da der Secundenzeiger 1 Umlauf in 1 Minute, der Minutenzeiger in 1 Stunde oder 60 Minuten, der Stundenzeiger in 12 Stunden oder 720 Minuten zu vollenden hat, so genügen folgende Räder:

Steig oder Secundenrad	Getriebe	10 Z.	Umlauf	1 Min.
Mittelrad Rad 80 Z	»	12 »	»	8 »
Minutenrad » 90 »	»	12 »	»	60 »
Wechselrad » 36 »	»	12 »	»	180 »
Stundenrad » 48 »	»	— »	»	720 »

Cap. 4. Maschinen mit Gleiten.

59. Die schiefe Ebene. — Wie der Hebel den Grundsatz der ersten Classe einfacher Maschinen am einfachsten darstellt, so die schiefe Ebene denjenigen der zweiten.

Auf einer solchen Ebene (Fig. 34), zur Horizontalen um den Winkel α geneigt, ruht leicht beweglich ein Körper, dessen am Schwerpunkte befestigtes Gewicht P sei. Diess Gewicht zerlegt sich in eine Kraft p längs der Länge l der schiefen Ebene, die das Gleiten bewirkt, und in einen Druck q senkrecht zu derselben. Die Aehnlichkeit der Dreiecke aus der Kraftzerlegung mit demjenigen der schiefen Ebene gibt

$$p = P \sin \alpha = P \frac{h}{l}, \quad q = P \cos \alpha = P \frac{b}{l}$$

wenn h und b die Höhe und Basis der schiefen Ebene bezeichnen. Die erste Kraft verhält sich zur ganzen, wie die Höhe, die zweite wie die Basis sich zu ihrer Länge verhält.

Den Körper zu halten, bedarf es parallel mit l einer mit p gleichgrossen Gegenkraft. — Oft auch hält man den Körper durch eine der Basis parallele Kraft p' , die sich aus der Bedingung bestimmt, längs l eine Theilkraft gleich p zu liefern

$$p' = p \frac{1}{\cos \alpha} = P \operatorname{tg} \alpha = P \frac{h}{b}$$

Sie verhält sich zur ganzen Kraft wie die Höhe zur Basis, übersteigt also P , sobald die Neigung α mehr als 45° beträgt. Gleichzeitig wird der Druck vermehrt um

$$q' = p \operatorname{tg} \alpha = P \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$$

und wird im ganzen

$$q + q' = P \left(\cos \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) = P \frac{1}{\cos \alpha}$$

Gleitet der Körper längs der Fläche mit der Geschwindigkeit u , so ist die Theilgeschwindigkeit nach der Richtung von P , $u \sin \alpha$; also auch hier verhalten sich die Geschwindigkeiten nach der

Richtung der Kräfte (Projektionen auf die Krafrichtungen) verkehrt wie die Kräfte.

Wirken zwei Kräfte P und Q auf einen des Gleitens fähigen Körper, unter Winkeln α , β mit seiner Unterlage, und sollen sich ihre gegenseitigen Wirkungen aufheben, so müssen sie 1) in Eine zur Unterlage senkrechte Ebene fallen und 2) derselben parallel, gleiche Theilkräfte liefern

$$P \cos \alpha = Q \cos \beta.$$

wobei gleichzeitig ein Druck $P \sin \alpha + Q \sin \beta$ entsteht.

Jede ansteigende Strasse kann als Beispiel der einfachen schiefen Ebene dienen, da dann das Verhältniss der Steigung das Verhältniss der Mehranstrengung der Pferde zur ganzen Wagenlast bezeichnet.

60. Die Schraube. — Eine Schraubenlinie entsteht durch Aufrollen eines Dreieckes auf einen Cylinder. Die Seitenfläche des Gewindes (Fig. 35) wird alsdann eine schiefe Ebene darstellen, auf welcher die gleich- aber hohlgeschnittene Mutter gleiten kann und bei jeder Umdrehung um die Höhe des Schraubenganges vorrückt. Bezeichnet P die drehende Kraft, welche am Umfange u , oder parallel der Basis der schiefen Ebene, wirkt, Q den nach der Länge der Spindel wirkenden Druck, so erhält man nach (59)

$$\frac{P}{Q} = \frac{h}{u} = \frac{h}{2\pi r}.$$

Je grösser der Umfang $u = 2\pi r$ der Spindel im Vergleich zu der Höhe h der Windungen, desto grösser wird die drückende Kraft im Verhältniss zu der drehenden. Der Gewinn in dieser Beziehung verwandelt sich in einen Verlust, wenn die Höhe den Umfang übersteigt.

Wie Kraft gewonnen wird, wird aber Geschwindigkeit verloren, da der Angriffspunkt der drehenden Kraft in der gleichen Zeit den Umfang durchläuft, in welcher der Angriffspunkt der drückenden oder das Ende der Schraube um die Höhe der Windungen vorrückt. *

51. Anwendungen der Schraube. — Wir heben nur zwei derselben hervor:

1. Die Schraubenpresse, in welcher die drehende Kraft P zum Zwecke einer noch grössern Vermehrung des Druckes Q , statt an dem Radius r der Spindel (Fig. 36), nach dem Grundsatz des Wellrades in einer Entfernung l von der Spindelaxe angebracht wird. Bezeichnet p die entsprechende Kraft an der Spindel, so hat man zugleich

$$\frac{P}{p} = \frac{r}{l} \quad \text{und} \quad \frac{p}{Q} = \frac{h}{u}$$

also, da $u = 2\pi r$,

$$\frac{P}{Q} = \frac{h}{2\pi l}$$

was der Wirkung einer einfachen Schraube von dem Radius l entspricht, gleichviel, welche Dicke die Spindel hat.

Die Schraubenpressen sind die gebräuchlichsten und bequemsten,

wenn auch nicht die kräftigsten Mittel mit einer kleinen Kraft einen grossen Druck hervorzubringen.

2. Die Schraube ohne Ende. (Fig. 37). Ein zweikantiges Schraubengewinde wird häufig benutzt, um in die schiefgeschnittenen Zähne eines Rades einzugreifen und dadurch eine Welle in Bewegung zu setzen. Es bestehe z. B. eine Maschine aus einer Schraube, deren Umfang $2\pi r$ und Höhe der Windungen h sei. Einerseits werde sie mittelst einer Kurbel von der Länge l geführt und greife anderseits in ein Rad vom Radius R ein, an dessen Welle (Radius r') die Last Q hängt. Bezeichnet p die Kraft an der Spindel, die aus derjenigen P der Kurbel hervorgeht, p' den Druck des Zahnes auf das Gewinde, so hat man drei Bedingungen des Gleichgewichtes

$$\frac{P}{p} = \frac{r}{l}, \quad \frac{p}{p'} = \frac{h}{2r\pi}, \quad \frac{p'}{Q} = \frac{r'}{R}$$

welche durch Multiplication geben

$$\frac{P}{Q} = \frac{h \cdot r'}{2\pi l \cdot R}$$

62. Der Keil. — Wenn ein Keil (Fig. 38) zwischen zwei Hindernisse eindringt, so entstehen aus der Kraft P , welche senkrecht auf den Rücken r wirkt, zwei drückende Kräfte Q, Q' senkrecht zu den beiden Seiten s, s' , welche letztern nach dem Grundsatz der Kraftzerlegung nach gegebenen Richtungen zu bestimmen sind (33). Da die aus der Zerlegung hervorgehenden Dreiecke dem Dreieck des ganzen Keiles ähnlich sind (ihre Seiten stehen senkrecht zu einander), so erhält man, wenn α, β, β' die Winkel sind, die r, s, s' gegenüber liegen,

$$\frac{Q}{P} = \frac{s}{r} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad \frac{Q'}{P} = \frac{s'}{r} = \frac{\sin \beta'}{\sin \alpha}$$

ferner

$$P = Q \cos \beta' + Q' \cos \beta$$

Die nach den Seiten wirkenden Kräfte verhalten sich zu den am Rücken, wie die Seiten zum Rücken. Der Seitendruck wird also um so stärker, je schärfer der Keil ist, was das leichte Eindringen der schneidenden Instrumente erklärt. Hat die Schärfe 60° oder mehr, so verschafft der Keil keinen Gewinn, sondern einen Verlust an Kraft. Im Hobel ist der Keil mit der schiefen Ebene, im Bohrer mit der Schraube verbunden.

Rückt der Keil vor um a, b und bezeichnen u, v, v' , die kleinen Verschiebungen oder Geschwindigkeiten nach der Richtung der Kräfte P, Q, Q' , so hat man aus der Figur $v = u \cos \beta', v' = u \cos \beta$, folglich wird der obige Ausdruck von P

$$P \cdot u = Q v + Q' v'$$

Die Produkte der beiden Seitenkräfte mit den zugehörigen Geschwindigkeiten sind zusammen gleich demjenigen der am Rücken wirkenden Kraft.

63. Allgemeine Bemerkungen. — Aus den gegebenen Beispielen erbellt, dass das Gleichgewicht der Maschinen vorzüglich von den drei Grundsätzen 1) der Versetzung des Angriffspunktes; 2) der Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte, endlich 3) der statischen Momente abhängt. Diese Grund-

sätze beherrschen überhaupt die ganze Statik der festen Körper und führen bei der praktischen Benutzung der letztern (bei Seilpolygonen, Hängebrücken, Balken und Sparrwerken, Stützmauern, Steingewölbe u. s. f.) auf die Bestimmung der Kräfte, denen sie ausgesetzt und zu widerstehen bestimmt sind. Die einfachen Bedingungen werden in der Wirklichkeit jedoch durch Reibungen und andere Hindernisse modifizirt, welche ohne Störung des Gleichgewichtes einen gewissen Spielraum der Kräfte gestatten. Bei den Maschinen mit grossem Druck, wie Schraube und Keil, wird dieser Spielraum sogar ungemein gross.

2. Ferner ergab sich, dass das Verhältniss von Kraft und Last an einer einfachen Maschine stets ein bestimmtes, durch die Dimensionen derselben vorgeschriebenes sei. Besteht eine Maschine aus einer Reihe auf einander wirkender einfacher Theile, so verlangt das Gleichgewicht des Ganzen, dass auch jeder einzelne Theil im Gleichgewicht sei. Bezeichnen also P , Q die erste und letzte Kraft, p , p' , p'' . . . die von Theil zu Theil wirkenden Kräfte, so lassen sich eben so viele Verhältnisse $\frac{P}{p}$, $\frac{p}{p'}$, $\frac{p'}{p''}$. . . aufstellen als Theile da sind. In richtiger Ordnung geschrieben, ergibt die Multiplication das gesuchte Verhältniss $\frac{P}{Q}$ aus lauter gegebenen Grössen, Dimensionen der Maschinentheile.

3. Wird die Maschine um ein Geringes bewegt, so machen die Angriffspunkte von P und Q im ersten Augenblick Verschiebungen oder haben Geschwindigkeiten u , v , welche, nach der Richtung der Kräfte gemessen, gleichfalls von den Dimensionen der Maschine vorgeschrieben sind und sich den Kräften umgekehrt verhalten. Die Produkte beider Grössen, auf der einen und andern Seite sind gleich, nur dass beim einen die Verschiebung im Sinne der Kraft, beim andern der Kraft entgegen statt gefunden hat.

4. Diese letztere Beziehung ist ein spezieller Fall des Satzes von den virtuellen Geschwindigkeiten, der für das Gleichgewicht einer jeden Verbindung fester Körper, auf welche Kräfte wirken, Gültigkeit hat. Macht das Ganze nämlich eine kleine Bewegung, und bildet man die Produkte aller Kräfte p mit der kleinen Verschiebung oder virtuellen Geschwindigkeit ihrer Angriffspunkte, nach der Richtung der Kraft gemessen, wobei man diese Produkte $+$ oder $-$ nimmt, je nachdem Kraft und Verschiebung gleichen oder entgegengesetzten Sinn haben, so hat man

$$S(pu) = 0$$

Die zwischen den Theilen wirkenden Kräfte fallen weg, weil sie wegen der Gleichheit von Action und Reaction (37) gleiche aber ungleichnamige Produkte liefern.

5. Das Produkt pu kann man nach (49) als die für den ersten Augenblick der Bewegung geltende (virtuelle) Arbeitsgrösse betrachten. Dann heisst der Satz einfach: die gewonnene und verlorne Arbeitsgrösse sämmtlicher Kräfte ist gleich.

Cap. 5. Fall und Wurfbewegung.

64. Der freie Fall. — Wegen der beständig gleichen Wirkung der Schwere (46) muss die ungestörte Fallbewegung eine gleichmässig beschleunigte werden, welche den Hauptgesetzen (26)

$$u = gt \quad (1), \quad s = \frac{1}{2} gt^2 \quad (2)$$

folgt. Die Geschwindigkeit u wächst wie die Zeit t , der durchlaufene Weg s wie das Quadrat der Zeit. Beide Grössen lassen sich aus der Zeit berechnen, wenn die für alle Körper gleiche Beschleunigung g (gegen 980,6 Centimeter) bekannt ist.

Von den drei Grössen Geschwindigkeit, Weg und Zeit lassen sich überhaupt zwei aus der dritten berechnen. Man erhält so aus u

$$t = \frac{u}{g}, \quad s = \frac{u^2}{2g}$$

aus s $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}, \quad u = \sqrt{2gs}$

Ist ein Körper t Secunden gefallen, so hat er den Weg $\frac{1}{2} g t^2$ durchlaufen und die Geschwindigkeit $g t$ gewonnen. Bleibt nun die Geschwindigkeit während neuen t Sec. unverändert, so wird ein zweiter Weg $g t^2$ zurückgelegt. Daher der Satz: dass die Fallhöhe die Hälfte des Weges ist, der mit der gewonnenen Geschwindigkeit in gleicher Zeit gleichförmig zurückgelegt würde.

Ändert sich g , so ändern sich Geschwindigkeit und Weg im gleichen Verhältniss. Aus der Verschiedenheit der Wege würde man also die Änderungen der Schwere entdecken, was mit Hülfe der Wage unmöglich wäre. *

65. Die Atwood'sche Fallmaschine. — Die Fallgesetze wurden von Galilei (1602) aus dem richtig aufgefassten Begriff einer beständig wirkenden Kraft abgeleitet, allein sie bedurften, wie alle Theorien in der Physik, einer Bestätigung durch die Beobachtung. Da indess der freie Fall zu schnell abläuft, um vom Auge gehörig verfolgt zu werden, so wurden Mittel gesucht, denselben zu verlangsamen, ohne die Constanz der Kraft zu gefährden. Galilei selbst wandte hierzu eine schiefgestellte Rinne von 25 Fuss Länge an, auf welcher nach dem Gesetze der schiefen Ebene (59), bei einer Neigung α , die constante Beschleunigung statt g , nur

$$g' = g \sin \alpha$$

war. Der Weg herabrollender Kugeln folgte nahe dem Quadrate der Zeit.

Gegenwärtig bedient man sich gewöhnlich der Atwood'schen Fallmaschine, in welcher die Beschleunigung g dadurch vermindert wird, dass man nach dem Grundsatz der Bewegungsmitteltheilung (34), die Kraft des fallenden Körpers benutzt, eine grössere Masse fortzuführen. Sei m seine eigene Masse (oder auch Gewicht), M die mitgeführte, so wird die Bewegungsmenge $m g$ einer Secunde, auf die Masse $M + m$ übertragen, eine Beschleunigung

$$g' = \frac{m}{M + m} \cdot g$$

erzeugen, welche durch Verkleinerung von m gegenüber von M beliebig klein gemacht werden kann, ohne während des Falles zu variiren.

Die Maschine (Fig. 39) besteht aus einem möglichst beweglichen und leichten Rädchen a , über welches ein Faden geht, der an beiden Enden gleiche Gewichte b, b' trägt, die sich das Gleichgewicht halten. Die Bewegung wird nur durch Auflegen eines kleinen Uebergewichtes c auf b hervorgebracht, so dass die Wirkung der Schwere auf c die einzige bewegende Kraft der Gewichte b, b' und des Rädchens ist. Das Uebergewicht stellt m dar, die andern bewegten Theile die Masse M . Ein Pendel oder Schlagwerk lässt die Secunden von dem Augenblicke an zählen, da die Bewegung beginnt, während das Auge auf einer

verticalen Eintheilung die in 1, 2, 3 . . . Secunden (oder beliebigen Zeiträumen) durchlaufenen Wege beobachtet.

Wegen des Rädchens ist M nicht unmittelbar bekannt, kann aber bestimmt werden, wenn man die in gleicher Zeit durchlaufenen Wege g' , g'' für zwei Uebergewichte m' und m'' beobachtet. Aus den beiden Gleichungen

$$m' g = (M + m') g', \quad m'' g = (M + m'') g''$$

erhält man nach Elimination von g

$$M = \frac{m' m'' (g'' - g')}{m'' g' - m' g''} \quad \text{und} \quad g = \frac{(m'' - m') g' g''}{m'' g' - m' g''}$$

Die einfache Prüfung der Beziehung von Weg und Zeit setzt indess die Kenntniss von M nicht voraus; wohl aber wäre sie nothwendig, wollte man g aus g' bestimmen — eine Bestimmung, die jedoch auf anderem Wege genauer erhalten wird.

Die Nebenfigur (Fig. 39) stellt einen der Mechanismen dar, durch welche der Fall des Gewichtes b auf einen bestimmten Augenblick der Zeigerbewegung eingeleitet werden kann. Die Pendelauslösung d setzt das Rad c in Bewegung, damit die Scheibe f mit Spiralrand. Wenn der an denselben stützende Hebel gh vom Spiralrande abspringt, hört die Unterstützung des Gewichtes b auf und der Fall beginnt. Der mit einem Arme versehene Stift i wird weggedreht, wenn der Augenblick des Fallbeginnes nahe rückt. k , l , m stellen die fallenden Gewichte, den Ring und das Stabgewicht für die zweite Benutzung der Maschine dar. *

66. Andere Fallversuche. — 1) Statt den Weg für bestimmte Zeiten zu beobachten, hat man auch, umgekehrt, für vorbestimmte Wege die Zeiten gemessen. Grimaldi und Andere liessen in Thürmen Körper herabfallen und zählten die Secunden vom Ausgang des Körpers bis zu seinem Aufschlagen. Die Unsicherheit rührt hier von der Unmöglichkeit her, kleinere Zeittheilchen als etwa $\frac{1}{4}$ Sec. direkt zu beurtheilen, welchem Zeitraume bei schneller Bewegung bereits bedeutende Wege entsprechen. Erst in neuester Zeit hat diese Messung durch Benutzung des Chronoscops von Hipp (15) grössere Schärfe erhalten. Schon an Fallhöhen von einigen Fussen und weniger lässt sich das Gesetz prüfen.

2) Betrachtet man t als eine zu s senkrechte, daher horizontale Coordinate, so stellt die Gleichung

$$t^2 = \frac{2}{g} \cdot s$$

eine Parabel dar, deren Scheitel im Ausgangspunkte liegt und deren Axe der Richtung der Schwere folgt. Darauf hat Morin eine graphische Prüfung des Fallgesetzes gegründet (Fig. 40). Der längs einem Drahte fallende schwere Körper a führt rückwärts einen weichen Zeichenstift, der einem verticalen, durch Wirkung eines Uhrwerkes oder eines regulirten fallenden Gewichtes gleichförmig drehenden Papiercylinder b folgt. Während des Falles dreht sich der Cylinder um Winkel, die mit t proportional wachsen. Die gezeichnete Curve wird s zur verticalen Abscisse, den mit t proportionalen Bogen aber zur horizontalen Ordinate haben, und bewährt sich beim Aufrollen des Papiers als Parabel.

Solche graphische Darstellungen auf bewegten Papierflächen

sind in neuerer Zeit überhaupt ein höchst wichtiges Mittel geworden, den unbekannten Verlauf einer Erscheinung bildlich und im Zusammenhang darzustellen, auf eine von den Fehlern der direkten Beobachtung unabhängige Weise.

67. Der verticale Wurf. — Die Wurfbewegung entsteht aus der stetigen Wirkung der Schwere auf einen durch eine anfängliche Wurf- oder Triebkraft in Bewegung gesetzten freien Körper. Beim verticalen Wurf theilt diese Kraft vertical eine bestimmte Anfangsgeschwindigkeit U mit, welche ohne Schwere sich gleich erhielte (16), unter ihrem Einflusse aber gleichmässig verzögert abnimmt, in jeder Secunde nämlich um die von der Schwere nach unten mitgetheilte Geschwindigkeit g (980,6 Centim.). Die Geschwindigkeit U und der Weg $U \cdot t$, ohne Schwere, werden also durch ihre Wirkung verändert werden in

$$u = U - gt \quad (1), \quad s = Ut - \frac{1}{2}gt^2 \quad (2)$$

Die Zeit t wachsend, erschöpft sich die Geschwindigkeit allmählig, der Körper erreicht für $u = 0$ einen höchsten Punkt und bewegt sich von da freifallend zur Erde herab. Da, wegen der Constanz der Schwere, die steigende und sinkende Bewegung mit umgekehrtem Gange, gleich vor sich gehen, so wird unten die Geschwindigkeit U wieder gewonnen. Die Höhe des Wurfs H und die dazu gehörende Zeit T werden diejenigen sein, welche beim freien Falle der Geschwindigkeit U zugehören (64)

$$T = \frac{U}{g} \quad (3), \quad H = \frac{U^2}{2g} \quad (4)$$

Nach diesen Grössen wird beim Wurfe gewöhnlich gefragt.

Wäre die Anfangsgeschwindigkeit U vertical niederwärts gerichtet, so erhalten in den obigen Ausdrücken U und g gleiches Zeichen und die wahre Bewegung, statt die Differenz einer gleichförmigen und gleichmässig beschleunigten Bewegung, wird die Summe derselben sein.

68. Der schiefe Wurf. — Dieser entsteht aus einer zur Horizontalen geneigten Anfangsgeschwindigkeit, deren gleichförmige Bewegung von der beschleunigten der Schwere verändert wird. Auf diese Vorstellung gründet sich das Verfahren zum Zeichnen der Wurflinie. Bezeichnen (Fig. 41) $b', b'', b''' \dots$ die Punkte, wohin, ohne Schwere, der Körper in 1, 2, 3 $\dots$ Sec. gelangen würde, so wird ihn die Schwere um $1, 4, 9 \dots \times \frac{g}{2}$ tiefer herabgezogen haben und die Curve gezogen, durch die so bestimmten Punkte $c', c'', c''' \dots$ wird die Wurflinie darstellen.

Leichter aber übersieht man die Erscheinung, wenn man die Bewegung auf eine horizontale und verticale zurückführt. Bezeichnet α (Fig. 41), gemäss einer in der Ballistik üblichen Benennung, die Elevation des Wurfs, so zerlegt sich die Anfangsgeschwindigkeit U in

eine horizontale $U' = U \cos \alpha$ und eine Verticale $U'' = U \sin \alpha$. Jene, von der Schwere unberührt, bewirkt horizontal ein gleichförmiges Fortrücken der Kugel; diese, ihr ganz ausgesetzt, einen verticalen Wurf, der vorerst aufwärts gleichmässig verzögert, dann, jenseits der grössten Höhe, niederwärts gleichmässig beschleunigt vor sich geht.

Die Wurfhöhe H und zugehörige Zeit T werden also (67) sein

$$T = \frac{U''}{g} = \frac{U \sin \alpha}{g} \quad (1), \quad H = \frac{U''^2}{2g} = \frac{U^2 \sin^2 \alpha}{2g} \quad (2)$$

Da der Körper sinkt, wie er umgekehrt gestiegen, horizontal aber unverändert fortgeht, so muss sich der zweite Schenkel umgekehrt gleich gestalten wie der erste, eine gleiche Zeit T in Anspruch nehmen, und unter dem gleichen Winkel α die Horizontale erreichen. Die Wurfweite W wird nunmehr aus der constanten Geschwindigkeit U' während der Zeit $2T$ hervorgehen, also sein

$$W = \frac{U' U''}{g} = \frac{U^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad (3)$$

Beide Grössen, Wurfhöhe H und Wurfweite W , wachsen mit dem Quadrate der Anfangsgeschwindigkeit U , beide auch ändern sich, doch auf verschiedene Weise, mit der Elevation α . Die erste nämlich wächst beständig mit α bis 90° ; die letztere nur bis $\alpha = 45^\circ$, von welchem Werthe sie sich wieder vermindert und bei $\alpha = 90^\circ$ Null wird. Demnach erreicht die Kugel das entfernteste Ziel mit 45° , jedes nähere aber mittelst einer hohen und einer flachen Bahn, nämlich mit zwei Elevationen die oberhalb und unterhalb gleich von jenem Winkel abstehen.

Die Wurflinie übrigeus ergibt sich, wenn vom höchsten Punkte aus die verticalen Abscissen mit x , die horizontalen Ordinaten mit y bezeichnet werden, aus

$$x = \frac{g}{2} t^2, \quad y = U \cos \alpha t$$

durch Elimination von t . Man erhält so die Curvengleichung

$$y^2 = \frac{2 U^2 \cos^2 \alpha}{g} \cdot x \quad (4)$$

welche einer Parabel mit verticaler Axe vom Parameter $\frac{2 U^2 \cos^2 \alpha}{g}$ entspricht.

Der Artilleriewissenschaft sind die Gesetze des Wurfes besonders wichtig. Für hohe Elevationen und eine zerstörende Wirkung von oben dienen Mörser; für mittlere, namentlich zum Ricochetiren, Haubitzen; endlich für flache Bahnen mit grosser Geschwindigkeit zu seitlicher Zerstörung, eigentliche Kanonen.

69. Einfluss des Luftwiderstandes. — Die theoretischen Gesetze des Falles und Wurfes werden in der Wirklichkeit durch den Widerstand der Luft, oft bedeutend, verändert und zwar, Gestalt des Körpers und Geschwindigkeit gleich angenommen, um so mehr, je geringer die Menge Bewegung oder die Masse des Körpers ist. Es rührt dieser Widerstand, der in jedem Augenblick einen Theil der bewegenden Kraft als Druck in Anspruch nimmt, von der Zusammenpressung, der Seiten-

verschiebung und der Reibung der Luft her, ändert mit der Gestalt, der Oberfläche und der Geschwindigkeit des Körpers und lässt sich, dieser vielen Umstände willen, selten genau in Rechnung bringen.

Indem, an dem nämlichen Körper, der Widerstand jedenfalls mit der Geschwindigkeit wächst, verwandelt sich beim freien Fall die gleichmässige in eine abnehmend beschleunigte Bewegung (26) und zuletzt, wenn das Hinderniss der ganzen Wirkung der Schwere, d. h. dem Gewichte des Körpers gleich geworden ist, in eine gleichförmige (35). Und dieser Zustand tritt um so früher ein, wird mit um so geringerer Geschwindigkeit gewonnen, als der Körper kleiner und im Vergleich mit seiner Grösse leichter ist. Staub und Nebel fallen gleich von Anfang langsam und gleichförmig; Regentropfen und Schlossen schnell und gleichförmig, doch erst nach einer bedeutenden Fallhöhe.

Bei der Wurfbewegung ändert der Widerstand die Gestalt der Curve. Die Bahn der Geschosse im Grossen wird aus den Stellen construirt, in welchen grosse, von dünner Leinwand überspannte Rahmen von der Kugel durchbrochen werden; bei Versuchen im Kleinen ergibt sie sich direkt aus dem Wege eines aufwärts gerichteten Wasser- oder besser Quecksilberstrahles. In beiden Fällen erweist sich die Curve nicht als symmetrisch, sondern neigt mit ihrem zweiten Schenkel früher und steiler zum Boden. Es erklärt sich diess daraus, dass die horizontale Bewegung, einmal erschöpft, sich nicht erneuert, während die verticale durch Wirkung der Schwere unterhalten wird. Natürlich werden Höhe und Weite des Wurfes gleichzeitig kleiner und lassen sich anders nicht als durch Correktion der theoretischen Grössen mittelst direkter Versuche richtig berechnen.

Endlich kann der Widerstand der Luft ein Drehen des Körpers, ein Schwanken um die Fall- oder Wurflinie, bisweilen sogar ein vollständiges Abirren aus seiner Richtung bewirken, wenn Gestalt und Stellung des Körpers Unregelmässigkeiten der Reibung und des Druckes der Luft veranlassen. Durch Drehung des Körpers um die Bahnlinie als Axe hebt man den nachtheiligen Einfluss der Unregelmässigkeiten auf; diese der Kugel mitzutheilen und damit dem Schusse Sicherheit zu geben, ist der Zweck des schwach schraubenförmigen Zuges im Laufe der Büchsen und Järgergewehre.

70. Einfluss der Erddrehung. — Schon die Versuche von Grimaldi, später (1801—3) diejenigen von Benzenberg mit grossen Fallhöhen in Thürmen angestellt, noch später endlich diejenigen von Reich (1831), in einem tiefen Schachte in Freiberg, haben erwiesen, dass ein hoch herab fallender Körper stets etwas östlich von der Richtung des Lothes den Boden trifft. Auf eine Höhe von 185,5 Met. gaben die zahlreichen und sehr genauen Reich'schen Versuche eine Abweichung von 28,396 Millim., auf 1 Met. Höhe eine solche von etwa 0,07 Millim. — Es erklärt sich diese auffallende Thatsache, zufolge welcher die Falllinie nicht genau der Richtung der Schwere folgt, aus der Drehung der Erde. Der obere Punkt des Thurmes beschreibt nämlich einen grössern Kreis als der Fuss, hat also eine grössere hori-

zontale Geschwindigkeit, die dem fallenden Körper von Anfang gegeben wird und ihn während der Zeit des Falles nach Osten, im Sinne der Erddrehung, weiter führt als die Stelle, wohin das Ende des Lothes hingelangt. Nach dieser Theorie berechnet, würde jene Abweichung 27,512 Millim. betragen haben, was die Richtigkeit der Erklärung ausser Zweifel setzt.

Eine Abweichung ähnlicher Art, welche namentlich Poisson theoretisch untersucht hat, veranlasst die Erddrehung an der Flugbahn der Kanonenkugel. Die Kugel, den Lauf verlassend, hat neben der Anfangsgeschwindigkeit des Wurfs noch die östliche Geschwindigkeit ihres Ausgangspunktes. Wird sie genau nach *N* oder *S* getrieben, so erreicht sie den Boden nicht auf dem gleichen Meridiane, weil das Ziel, im ersten Falle sich langsamer, im zweiten sich schneller östlich fortbewegt hat; sie wird in jenem daher nach *O*, in diesem nach *W* abirren. Der Schuss nach Westen und Osten wäre dieser Seitenabweichung nicht unterworfen. Man könnte dieselbe aus der geographischen Breite des Ortes, der Richtung des Schusses, der Wurfzeit und Wurfweite ohne Schwierigkeit berechnen, würde sie nicht neben denen, welche aus der Unregelmässigkeit und besonders, wie Magnus erwiesen hat, aus der Drehung der Kugel und der Einwirkung der Luft hervorgehen, gänzlich verschwinden.

71. Fall auf einer festen Linie. — Wir heben aus den für diesen Fall geltenden Bewegungsgesetzen nur drei wichtigere Sätze hervor.

1) Folgt ein Körper einer schiefen Ebene von der Neigung α , so wird statt g nur der Theil $g' = g \sin \alpha$ der Schwere (59) zur Bewegung einwirken. Der in t Sec. durchlaufene Weg ist also

$$s' = \frac{1}{2} g' t^2 = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2 = h \sin \alpha$$

wenn h die Höhe der schiefen Ebene bezeichnet. Darauf gründet sich der einfache, schon von Galilei erkannte Satz, dass alle in einem Kreise nach dem tiefsten Punkte gezogenen Sehnen a , a' , a'' . . (Fig. 42) in gleicher Zeit wie der Durchmesser b durchlaufen werden.

2) Hat der Körper, einer schiefen Ebene folgend, die Länge l durchlaufen, so besitzt er, da $h = l \sin \alpha$ ist, eine Geschwindigkeit

$$h = \sqrt{2 g' l} = \sqrt{2 g h}$$

die gleiche — abgesehen von der Richtung —, welche beim freien Fall durch h gewonnen würde. Auf welcher schiefen Ebene der Körper auch fällt, die Dauer des Falles kommt der geringern Kraft so weit zu Hülfe, dass der gleichen Höhe stets die gleiche Geschwindigkeit entspricht.

Dieser Satz lässt sich sogar auf jeden gekrümmten Weg ausdehnen, da auf jedem Curvenelement δs dieselbe Geschwindigkeit δu gewonnen wird, wie durch das entsprechende Element δh der Höhe, daher auch die Summe der δu der Summe der δh entspricht. Gleichviel also, auf welchem Wege ein Körper von der Schwere herabgeführt wird, seine Geschwindigkeit ist diejenige des freien Falles durch die zugehörige Höhe.

3) Von einem höhern Punkte kann ein Körper auf sehr verschiedenen Wegen zu einem tiefern seitwärts liegenden gelangen; die Geschwindigkeit wird zwar die gleiche sein, allein die in Anspruch genommene Zeit eine ganz andere. Von allen diesen Wegen ist der gerade keineswegs derjenige der kürzesten Fallzeit; schon der Kreisbogen wird in kürzerer Zeit durchlaufen, die kürzeste jedoch kommt, wie durch höhere Rechnung bewiesen wird, der Cycloide oder Radlinie zu, derjenigen Linie nämlich, welche beim Fortrollen eines Rades von einem bestimmten Punkte seines Umfanges im Raume beschrieben wird.

Nicht nur ist die Cycloide die Linie der kürzesten Fallzeit (Brachystochrone), zugleich auch die der gleichen Fallzeit (Tautochrone). Letztere bleibt nämlich die gleiche, von welchem Punkte der Curve der Körper auch ausgeht, indem der grössere Weg durch die grössere Geschwindigkeit genau compensirt wird.

Sei d der Punkt des Radius, welcher (Fig. 43) von a ausgehend, die Cycloide beschreibt. ab wird dem Bogen bd gleich sein, woraus sich der Werth der Coordinaten $x = ae$ und $y = de$ aus dem Radius r und dem Winkel α leicht ergibt

$$x = ab - eb = r(\cos \alpha - \sin \alpha), \quad y = cb - cf = r(1 - \cos \alpha)$$

Man beweist überdiess, dass zwischen dem Bogen $dg = s$ und der Ordinate $ig = z$ die Beziehung besteht

$$s^2 = 8rz$$

und dass die Fallzeit bis zum tiefsten Punkte g

$$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$$

beträgt. ✱

Cap. 6. Die Pendelbewegung.

72. Das einfache Pendel. — Ein schwerer Körper, der von der Schwere um eine horizontale Axe bewegt wird, heisst ein Pendel. Wir wollen zuerst das einfache Pendel betrachten, gebildet von einem schweren Punkte m (Fig. 44), der durch eine unveränderliche Linie L mit dem Drehpunkte a verbunden ist.

Entfernt man das Pendel aus seiner verticalen Gleichgewichtslage um den Winkel α , die Elongation, so wirkt die Schwere g mit dem der Tangente des Bogens folgenden Theile $g' = g \sin \alpha$ den Punkt wieder herabzuziehen, während der andere Theil $g \cos \alpha$, in der Richtung des Fadens wirkend, von dem festen Punkte a vernichtet wird.

Da die Kraft $g \sin \alpha$ bis auf 0 abnimmt, so entsteht niederwärts eine abnehmend beschleunigte (26) Bewegung, die im tiefsten Punkte c ihre grösste Geschwindigkeit erreicht. Diese Geschwindigkeit wird dem frühern zufolge (71) derjenigen des freien Falles durch den Höhenunterschied $L(1 - \cos \alpha)$ von b und c gleich sein.

$$U = \sqrt{[2g L (1 - \cos \alpha)]} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{gL}$$

In c angelangt, treibt die Inertie den Punkt weiter und er steigt, dem Theil $g \sin \alpha$ der Schwere entgegen, aufwärts. Kraft und Bewegung variiren nun in umgekehrter Ordnung durch die nämlichen Stufen wie früher; daraus geht eine zunehmend verzögerte Bewegung

hervor, die den Punkt wieder bis auf die Höhe des Ausgangspunktes zu heben vermag.

Durch Wiederholung dieses ganzen Vorganges entstehen Schwingungen, welche das Wesen der Pendelbewegung ausmachen und, theoretisch genommen, nicht aufhören können.

Die Schwingungszeit von der einen zur folgenden höchsten Stellung wird genähert ausgedrückt durch

$$T = \pi \left(1 + \sin^2 \frac{a}{4}\right) \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

beträgt die Anfangselongation a nicht mehr als 5° , so sinkt das Glied $\sin^2 \frac{a}{4}$ schon auf 0,00047 herab und es genügt der einfache Ausdruck

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

welcher, von der Elongation a unabhängig, die Schwingungszeit des isochronen Pendels darstellt. Sie ist der Wurzel aus der Länge L direct, derjenigen aus der Beschleunigung g verkehrt proportional.

Dieser letzte einfache Ausdruck ist nur für das Cycloidenpendel streng richtig, den Kreisradius der Curve zu $\frac{1}{4} L$ gesetzt. Theoretisch

wird das Pendel diese Curve beschreiben, wenn es zwischen zwei ähnlichen Cycloiden schwingt, von denen es sich beständig auf- und abwickelt.

73. Gesetze der Pendelbewegung. — Die Gesetze der Bewegung werden bekannt sein, wenn man zwei Beziehungen zwischen der Zeit t (von Anfang der Bewegung an), dem durchlaufenen Wege s (oder hier der noch vorhandenen Ablenkung α) und der gewonnenen Geschwindigkeit u (oder auch der Winkelgeschwindigkeit w) angeben kann. Diese Beziehungen müssen sich gründen 1) auf die Bedingung (26)

$$\delta s = u \delta t \quad (1)$$

welche für das Element jeder, auch veränderlichen Bewegung gilt. 2) auf die Bedingung

$$\delta u = g \sin \alpha \delta t \quad (2)$$

welche angibt, dass die in der Zeit δt gewonnene Bewegungsmenge $m \delta u$, von der beschleunigenden Kraft $g \sin \alpha$ in der Zeit δt mitgetheilt worden ist.

Eine der gesuchten Beziehungen wird übrigens durch den früher (71) erläuterten Satz geliefert, dass auf vorgeschriebener Curve die Geschwindigkeit derjenigen des freien Falles durch den Höhenunterschied gleich ist, nämlich

$$u = \sqrt{[2 g L (\cos \alpha - \cos a)]} \quad (3)$$

wo a die anfängliche Elongation zur Zeit $t = 0$ bezeichnet.

Die weitere Entwicklung lässt sich nicht elementar geben; sie führt aber für die Ablenkung α und die Geschwindigkeit u , bei erster Annäherung, auf die Ausdrücke

$$\alpha = a \cos \left(2 \pi \frac{t}{2T} \right) = a \cos \left(t \sqrt{\frac{g}{L}} \right), \quad (4)$$

$$u = U \sin \left(2 \pi \frac{t}{T} \right) = U \sin \left(t \sqrt{\frac{g}{L}} \right)$$

welche eine periodische Bewegung darstellen, die diess- und jenseits der Verticalen, hin und her sich gleich wiederholt und nach der ganzen Schwingungszeit T immer wieder vom gleichen Punkte beginnt.

1) Die Ableitung des genauern Ausdruckes für die Schwingungszeit T

lässt sich wie folgt geben: Aus (3) erhält man, wenn $\sin e = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{a}{2}}$ eingeführt wird,

$$u = 2 \cos e \sin \frac{a}{2} \sqrt{g L}$$

Nach einer kleinen Zeit δt sei u um δu angewachsen, entsprechend damit e um δe , man hat gleichfalls

$$(u + \delta u) = 2 g \cdot \cos (e + \delta e) \sin \frac{a}{2} \sqrt{g L}$$

oder nach Auflösung, Subtraction von u und Verwerfung der höhern Potenzen von δe

$$\delta u = - 2 \sin \frac{a}{2} \sqrt{g L} \sin e \delta e$$

Durch Vergleichung mit δu aus (2) erhält man

$$\delta t = - \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \delta e$$

Wäre α constant, so erhielte man einfach die halbe einfache Schwingungszeit $\frac{1}{2} T$ aus der Differenz $e'' - e'$ der Werthe von e für $\alpha = 0$ und $\alpha = a$

(Formel I), welche Werthe $e'' = 0$, $e' = \frac{\pi}{2}$ sind. Man hätte also

$$T = \frac{\pi}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (5)$$

Da nun $\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ nur sehr wenlg variirt, so lange α klein ist, so kann man

dafür den Mittelwerth $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos \frac{a}{2}} \right) = 1 + \sin^2 \frac{a}{4}$ setzen und erhält

$$T = \pi \left(1 + \sin^2 \frac{a}{4} \right) \sqrt{\frac{L}{g}}$$

was der gesuchte Ausdruck ist.

2) Die beiden Ausdrücke (4) genügen vorerst der Beziehung (3), denn von dem einen ausgehend, kann man den andern mittelst (3) ableiten. Setzt man in den zweiten für u und U ihre Werthe aus (3), so folgt

$$\cos \alpha - \cos a = (1 - \cos a) \sin^2 \left(2 \pi \frac{t}{2T} \right)$$

welche zuerst gibt

$$\cos \alpha = \sin^2 \left(2 \pi \frac{t}{2T} \right) + \cos a \cos^2 \left(2 \pi \frac{t}{2T} \right)$$

und durch weitere Vereinfachung

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{a}{2} \cos \left(2\pi \frac{t}{2T} \right) \quad (6)$$

welche für kleine a mit der zweiten Gleichung (4) übereinstimmt.

Sie genügen aber auch der Gleichung (2), denn die zweite gibt für $u + \delta u$ entsprechend $t + \delta t$, nach Abzug von u und Verwerfung der höhern Potenzen

$$\delta u = U \frac{\pi}{T} \cos \left(2\pi \frac{t}{2T} \right) \cdot \delta t$$

führt man hier die Werthe ein:

$$U = 2 \sin \frac{a}{2} \sqrt{g L}, \quad \frac{\pi}{T} = \cos \frac{a}{2} \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad \cos \left(2\pi \frac{t}{2T} \right) = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{a}{2}}$$

so reduziert sie sich auf (2).

74. Das wirkliche Pendel. — Die Bedingungen 1) und 2) (73) auf die Winkelgeschwindigkeit w und die Winkelbeschleunigung δw zurückgeführt, werden da $\delta s = -L \delta \alpha$, weil α abnimmt, wenn s wächst,

$$\delta \alpha = w \delta t \quad (1)$$

und da $u = \frac{\delta s}{\delta t} = -L w$, also $\delta u = -L \delta w$,

$$-L \delta w = g \sin \alpha \delta t \quad (2)$$

Da es sich um drehende Kräfte handelt, ist diese Gleichung eigentlich unvollständig und sollte durch Multiplication mit den Entfernungen auf statische Momente bezogen werden, — was beim einfachen Pendel, für welches der bewegte Punkt und der Angriffspunkt zusammenfallen, nicht nothwendig ist. Allgemeiner wird die Bedingung 2) lauten: Die Momente aller gewonnenen Bewegungsmengen soll den Momenten aller mitgetheilten gleich sein.

Ein Punkt m (Fig. 45) des Pendels, in der Entfernung r , gewinnt ein Moment der Bewegungsmenge — $m r^2 \delta w$; die Summe aller solchen Grössen — $S(m r^2) \delta w$ wird den ersten Theil der Gleichung darstellen. Die ganze Kraft der Schwere $g S(m)$ kann hinwieder im Schwerpunkte b befestigt gedacht werden. Bezeichnet D die Entfernung desselben vom Drehpunkte a , so wird $D g S(m)$ das Moment der Gesamtkraft sein. Man erhält also

$$-S(m r^2) \delta w = D g S(m) \sin \alpha \delta t \quad (3)$$

Die Grösse $S(m r^2) = K$, Summe der Produkte der Massentheile mit dem Quadrate ihrer Entfernungen, heisst das Moment der Inertie des Körpers; das Produkt $D g (S m) = P$, der Kraft g mit der Masse $S(m) = M$ und der Entfernung D , die richtende oder Direktionskraft. Die Gleichung

$$-K \cdot \delta w = P \sin \alpha \delta t \quad (4)$$

stimmt mit 2) überein, wenn man dem einfachen Pendel die Länge

$$L = \frac{g \cdot K}{P} = \frac{K}{D \cdot M} \quad (5)$$

gibt, woraus, in erster Annäherung, die Schwingungszeit

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{P}} = \pi \sqrt{\frac{K}{g D M}} \quad (6)$$

und die Bewegungsgleichungen folgen

$$\alpha = a \cos \left(t \sqrt{\frac{P}{Q}} \right), \quad w = W \sin \left(t \sqrt{\frac{P}{Q}} \right) \quad (7)$$

Zur Anknüpfung an spätere Schwingungserscheinungen werde bemerkt, dass für kleine α die Gleichung 4) die Form erhält

$$-\delta w = Q \cdot \alpha \delta t \quad (8)$$

wo w die dem Winkel α entsprechende Winkelgeschwindigkeit, Q aber eine von w und α unabhängige Grösse ist.

75. Der Schwingungspunkt. — Der durch die Entfernung L bezeichnete Punkt, der im wirklichen Pendel so schwingt, als wäre er allein vorhanden, als wäre die ganze Bewegungsmenge in ihm concentrirt, heisst der Schwingungspunkt.

Das Moment der Inertie $S(m r^2) = K$ für die Drehaxe a (Fig. 44) von welchem L abhängt, lässt sich aus dem bei jedem Körper unveränderlichen $S(m \varsigma^2) = K'$ für den Schwerpunkt b bestimmen. Denn bezeichnet x die von a in der Linie $a b$ gezählte Abscisse eines Punktes m , y seine Ordinate, D die Entfernung $a b$ von Schwerpunkt und Drehpunkt, endlich x' die Abscisse des Punktes m , vom Schwerpunkte b an gezählt, so hat man

$$r^2 = y^2 + x^2 = \varsigma^2 + D^2 + 2 D x'$$

$$\text{folglich} \quad S(m r^2) = S(m \varsigma^2) + D^2 S(m) + 2 D S(m x')$$

Nach den Eigenschaften des Schwerpunktes (47) ist aber $S(m x') = 0$. Man erhält also

$$K = K' + D^2 M.$$

Das Moment der Inertie um die Axe a berechnet sich also aus demjenigen für die parallele Axe des Schwerpunktes b und aus der Entfernung D der beiden Punkte a und b .

Die Entfernung des Schwerpunktes wird $a c$

$$L = D + \frac{K'}{D M}$$

Da $\frac{K'}{D M}$ nothwendig eine position Grösse ist, so liegt der Schwingungs-

punkt immer tiefer als der Schwerpunkt um die Grösse $\frac{K'}{D M}$,

die um so kleiner wird, je entfernter der Körper von der Drehaxe absteht.

Würde man das Pendel umkehren und den Schwingungspunkt zum Drehpunkte machen, so hätte man zur Bestimmung des neuen Schwingungspunktes L' , einfach für D zu setzen $L - D$. Da aber

$$L' = L - D + \frac{K'}{(L - D) M} = L$$

so wird der frühere Drehpunkt zum Schwingungspunkt und die Schwingungszeit bleibt unverändert.

Ein Pendel mit zwei Schneiden versehen und eingerichtet, sei es durch Verstellung der einen Schneide, sei es durch Verschiebung eines Gewichtchens, in beiden Stellungen auf gleiche Schwingungszeit gebracht zu werden, heisst ein Reversionspendel. Die Entfernung L seiner

beiden Schneiden, genau gemessen, gibt die Länge des in gleicher Zeit schwingenden einfachen Pendels, für welches

$$T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

- 1) Das Moment der Inertie für den Schwerpunkt hat für einige einfache Körper folgenden Werth, die Dichte d gesetzt

	Masse	Mom. d. Inertie
1) Parallelopipedon. Seiten a, b, c		
Axe parallel mit c	$s. a. b. c$	$\frac{1}{12} d a b c (a^2 + b^2)$
2) Cylinder. Radius r , Höhe a		
Axe senkrecht zu a	$\pi d a r^2$	$\frac{\pi}{12} d a r^2 (3r^2 + a^2)$
3) Kugel. Radius r	$\frac{4\pi}{3} d r^3$	$\frac{8\pi}{15} d r^5$

- 2) Das Reversionspendel bestehe aus zwei gleichen Massen m (Fig. 46), die wir theoretisch als schwere Punkte an gewichtloser Linie betrachten, seien r, r' nach ihrer Grösse, ihre Entfernungen von der Axe, so hat man

$$M = 2m, D = \frac{1}{2} (r + r'), K = 2m(r - D)^2 = \frac{1}{2} m(r - r')^2, \text{ Daraus}$$

$$L = \frac{1}{2} (r + r') + \frac{1}{2} \frac{(r - r')^2}{r + r'} = \frac{r^2 + r'^2}{r + r'}$$

Eine leichte Stange ab mit etwas schweren Massen A, B , stellt ein Reversionspendel dar, wenn man r, l, r' ein Verhältniss $10 : 13 : 15$ gibt, diese Grössen z. B. gleich 80, 104, 120 Centim. macht. Die Schwingungszeit ist dann 1,02 oder nahe 1 Secunde.

76. Störungen. — Verschiedene Umstände wirken störend auf das Pendel ein, vermindern allmählig seine Schwingungsbogen und bringen es zuletzt zur Ruhe.

Auf diese Verminderung haben folgende Ursachen Einfluss:

1) Die *Suspension*, welche entweder mittelst harter Schneiden oder durch Anhängen an einem Uhrfederstück bewerkstelligt wird. Im ersten Falle entsteht eine geringe Reibung; im zweiten eine kleine Abweichung der Pendelrichtung und der Pendelcurve vom Radius und dem Kreisbogen, welche letztere Abweichung indess dem Isochronismus eher günstig als nachtheilig ist.

2) Die *Gewichtsverminderung*, welche alle Körper in der Luft erleiden und die in ruhender Luft als eine im Schwerpunkt nach oben gerichtete Kraft in Rechnung gebracht wird, deren Grösse dem sehr geringen Gewichte der verdrängten Luft gleich ist. Freilich in bewegter Luft ändert sich diese Kraft.

3) Der *eigentliche Luftwiderstand*, von Verdichtung und Reibung der Luft abhängig. An sich sehr gering, hat Poisson überdiess gezeigt, dass wenn die Zeit der niedersteigenden Halbschwingung durch den Widerstand verlängert, die aufsteigende wegen Verkleinerung der Elongation verkürzt wird, so dass die Schwingungszeit nahe unverändert und der Isochronismus bewahrt bleibt. — Immerhin wird es vortheilhaft sein, durch eine linsenförmige Gestalt des Körpers, in Verbindung mit grosser Masse und kleiner Geschwindigkeit diesen Einfluss zu schwächen.

Endlich haben Temperaturveränderungen, indem sie die Stange verlängern oder verkürzen, Einfluss auf die Schwingungszeit, die im ersten Falle entsprechend verlängert, im zweiten abgekürzt wird. Man begegnet diesen Unregelmässigkeiten mittelst der Compensation, auf welche in der Wärmelehre näher eingetreten wird.

Die Hauptgesetze des einfachen Pendels hat Galilei entdeckt, hingegen lehrte Huyghens die Reduction des wirklichen oder physischen Pendels auf das einfache und seine Benutzung in den Uhren. Zur Kenntniss der Störungen haben am meisten beigetragen Poisson durch seine theoretischen Untersuchungen, dann Kater (1818), der Erfinder des Reversionspendel, vor Allen aber Bessel, (1826) in seinem wichtigen Werke über das Secundenpendel.

77. Bestimmung der Schwerkraft. — Wenige Erscheinungen sind dem Physiker so wichtig geworden als die Pendelbewegung, weil wenige eine solche Schärfe der Messung gestatten. Vor Allem hat das Pendel auf die genaue Bestimmung der Schwerkraftbeschleunigung g geführt, denn die Formel für die Schwingungszeit gibt

$$g = \frac{\pi^2 L}{T^2}$$

lässt also g aus der Länge L und der Schwingungszeit T des einfachen Pendels berechnen.

Um die Zeit T mit Genauigkeit zu bestimmen, beobachtet man an einer Secundenuhr die Dauer t einer grossen Zahl n von Schwingungen, die, wenn klein, als isochron anzusehen sind; die Unsicherheit der Uhrablesung (beiläufig gegen $\frac{1}{4}$ Sec.) vertheilt sich auf die ganze Zahl derselben und die Schwingungszeit $T = \frac{t}{n}$ wird nur auf

$\frac{1}{4n}$ einer Secunde unsicher sein. Natürlich dürfen die Schwingungen nicht von dem Ende der Bogen, wo die Bewegung allmählig aufhört, sondern von ihrem Durchgang durch die Verticale gezählt werden, z. B. indem man die Augenblicke wählt, wo eine auf der Pendelstange gezeichnete Linie hinter dem verticalen Faden eines Fernrohrs durchgeht.

Zur Bestimmung der Länge des einfachen Pendels, das zu dem wirklich benutzten gehört, gelangt man leicht, wenn man dasselbe aus einer kleinen, homogenen, schweren Kugel bildet, die an langen Faden befestigt wird. Die bis zum Mittelpunkt gemessene Länge L muss um die Abweichung von Schwingungs- und Schwerpunkt corrigirt werden, welche nach (75) sein wird

$$L - D = \frac{K'}{DM} = \frac{2}{5} \frac{r^2}{D}$$

Genauer ist es mit Bessel die Länge L aus den Schwingungszeiten T, T' zweier Pendel, deren Längenunterschied λ genau gemessen worden ist, zu berechnen. Man hat nämlich durch Gleichsetzen der beiden Ausdrücke von g

$$\frac{L}{T^2} = \frac{L + \lambda}{T'^2} \text{ woraus dann } L = \frac{T'^2 \cdot \lambda}{T'^2 - T^2}$$

Endlich liefert das Reversionspendel aus der Entfernung seiner beiden Schneiden (75), bei gleich gemachter Schwingungszeit, die gesuchte Länge.

Nennt man T die Schwingungszeit, die mittelst einer Länge L erhalten ward, so folgt daraus die Länge L' des Secundenpendels, das nämlich 1 Schwingung in 1 Secunde macht

$$L' = \frac{L}{T^2} \text{ so dass } g = \pi^2 L'$$

An zwei Orten der Erde verhält sich die Schwere wie die Länge des Secundenpendels. — Würde man hingegen ein an Länge unveränderliches Pendel an beiden Orten benutzen und die Schwingungszeiten T, T' beobachten, so hätte man

$$g : g' = T'^2 : T^2$$

Die Schwere verhält sich umgekehrt wie das Quadrat der Schwingungszeiten.

Mittelst des Pendels bewies endlich Bessel genauer, als es die kurze Dauer des Falles im Vacuum zu prüfen erlaubt, die bei allen Substanzen gleiche Beschleunigung der Schwere. Als er nämlich der Grösse und Gestalt nach völlig identische Kugeln (aus Metall, Glas, Elfenbein u. s. f.) im leeren Raum, wo die meisten Störungen wegfallen, schwingen liess, fand er genau die gleiche Schwingungszeit. Da nun die Entfernung L des Schwingungspunktes bei homogenen Körpern von der Dichte unabhängig ist, weil diese im Ausdrucke von L in Zähler und Nenner als gleicher Faktor auftritt, so muss es nothwendig auch g sein.

78. Aenderung der Schwere. — Aus den genauesten Pendelbeobachtungen, welche von Biot und Arago, von Sabine, Kater, Freycinet, Duperrey und Andern auf verschiedenen Puncten der Erde angestellt worden sind, ergab sich, dass die Schwere eine sehr merkliche Abnahme von den Polen, wo sie ein Maximum hat, nach ihrem Minimum am Aequator erleidet. Genähert lassen sich diese Veränderungen, so wie die entsprechenden der Länge des Secundenpendels, durch Ausdruck von der Form

$$g = g_0 + \vartheta \sin^2 \varphi, \quad L = L_0 + \lambda \sin^2 \varphi$$

darstellen, wo g_0 und L_0 die Werthe dieser Grössen unter dem Aequator, φ die geogr. Breite, ϑ und λ zwei gleichfalls den Beobachtungen entthobene Zahlcoefficienten bezeichnen, welche den Unterschied der Polar- und Aequatorialwerthe ausdrücken.

Die Werthe, welche von E. Schmidt (1829) und v. Pouillet (1854), als die der Gesammtheit der Beobachtungen best entsprechenden und daher wahrscheinlichsten, gegeben wurden, sind die folgenden in Centimetern

	g_0	ϑ	L_0	λ
E. Schmidt	978,0622	5,08639	99,09827	0,515358
Pouillet	978,1027	5,00574	99,10256	0,507188.

Die letztern geben für den grössten und mittlern Werth für $\varphi = 90$ und 45°

$$\begin{aligned} g_{90} &= 983,1084, & L_{90} &= 99,60974 \\ g_{45} &= 980,6055, & L_{45} &= 99,35615 \end{aligned}$$

Die Extreme weichen um $0,0050917$ gegen $\frac{1}{196}$ des grössten und $0,0051178$ gegen $\frac{1}{195}$ des kleinsten Werthes von einander ab.

Vergleicht man indess die berechneten Werthe genauer mit den beobachteten oder bestimmt die Constanten der Formel aus verschiedenen Beobachtungen, so zeigen sich nicht unerhebliche Abweichungen 1) auf verschiedenen auseinanderliegenden Meridianen, 2) auf entfernten Theilen desselben Meridians, 3) endlich auf entsprechenden Stellen der beiden Halbkugeln, Abweichungen, welche das Dasein localer Einflüsse verrathen. Mit Rücksicht auf diese Abweichungen bestimmt Biot den Werth von L_{45} und g_{45} im mittlern Europa, unter 45° , am Ufer des Meeres, im leeren Raume zu $99,35342$ und $980,579$ Centim.

Das Gesetz der Schwerenänderung wird oft auf die Schwere g' von 45° zurückgeführt. Man hat dann, da $\sin^2 45^\circ = \frac{1}{2}$

$$g = g' \frac{g_0 + \vartheta \sin^2 \varphi}{g_0 + \frac{1}{2} \vartheta} = g' \left(1 - \frac{\vartheta}{2g_0 + \vartheta} \cos 2\varphi \right)$$

oder also mit den Pouillet'schen Werthen in Centim

$$g = 980,6055 (1 - 0,00255237 \cos 2\varphi)$$

79. Einfluss der Erddrehung. — Früher (70) wurde erläutert, wie in Folge der Drehung der Erde ein fallender und geworfener Stein, den Boden an einer etwas andern Stelle, als ohne dieselbe erreicht, und dass diese Abweichung von der Inertie herrühre, welche dem Körper die Seitenbewegung seines Ausgangspunktes bewahrt. Abweichungen anderer Art bewirken Inertie und Drehung der Erde an den Schwingungen eines Pendels, wie es zuerst von Foucault unter Anwendung schwerer schwingender Massen und langer Aufhängungen nachgewiesen worden ist. Verfolgt man nämlich längere Zeit die Linie, welche ein solches fest und frei-beweglich aufgehängtes Pendel mit seinem tiefsten Punkte auf einer horizontalen Ebene zeichnen würde, so bemerkt man bald, dass sie allmähig von ihrer ursprünglichen Richtung abweicht und in eine sehr lange Ellipse ausartet, deren grosse Axe sich langsam und gleichförmig im Sinne des Uhrzeigers herumdreht. Je mehr der Beobachtungsort nach N liegt, desto schneller geht diese langsame Bewegung vor sich, während sie umgekehrt gegen Süden immer unmerklicher wird.

Die Erklärung ist folgende: Lässt man ein etwas schweres von Hand gehaltenes Pendel schwingen, so kann man daselbe hin und her tragen, man kann sogar den Faden zwischen den Fingern drehen und dadurch den Körper rotiren lassen, dennoch bewahrt die Inertie den Theilen des Pendels ihre gemeinsame Bewegung, und man sieht den Schwingungsbogen seine Richtung im Raume parallel bewahren. Aehnliches geschieht, wenn durch Drehung der Erde die Verticale $b\ c$ (Fig. 47) eines Ortes a nach einer kurzen Zeit δt nach $b'\ c$ übergegangen ist. Folgte die Schwingung anfangs z. B. der Richtung $a\ d$ des Meridianes,

so wird diese Richtung im Punkte a' nahe dieselbe, also nach $a'd'$ parallel ad gerichtet sein, während der Meridian die neue Lage $a'd$ hat. Die jetzige Richtung weicht daher im Sinne des Uhrzeigers um einen kleinen Winkel ab, der nahe gleich $a'da$ ist.

Hat sich die Meridianebene um den kleinen Winkel $\delta\alpha$ gedreht, und bezeichnet φ die geographische Breite des Ortes, R den Erdradius, so ist

$$aa' = R \cos \varphi \delta\alpha$$

Anderseits erhält man aus der Tangente $ad = R \cotg \varphi$, und dem Winkel $ada' = \delta\beta$, um welchen die Schwingungsrichtung sich scheinbar gedreht hat

$$aa' = R \cotg \varphi \delta\beta$$

Aus beiden also

$$\delta\beta = \sin \varphi \cdot \delta\alpha$$

Die Drehung der Schwingungsrichtung ist proportional dem Sinus der geographischen Breite, erfolgt also am Pole in gleicher Zeit wie die Drehung der Erde, verschwindet hingegen ganz am Aequator. Macht die Erde in 24 Stunden oder 1440 Minuten Eine Umdrehung, so bedürfte die Schwingungsrichtung dazu, gleichförmig drehend, einer Zeit

$$T = \frac{1440}{\sin \varphi}$$

80. Andere Benutzungen des Pendels. — Von den vielen Anwendungen des Pendels seien noch die folgenden, ganz abweichenden kurz erwähnt.

1) Das Uhrpendel. — In jedem Uhrwerke sind zwei Kräfte erforderlich, eine bewegend, die das ganze Werk treibt, und eine regulirende, bestimmt den gleichförmigen Gang zu sichern. Wo es möglich ist, benutzt man zu beiden Zwecken die Schwere, als die unveränderlichste aller bekannten Naturkräfte. Einerseits wirkt sie als fallendes Gewicht, anderseits im schwingenden Pendel.

Würde das Gewicht A (Fig. 48) sich selbst überlassen, so müsste das ganze Uhrwerk eine, wenn nicht gleichmässig, doch abnehmend beschleunigte Bewegung annehmen. Diese nun wird gehindert, indem die mit dem schwingenden Pendel A verbundene Hemmung C abwechselnd auf der einen und andern Seite in das Steigrad eingreift und dieses vorübergehend hemmt. So geschieht es, dass die beschleunigte Bewegung des Gewichtes sich in eine zeitweise immer Neubeginnende umwandelt, während hinwieder die von demselben jeden Augenblick verlorne Bewegung durch die Hemmung auf das Pendel übertragen und zur Erhaltung seiner Schwingungsbogen verwendet wird.

2) Das Metronom. — Der von Mälzel in Aufnahme gebrachte Taktmesser hat zur Bestimmung gleiche, beliebig zu bestimmende Zeitintervalle anzugeben. Ein gewöhnliches Pendel, um Secunden zu schlagen, müsste die unbequeme Länge von 99,3 Centim. haben, verlängert man aber die Pendelstange nach b (Fig. 49) jenseits des Drehpunktes c , und bringt da ein verschiebbares Gewichtchen an, das dem Hauptgewichte stets entgegenwirkt, so bietet das Hinausrücken desselben ein einfaches Mittel dar, die Schwingungszeit zu vergrössern. Betrachtet man beide Gewichte M , m als blosse Massenpunkte, in Ent-

fernungen R und r vom Drehpunkte c abgehend, so erhält man vorerst zur Bestimmung der Entfernung D des gemeinsamen Schwerpunktes

$$(M + m) D = M R - m r$$

Dann für die Länge L des entsprechenden einfachen Pendels (74) und die Schwingungszeit T

$$L = \frac{M R^2 + m r^2}{M R - m r} \text{ und } T = \pi \sqrt{\frac{M R^2 + m r^2}{g (M R - m r)}}$$

ein Ausdruck, der, sowohl was den Zähler als den Nenner betrifft, mit r zunimmt.

3) Das Ballistische Pendel. — Seit Robins wurde das Pendel auf verschiedene Weise benutzt, um die Anfangsgeschwindigkeit der Kriegsgeschosse zu bestimmen. So z. B. befestigte man den Lauf des Geschützes B als schweren Körper an ein hinlänglich starkes Pendel A (Fig. 50). Erfolgt der Schuss, so wird der Kugel, deren Gewicht m sei, in Folge der Gleichheit von Action und Reaction (37), eine gleiche Bewegungsmenge mitgetheilt als rückwärts dem Laufe und Pendel. Sei u die gesuchte Geschwindigkeit der Kugel, f die Entfernung der Drehaxe a von der Axe des Laufes b , so wird $m \cdot f \cdot u$ das Moment der Kugelbewegung sein. Anderseits bezeichne U die Geschwindigkeit des Schwingungspunktes des ganzen Pendels, der in der Entfernung L von der Drehaxe liegt; $\frac{U}{L}$ wird seine Winkelgeschwindigkeit sein; also wenn

K das Moment der Inertie für die Drehaxe a darstellt, $\frac{K U}{L}$ das Moment seiner Bewegungsmenge. Die Gleichsetzung beider gibt

$$m \cdot f \cdot u = \frac{K \cdot U}{L} \text{ also } u = \frac{K U}{m \cdot f \cdot L}$$

Beobachtet man nun die erste Elongation α des zurückgetriebenen Pendels, so hat man (73) $U = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{g L}$; L bestimmt sich, indem man die Schwingungszeit T des Pendels beobachtet, aus (72) $L = \frac{g \cdot T^2}{\pi^2}$; K endlich folgt aus dem Gewichte M des ganzen Pendels und der Entfernung D seines Schwerpunktes durch den Ausdruck (74) $K = D L M$. Diese Werthe eingeführt geben

$$u = 2 \frac{g \cdot D \cdot M \cdot T}{\pi \cdot m \cdot f} \sin \frac{\alpha}{2}$$

wo D gleichfalls experimentell nach dem Princip der Zeigerwage (55) bestimmt werden kann.

81. Mittelpunkt des Stosses. — Der Schwingungspunkt b (Fig. 51) spielt eine besondere Rolle beim Stoss eines drehenden oder um eine Axe beweglichen Körpers und heisst dann Mittelpunkt des Stosses (Percussions-Centrum). Da nämlich die ganze Bewegungsmenge oder Kraft des bewegten Körpers in diesem einzigen Punkt vereinigt gedacht werden kann (75), so hat die Axe a , wenn dieser Punkt gehemmt oder in Bewegung gesetzt wird, keinerlei Wirkung zu erleiden. Anders ver-

hält es sich, wenn die hemmende oder bewegende Kraft auf einen Punkt b' oder b'' , über oder unterhalb des Schwingungspunktes wirkt. Die in b wirkende Bewegungsmenge P des Körpers kann durch Kräfte P' , P'' nur dann aufgehoben werden, wenn an der Axe a Kräfte p' oder p'' mitwirken, welche nach (42) sind

$$p' = P \frac{L - L'}{L'} \text{ oder } p'' = P \frac{L'' - L}{L''}.$$

wo L , L' , L'' die Entfernungen $a b$, $a b'$, $a b''$ bezeichnen.

In beiden Fällen also erleiden Zapfen und Lager der Axe einen entsprechenden Druck, der diese Theile erschüttert und angreift. Nur auf den Schwingungspunkt gerichtet, bleibt der Stoss ohne Einfluss auf die Axe.

In allen Maschinen, wo schwere drehende Theile stossen, in Hammerwerken z. B., hat man sehr auf die Richtung des Stosses gegen den Schwingungspunkt zu achten, sollen die Axen nicht in kurzem zerstört werden. Die einen Hammer führende Hand empfindet eine Erschütterung nach oben oder unten, je nachdem der Kopf desselben mit dem äussern oder innern Rande seiner Fläche aufschlägt; während bei richtigem Schlage diese ermüdende Wirkung nicht statt hat. *

Cap. 7. Die drehende Bewegung.

82. Tangential- und Fliehkraft. — Ein Körper, der sich auf einem Kreise bewegt, strebt in jedem Augenblick vermöge seiner Inertie der Tangente zu folgen, und folgt ihr wenn er, wie z. B. der von der Schleuder geworfene Stein, plötzlich frei wird. Soll er auf dem Kreise bleiben, so muss jeden Augenblick eine Kraft, wie z. B. die Spannung des haltenden Fadens, gegen den Mittelpunkt wirken, ihn von der Tangente auf dem Kreise zurückzuziehen. Bei jeder solchen Bewegung gehen also aus der Inertie zwei Kräfte hervor:

1. Die Tangentialkraft, welcher der Körper sich selbst überlassen folgen würde. Hat der Körper (als Punkt gedacht) die Masse m und Geschwindigkeit U , so wird die Stärke dieser Kraft einfach durch seine Bewegungsmenge

$$P = m \cdot U$$

ausgedrückt.

Meist kann man die Geschwindigkeit U auf dem Kreise nicht direct messen, sondern bestimmt zuerst aus der Zeit, welche zu einer gezählten Zahl von Umdrehungen erforderlich ist, die Dauer T Einer Umdrehung, woraus dann folgt

$$U = R \cdot \omega = \frac{2\pi R}{T}$$

wenn R den Radius des Kreises und ω die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet.

2. Die Fliehkraft (Centrifugalkraft), welche, radial wirkend, das Bestreben des Körpers bezeichnet sich vom Kreise zu entfernen, welches Bestreben durch eine gleich grosse Central- oder Centripetalkraft aufgehoben werden muss. Wären diese Kräfte un-

gleich, so würde sich der Körper auf einer Spirale entweder vom Mittelpunkte entfernen oder sich ihm nähern.

Man denke sich den Körper einen kurzen Augenblick δt der Tangente folgend, er wird von a (Fig. 52) nach α gelangen, so dass $a\alpha = U\delta t$. In der Wirklichkeit aber befindet er sich auf dem Kreise in α' und $\alpha\alpha'$ bezeichnet den kleinen Weg, um den Central- oder Fliehkraft, während dieser Zeit gleich fortwirkend, ihn zu bewegen vermöchten. Bezeichnet f , analog mit g bei der Schwere, die Beschleunigung aus der Schwerkraft, so hätte man (64)

$$\alpha\alpha' = \frac{1}{2} f \delta t^2$$

Zieht man $\alpha'a'$ parallel mit αa , so kann man, wenn δt klein genug ist, diese zwei Linien als gleich und so auch $a\alpha' = \alpha\alpha'$ annehmen. Aus dem Dreieck $a\alpha'b$ des Halbkreises folgt aber $\alpha'\alpha'^2 = a\alpha'(2R - a\alpha')$ oder wenn man $a\alpha'^2$ vernachlässigt

$$\alpha\alpha' = \frac{a\alpha'^2}{2R} = \frac{1}{2} \frac{U^2}{R} \delta t^2$$

Beide Werthe einander gleich gesetzt geben

$$f = \frac{U^2}{R} = R w^2 = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

wenn auch der Werth von U gesetzt wird. Diese Ausdrücke sind von δt unabhängig und streng richtig, wenn δt , wie auf der Curve selbst, als verschwindend betrachtet wird.

Die Fliehkraft wächst also wie das Quadrat der Geschwindigkeit; bei gleicher Geschwindigkeit ist sie dem Radius des Kreises verkehrt, bei gleicher Zeit der Umdrehung demselben direkt proportional,

Durch die vorigen Ausdrücke wird die Fliehkraft als Geschwindigkeit (d. h. als Beschleunigung in 1 Sec.), folglich in Längeneinheiten gefunden, während sie in der Regel nach aussen als Druck wirkt. In allen Theilen der Masse m entwickelt, lässt sie sich unmittelbar mit der Schwere vergleichen, und ihr Druck Q , aus dem Gewichte P des Körpers berechnet, wird sein

$$Q = P \frac{f}{g} = P \frac{R w^2}{g} = P \frac{4\pi^2 \cdot R}{g \cdot T^2}$$

Wäre die Curve nicht ein Kreis, so müsste in dem allgemeinen Ausdruck $f = \frac{U^2}{R}$, für R der Krümmungsradius der berücksichtigten Stelle eingeführt werden.

83. Versuche über die Fliehkraft. — Die Wirkungen der Fliehkraft werden mittelst der Schwungmaschine erläutert, eine zur Aufstellung von Apparaten eingerichtete Axe A (Fig. 53), die man mittelst der an einem schweren Rade B befestigten Kurbel in schnelle Drehung versetzen kann.

Wir heben aus den zahlreichen Versuchen über die Fliehkraft nur einige hervor:

1) Zwei ungleiche Kugeln a und a' (Fig. 54) deren Massen oder Gewichte P, P' seien, befinden sich, durch einen Faden verbunden, verschiebbar an einem Drahte angebracht. Damit in beiden ein gleicher Druck aus der Fliehkraft entstehe, muss

$$Q = Q' \quad \text{oder} \quad P \cdot R = P' \cdot R'$$

Die Radien müssen sich verkehrt wie die Gewichte verhalten, gleich wie es an dem Hebel der Fall ist.

2) Das conische Pendel (Fig. 55) besteht aus Kugeln a, a' , deren Stäbe in b an einer drehenden Axe beweglich eingelenkt sind. Durch andere Stäbe werden ebenso die erstern mit der an der Axe verschiebbaren Hülse c verbunden. Durch Drehung entfernen sich und steigen die Kugeln bis zu einer von der Geschwindigkeit abhängigen Höhe. Da zwei Kräfte wirken, die verticale Schwere P und die horizontale Fliehkraft Q , so verlangt das Gleichgewicht, dass ihre Resultirende vernichtet werde, was nur möglich ist, wenn sie verlängert durch den festen Punkt geht. Hat sich das Pendel um den Winkel α gehoben, so hat man

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Q}{P} = \frac{f}{g}$$

folglich da hier $R = L \sin \alpha$, wenn L die Länge des Stabes $a b$ ist,

$$\cos \alpha = \frac{g \cdot T^2}{4 \pi^2 \cdot L} = \frac{g}{L \cdot \omega^2}$$

Ein Werth, der nur möglich ist, wenn $T < 2 \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ oder wenn

die Geschwindigkeit U den Werth $\sqrt{g L}$ übersteigt.

Die Resultirende von Fliehkraft und Schwere kommt gleichfalls in Betracht, wenn das Pferd auf der Reitbahn, der Schlittschuhläufer auf dem Eise mit grosser Geschwindigkeit einen Bogen beschreiben. Um weder zu stürzen, noch auswärts geworfen zu werden, muss der Körper eine Neigung annehmen, welche der Resultirenden entspricht, die einzig im Stützpunkt des Fusses vernichtet werden kann.

3) Ein elastischer Streifen (Fig. 56) in Gestalt eines Kreises, unten in a befestigt, in b verschiebbar gehalten, ändert durch Drehung seine Gestalt. Indem die Punkte des Aequators die grössten Kreise beschreiben, entwickeln sie die grösste Fliehkraft und die Gestalt des Rotationskörpers geht aus einer Kugel in ein abgeplattetes Sphäroid über, dessen Drehungsaxe mit wachsender Geschwindigkeit immer kleiner wird. So vermuthlich hat sich die sphäroidale Gestalt der Erde und der Planeten aus der Wirkung der Drehung auf eine anfänglich weiche oder elastische Masse gebildet.

84. Verminderung der Schwere. — Die täglich in 24 Stunden oder 86164 Sec. (mittlere Zeit) (15) folgende Umdrehung der Erde um ihre Axe entwickelt eine Fliehkraft, welche die Wirkung der Schwere modifizirt. Unter dem Aequator wirkt sie derselben genau entgegen und vermindert sie, da der Halbmesser des Kreises $R = 6377399$ Met. beträgt, um

$$f = 3,3912 \text{ Centim.}$$

so dass die Schwere ohne Erddrehung, statt 978,1027 (78) gleich 981,4939 wäre. Der Werth der Fliehkraft ist $\frac{1}{288,425}$ der ganzen

Schwere am Aequator und würde dieselbe erreichen, wenn die Drehung nur 17 mal schneller vor sich ginge. Mit der Schwere am Pole verglichen, wo die Fliehkraft verschwindet, bewirkt sie eine Veränderung von $\frac{1}{289,916}$; da die aus Pendelversuchen gefolgerte $\frac{1}{196,622}$ beträgt, so genügt die Fliehkraft zu der Erklärung der Schwereänderung nicht, und eine andere Ursache, — wie später gezeigt wird, die Gestalt der Erde, — muss hinzukommen.

Vom Aequator nach N und S wird der Einfluss der Fliehkraft zur Verminderung der Schwere immer geringer, theils weil bei der geographischen Breite φ der Radius des beschriebenen Kreises $R \cos \varphi$ statt R sein wird, theils weil die Fliehkraft nur mit einem Theile $f \cos \varphi$ der Schwere entgegenwirkt. Die Verminderung wird sein

$$f = 3^{cm},3912 \cos^2 \varphi$$

85. Druck auf die Drehaxe. — Die Drehungsaxe eines Körpers kann als Angriffspunkt aller Fliehkräfte betrachtet werden und wird im Allgemeinen von denselben einen Druck erleiden, der nur in einzelnen Fällen, z. B. bei gut centrirten Scheiben oder Rädern, wegen der entgegengesetzt gleichen Anordnung der Theile, verschwindet. Suchen wir bei einem unsymmetrischen Körper zuerst die Wirkung, welche eine dünne zur Axe senkrechte Scheibe auf die Axe ausübt.

Jeder Punkt m (Fig. 57) wird auf die durch a gehende Axe mit einer Kraft (82) $w^2 m r$ wirken, wenn r die Entfernung von der Axe, w die Winkelgeschwindigkeit bezeichnen. Man zerlege sie nach zwei rechtwinklichten Richtungen, längs der von a durch den Schwerpunkt b gehenden Linie und senkrecht zu derselben, durch Multiplication mit $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r}$; man erhält $w^2 m x$ und $w^2 m y$. Die letzten Kräfte ver-

schwinden, da für jede Ebene durch den Schwerpunkt $S(my) = 0$ (47); die ersten geben gemäss der Eigenschaft des Schwerpunktes eine Resultirende

$$p = w^2 S(m x) = w^2 M \cdot D$$

wenn $M = S(m)$ die Masse des ganzen Körpers und D die Entfernung seines Schwerpunktes von der Axe ist. Also erleidet die Axe einen Druck, der nach dem Schwerpunkte gerichtet und so beschaffen ist, als wäre die ganze Masse in diesem Punkte vereinigt. Nach diesem Grundsatz berechnet man den Druck aus der Excentricität der Räder.

Nun betrachte man den ganzen unsymmetrischen Körper, der um die feste Axe AA' sich dreht (Fig. 58). Für jeden Querschnitt, senkrecht zur Axe, wird das Ebengesagte gelten. Alle Kräfte p zerlegen sich nach zwei durch die Axe gehenden rechtwinklichten Ebenen in $p \cos \alpha$ und $p \sin \alpha$, wenn p mit der einen derselben den Winkel α bildet.

Der Druck, den im Ganzen die Axe nach diesen beiden Ebenen auszuhalten hat, wird sein

$$P = S(p \sin \alpha), \quad Q = S(p \cos \alpha)$$

auf alle Schichten des Körpers ausgedehnt.

Wird die Axe an ihren beiden Enden gehalten und liegt eine Schicht, für welche p die Resultirende, in der Entfernung z und z' von beiden Enden, die um $l = z + z'$ aus einander liegen, so entsteht aus $p \sin \alpha$ und $p \cos \alpha$ auf A ein Druck, den man durch Multiplication mit $\frac{z'}{l}$, auf A' mit $\frac{z}{l}$ erhält. Der Gesamtdruck auf A wird die Resultirende der beiden rechtwinklichten Kräfte

$$\frac{1}{l} S(z' p \sin \alpha) \text{ und } \frac{1}{l} S(z p \cos \alpha)$$

sein, und ähnlich für A'.

Es versteht sich von selbst, dass die Richtung dieses Druckes jeden Augenblick mit der Drehung sich verändert und in der Zeit der Drehung 360° durchlaufen hat.

86. Hauptaxen der Drehung. — Hält man nur Einen Punkt C der Axe fest und bezeichnet z die Entfernung einer Schicht und des Angriffspunktes ihrer Kraft p von C, so erhält man in beiden rechtwinklichten Ebenen zwei resultirende Momente.

$$P \cdot m = S(z p \sin \alpha) \text{ und } Q \cdot n = S(z p \cos \alpha)$$

die sich, da der Drehungspunkt der gleiche ist, zu einem einzigen zusammensetzen lassen (44) und daher die Axe während der Drehung umzustellen trachten werden. Nur wenn m und $n = 0$, werden die beiden resultirenden Kräfte durch den festen Punkt C gehen, die Kräfte P und Q werden vernichtet und der drehende Körper setzt seine Bewegung ohne Umstellung seiner Axe fort.

Man beweist durch höhere Rechnung, dass selbst bei dem unregelmässigsten Körper, für jeden Punkt C, fest angenommen, drei zu einander rechtwinklichte Richtungen, die Hauptaxen sich finden lassen, welche diese Bedingung erfüllen. Von diesen Richtungen liefert überdiess die eine das grösste, die zweite das kleinste, die dritte ein mittleres Moment der Inertie (75).

Die drei Hauptaxen, welche durch den Schwerpunkt gehen, haben noch die weitere Eigenschaft, dass die Resultirende der Kräfte P und Q an und für sich 0 ist und keinen Druck auf diesen Punkt ausüben. Also erhält sich, selbst bei einem freien Körper, dessen Schwerpunkt nicht gehalten wird, die Lage dieser Axe bei einmal begonnener Drehung, unverändert. Man nennt sie daher im Besondern Hauptaxen der freien Drehung.

Von diesen Hauptaxen sind diejenigen, um welche das Moment der Inertie den grössten und kleinsten Werth hat, in so weit stabil, dass eine Drehung um eine nahe liegende andere Richtung keine fortschreitende Umstellung und Veränderung dieser Richtung, sondern ein beschränktes Schwanken zur Folge hat, während diess für die dritte Hauptaxe nicht der Fall ist.

Die eine der stabilen Hauptaxen, diejenige des grössten Momentes

der Inertie, kann man dadurch bestimmen, dass man den Körper an einem Faden aufgehängt, schnell genug um sich selbst dreht. Der Schwerpunkt bleibt vertical unter dem Aufhängepunkt, der Körper aber nimmt diejenige Stellung an, für welche die Verticale des Aufhängepunktes Hauptaxe ist.

87. Präcessionsbewegung. — Wenn ein Körper, z. B. ein Rad, ein Ring u. s. f. sich um seine stabile Hauptaxe dreht, so wirkt die Inertie in ähnlicher Weise wie bei der Schwingungsebene eines Pendels dahin, die Lage der Drehungsebene und die Richtung der Drehaxe im Raume parallel zu erhalten. So sieht man den drehenden Teller auf der Spitze eines Degens, den Kreisel auf seiner Spitze, und zwar wenn er schwer ist (Kreisel v. Busolt) sehr lange Zeit, ihre Stellungen bewahren. Einen solchen Körper kann man ohne Schwierigkeit hin und her bewegen, so lange die Drehungsebene oder die Axe parallel bleiben, gegen jede Umstellung dagegen widersteht er mit einer Kraft, welche mit der Rotationsgeschwindigkeit und dem Momente der Inertie wächst.

Lässt man auf den sehr schnell drehenden Körper eine fort-dauernde Kraft wirken, welche die Drehaxe beständig umzustellen strebt, sei es ein an der Axe befestigtes Gewicht, sei es das Gewicht des drehenden Körpers selbst, bei Nichtunterstützung seines Schwerpunktes, so offenbart sich im Sinne der Kraft keine Bewegung; hingegen nimmt die Drehaxe, ohne Aenderung ihrer Neigung, eine langsame drehende Bewegung auf einer conischen Fläche um die Verticale an, welche Präcession genannt wird. Diese Bewegung erfolgt immer in dem Sinne, als strebte der Ring seine Drehung mit der aus dem Gewicht hervorgehenden parallel zu stellen. So wird in dem Apparate von Fessel ein Ring A (Fig. 59), der um eine horizontale in a gestützte Axe im Sinne des Pfeiles schnell dreht, seine Präcessionsbewegung nach d oder d' ausführen, je nach dem das Gewicht B näher oder weiter als für das Gleichgewicht vom Stützpunkte entfernt ist.

Die Erklärung der Präcessionsbewegung lässt sich nur durch höhere Rechnung vollständig geben. Sie beruht im Wesentlichen auf Folgendem. Wenn der als Massenlinie gedachte rotirende Ring A (Fig. 60) durch Wirkung der Kraft P aus der Lage $a a'$ in die $\alpha \alpha'$ umgestellt würde, so leisten die Bewegungen der Punkte $a a'$, da sie parallel bleiben, keinen Widerstand, wohl aber diejenigen der übrigen Punkte, am meisten diejenigen in d und d'. Die letztern z. B. zerlegen ihre Bewegung nach der neuen Drehungsebene und senkrecht dazu, wodurch also Kräfte p, p' entstehen, deren Momente die Präcessionsbewegung erzeugen. Wie aber diese Drehung beginnt und die Ebene aus der Lage d d' in die $\delta \delta'$ führt, erfolgt eine andere Bewegungszerlegung, die für die Punkte a, a' am stärksten ist, aus der die Kräfte q, q' hervorgehen, deren Momente demjenigen von P entgegenwirken und bei angemessener Geschwindigkeit es genau aufheben. Die Axe bleibt daher in ihrer horizontalen Lage, die Drehungsebene hingegen nimmt im Sinne e Präcessionsbewegung an.

88. Einfluss der Drehungen auf einander. — Um die feste Richtung der Drehaxe, wenn sie eine stabile Hauptaxe ist, nachzuweisen, muss der Körper so gehalten werden, dass seine Axe alle möglichen Stellungen im Raume annehmen kann. Diess ist in der Bohnenberger'schen Präcessionsmaschine der Fall, wo die Drehaxe $a a'$ von einem Ringe A gehalten wird (Fig. 61), welcher selbst mittelst einer horizontalen Axe $b b'$ in dem zweiten Ring B beweglich ist, und dieser mittelst einer verticalen dritten Axe $c c'$ in dem dritten, festen Ring C. Setzt man den Körper mittelst Abziehen eines um seine Axe gewundenen Fadens in rasche Drehung, so sieht man die Axe ihre Lage unverändert bewahren, welche Lage auch der äussere Ring erhält. Diese Stellung ist eine im Raume absolut feste, und daher noch unabhängiger von der Drehung der Erde als die Schwingungsebene eines Pendels (79).

Merkwürdige Erscheinungen erhielt Foucault, indem er die vollkommene Beweglichkeit der Drehaxe beschränkte und dieselbe an der Drehung eines andern Körpers Theil nehmen liess. Als Resultat aller gegenseitigen Einwirkungen streben alsdann die beiden Drehaxen möglichst parallel, der Sinn beider Drehungen übereinstimmend zu werden. Man befestige z. B. (Fig. 62) die Präcessionsmaschine unter schiefer Stellung ihrer vom Ringe C gehaltenen festen Axe $c c'$ auf der Schwungmaschine (83). Hemmt man die Bewegung des Ringes B gegen den festen C, so dass die Drehaxe $a a'$ sich einzig in der Meridianebene der Schwungmaschine umstellen kann, so richtet sich $a a'$ parallel mit der Axe der letztern, den Pol mit harmonischer Drehung nach oben. Drehung nach der andern Seite, bewirkt sofort ein Umschlagen des Körpers, eine Umkehrung der Pole. — Man kann zweitens die Bewegung von B und C freigeben, diejenige von A und B dagegen bei rechtwinklischer Stellung hemmen. Die Drehaxe kann sich dann in einer zur festen Axe C senkrechten Ebene bewegen und stellt sich nun beim Drehen der Schwungmaschine in die Meridianebene, wiederum mit harmonischem Pole nach oben.

Statt der Schwungmaschine denke man sich die drehende Erde, statt der geneigten festen Axe, die Verticale eines Ortes, so bestimmt der drehende Körper bei der zweiten Benutzungsweise die Ebene des geographischen Meridianes bei der ersten, die Richtung der Erdaxe oder die Zenithdistanz des Poles. Freilich setzt diese Bestimmungsweise der geographischen Länge und Breite, ohne Zuzug irgend einer Beobachtung am Himmel, eine Vollkommenheit der Apparate voraus, welche der praktischen Anwendung für einmal noch im Wege steht.

89. Doppelbewegung eines freien Körpers. — Wird ein Körper von Kräften in Bewegung gesetzt und nachher ungestört sich selbst überlassen, so zeigt er in der Regel zwei verschiedene Bewegungen, eine fortschreitende oder Translationsbewegung und eine drehende oder Rotationsbewegung.

Es wirke z. B. eine einzige Kraft auf einen Körper, fähig demselben in bestimmter Richtung eine bestimmte Menge Bewegung mit-

zutheilen. Ist der Körper vollkommen frei, so muss in seiner gewonnenen Bewegung diese Bewegungsmenge sich rein und vollständig wiederfinden, da er seiner Inertie halber nichts an derselben verändern kann. Fasst man nun den Schwerpunkt ins Auge und berücksichtigt, dass bei Drehung um diesen nach keiner Richtung eine freie Bewegungsmenge sich offenbart, so wird man diejenige, die mitgetheilt wurde, in einer mit dem Schwerpunkte gemeinsamen Bewegung aller Theile suchen müssen. Mit andern Worten: Die Translation geht vor sich als wäre die ganze Masse im Schwerpunkt vereinigt und die wirkende Kraft (oder die sämtlichen wirkenden Kräfte) an ihm befestigt.

Die drehende Bewegung um den Schwerpunkt kann ihrerseits nur aus ungleichen Momenten der Bewegungsmenge hervorgehen, die im einen und andern Sinne dem Körper mitgetheilt wurden. Diese Ungleichheiten bleiben die nämlichen, wenn man auch sämtlichen Theilen die gleiche Translationsbewegung entzieht oder sich den Schwerpunkt in Ruhe denkt. Daraus die zweite Regel: Die Rotation erfolgt auf gleiche Weise, als würde der Schwerpunkt festgehalten und als wirkten die Kräfte ausschliesslich zur Drehung um denselben ein.

Beginnt am Anfang die drehende Bewegung, um eine stabile Hauptaxe, wie z. B. wenn ein geworfener Thaler eine Drehung in seiner Ebene erhält, so bleibt (abgesehen vom Luftwiderstande) die Stellung der Drehungsaxe während der ganzen parabolischen Translation unverändert. So auch behauptet die Erde, ihrer Translation ungeachtet, eine bleibende Stellung ihrer Drehaxe, weil diese zugleich stabile Hauptaxe des abgeplatteten Erdsphäroides ist.

Viel zusammengesetzter ist die Bewegung, wenn anfänglich die Drehung um eine andere Linie erfolgte. Die Drehaxe stellt sich dann nicht mehr als eine bleibende Linie im Körper dar, sondern ändert von Augenblick zu Augenblick sowohl ihre Richtung im Körper als ihre Richtung im Raume, nach Gesetzen, die hier nicht weiter entwickelt werden können. Nur sei bemerkt, dass es im ganzen Verlauf der Bewegung auch hier eine bestimmte Richtung gibt, für welche das jeden Augenblick wirklich vorhandene Moment der Bewegungsmengen durch Zerlegung nach der senkrechten Ebene ein Theilmoment liefert, das einen unveränderlichen Werth bewahrt.

Bei einem frei geworfenen, von der Inertie drehend in seiner Stellung gehaltenen Körper, kann der Luftwiderstand fortdauernde Abweichungen bewirken, die sogar länger dauern, als das Steigen des Körpers. Der Bumerang der Südseeinsulaner, geschickt schief ansteigend in die Weite geworfen, kehrt in Folge der fortdauernden Drehung nach Erschöpfung der Steigkraft wieder nach der Gegend zurück, woher er kam.

90. Allgemeine Bemerkungen. — 1) Die allgemeinen Bedingungen für die Bewegung eines freien festen Körpers sind nichts anderes als der Ausdruck des an sich klaren Satzes, dass die von allen Massentheilen in einem Zeittheilchen δt gewonnenen Bewegungsmengen, den von den sämtlichen Kräften mitgetheilten gleich sein oder, nach der Art wie d'Alembert es ausdrückt, dass die gewonnenen und entgegengesetzt genommenen mit-

getheilten Bewegungsmengen sich aufheben sollen. Damit werden die Bewegungsbedingungen auf die Gleichgewichtsbedingungen (45) zurückgeführt, indem man die gewonnenen und mitgetheilten Bewegungsmengen als Kräfte behandelt, nach drei rechtwinklichen und unabhängigen Richtungen zerlegt und nun die Bedingungen schreibt 1) dass die Doppelsummen, bezüglich auf die Bewegungen und Kräfte aller Massentheilchen, 2) dass die Summen der Doppelmomente um alle drei Coordinataxen $= 0$ seien. Die Ausführung dieser Grundsätze ist Sache der höhern Mechanik.

2) Führt man in die eben genannten 6 Bedingungsgleichungen die Coordinaten und Geschwindigkeiten des Schwerpunktes, und für die andern Punkte die auf den Schwerpunkt bezogenen relativen Grössen, so zerfallen dieselben, nach den Eigenschaften des Schwerpunktes als Massenmittelpunkt in andere, welche die in (86) genannten Sätze über die Translations- und Rotationsbewegung ausdrücken.

3) Die verwickelte Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt, welche zugleich diejenige eines freien Körpers um seinen Schwerpunkt einschliesst, kann in jedem Zeitaugenblicke δt als eine momentane Drehung um eine bestimmte Linie oder Axe betrachtet werden. Man nennt sie augenblickliche Drehaxe. Im Allgemeinen ändert sie sich von Augenblick zu Augenblick und zwar 1) ihrer Stellung nach im Raume, 2) ihrer Richtung nach im bewegten Körper. Vollständig bekannt ist die Bewegung nur dann, wenn beide Veränderungen bestimmt werden können.

4) Einfacher ist der Fall, wenn der Körper, auf den bewegendende Kräfte gewirkt, sich selbst überlassen bleibt. Erfolgt vorerst die Anfangsdrehung um eine Hauptaxe, so dauert dieselbe (86) ungeändert fort, indem die sämtlichen Fliehkräfte, sei es für sich, sei es mit Hülfe des festen Punktes sich aufheben.

5) Geht die Anfangsdrehung nicht um eine Hauptaxe vor sich, so ist die Bewegung verwickelter, doch lässt sich immer eine im Raume feste Axe finden, für welche aus dem augenblicklichen Drehungsmomente aller Bewegungsmengen durch Zerlegung stets ein constantes Theilmoment entsteht. Die Gesamtbewegung kann nun dargestellt werden durch das Fortrollen eines im Körper festen Conus vom zweiten Grade an einem andern Conus, dessen Scheitel gleichfalls im festen Punkte liegt und dessen Fläche von einer Linie beschrieben wird, die sich wellenförmig um jene im Raume feste Axe fortbewegt. Die augenblickliche Berührungslinie beider Conusflächen ist die jedesmalige augenblickliche Drehaxe. *

Cap. 8. Die Gravitation.

90. Die Kepler'shen Gesetze der Planetenbewegungen. — Die Kenntniss der Bewegungen, welchen die frei im Weltraume schwebenden Himmelskörper folgen, hat zu den wichtigsten Aufschlüssen über die allgemeinsten Naturkräfte und besonders auch über das Wesen der Schwere geführt.

Die Anordnung des Sonnensystems, welches die Sonne und die an ihre Nähe gebundenen, in steter Bewegung begriffenen Planeten umfasst, wurde zuerst von Copernikus (1536) mit vollkommener Klarheit erkannt, indem er gemäss der Meinung mehrerer griechischer Philosophen die Sonne ruhend annahm und von der Erde und den übrigen Planeten umkreisen liess. Kepler (1619) dann gelang es, von der Vermuthung ausgehend, dass das Weltall nach einfachen Grössen und Zahlverhältnissen geordnet sei, aus den astronomischen Beobachtungen seiner Zeit, namentlich denen Ticho Brahe's, die Gesetze nachzuweisen, denen sowohl die Hauptplaneten bei ihrer Bewegung um die Sonne, als die Nebenplaneten bei ihrer Bewegung um die Hauptplaneten gehorchen.

Dieser Kepler'schen Gesetze sind drei:

1) Die Planeten beschreiben elliptische Bahnen, deren einen Brennpunkt die Sonne einnimmt;

2) Während dieser Bewegung durchläuft der Radius vector (die Verbindungslinie beider Körper) in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

3) Die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Cuben der grossen Halbaxen ihrer Bahnen.

Durch das erste dieser Gesetze wird die Natur der ebenen Bahn, in welcher der Planet von einem Minimum (Perihelium) zu einem Maximum (Aphelium) seine Entfernung verändert, genau definirt. Bezeichnen A, B (Fig. 63) die grosse und kleine Halbaxe der Ellipse, e die halbe Excentricität, für welche $e^2 = 1 - \frac{B^2}{A^2}$, r für irgend einen Punkt den Radius vector, der mit A den Winkel α bildet, so ist die Gleichung der Ellipse

$$r = \frac{A(1 - e^2)}{1 + e \cos \alpha}$$

Durch das zweite Gesetz wird die Art und Weise bestimmt, wie die Geschwindigkeit variirt, denn bezeichnen u, u' die Geschwindigkeiten an zwei Stellen, entsprechend den Radien r, r' , und h, h' die Entfernungen der Tangenten vom Brennpunkt c , so hat man

$$u \cdot h = u' \cdot h'$$

Die Geschwindigkeiten verhalten sich also verkehrt wie diese durch die Gestalt der Curve vorgeschriebenen Entfernungen, und wachsen daher von dem Aphelium zum Perihelium wie $A(1 - e)$ zu $A(1 + e)$.

Das dritte Gesetz endlich verknüpft die Bewegungen verschiedener Planeten. Bezeichnet nämlich A, A' die grossen Halbaxen ihrer Bahnen, T, T' ihre Umlaufszeiten, so gibt dasselbe

$$\frac{A^3}{T^2} = \frac{A'^3}{T'^2}$$

Die Gleichung der Ellipse ergibt sich aus der Eigenschaft, dass die Summe der Radien r, r' , aus beiden Brennpunkten an einen Punkt der Curve gezogen, gleich der grossen Axe $2A$ sein muss. Man hat

$$r' = 2A - r$$

Aus dem Dreiecke aber, das von r und r' gebildet wird und als dritte Seite $2Ae$ hat, folgt

$$r'^2 = r^2 + 4A^2e^2 - 4rAe \cos \alpha$$

welche durch Elimination von r' auf die Curvengleichung führt.

92. Die Newton'sche Anziehung. — Die Erklärung der Planetenbewegungen oder vielmehr der Schluss von den Kepler'schen Gesetzen auf die wirkenden Ursachen war Newton (1687) vorbehalten und setzte eine vollkommen klare Vorstellung über die Kräfte und ihre Aeusserungsweise voraus.

Aus der Gestalt der Bahn, als einer ebenen und geschlossenen Linie, folgerte Newton, es müsse die Kraft, welche jeden Augenblick den Körper von der Tangente wegzieht, gleichfalls in dieser Ebene und gegen das Innere der Ellipse wirken, also vermuthlich

gegen den einzig vorhandenen Körper, die im Brennpunkte befindliche Sonne.

Durch Annahme einer solchen Centralkraft, welchem Gesetze sie übrigens gehorche, erklärt sich in der That das zweite Kepler'sche Gesetz. Denn, sei im Punkte a (Fig. 64) die Geschwindigkeit u , so würde der Körper in einem kurzen Augenblick δt den kleinen Weg $ab = u \delta t$ durchlaufen; in dieser Zeit aber zieht die Centralkraft g den Körper um $ba' = \frac{1}{2} g \delta t^2$ gegen C hin und er hat sich wirklich durch aa' bewegt. Im nächsten Augenblick δt wird ebenso $a'b' = aa'$ den Weg auf der Tangente, $b'a''$ die Abweichung durch die Centralkraft und $a'a''$ den wirklichen Weg darstellen. Nun weichen die Dreiecke $ca''a'$ und $c'b'a'$, wenn δt verschwindend klein ist, nicht merklich von einander ab, daher das erstere auch nicht vom Dreiecke aca' , das mit $c'b'a'$ gleich ist. In gleichen Zeittheilchen δt werden also vom Radius gleiche Flächen beschrieben, folglich auch in einer gleichen Zahl derselben oder überhaupt in gleichen Zeiten.

Wirkt in der Ellipse (Fig. 63) eine anziehende Kraft g gegen den Brennpunkt c hin, so lässt sie sich für jede Stelle des Körpers d mit Hülfe des Winkels β zwischen r und der Normale in zwei Kräfte zerlegen. Die eine $g \sin \beta$ wirkt nach der Tangente, verzögert die Bewegung vom Perihelium zum Aphelium, beschleunigt sie von diesem zu jenem; die andere $g \cos \beta$, nach der Richtung der Normale wirkend, hebt die Fliehkraft auf und hält dadurch den Körper auf seiner gekrümmten Bahn. Für letztere hat man

$$g \cos \beta = \frac{u^2}{\rho}$$

wenn ρ der Krümmungsradius, u die Geschwindigkeit des betreffenden Punktes der Curve sind.

Für die entsprechende, jenseits der kleinen Axe liegende Stelle d' der Ellipse sei g' die Anziehung, u' die Geschwindigkeit; ρ und $\cos \beta$ werden den gleichen Werth haben und man erhält

$$\frac{g}{u^2} = \frac{g'}{u'^2}$$

Nun ist nach dem zweiten Gesetz $uh = u'h'$, aber $h = r \cos \beta$, $h' = r' \cos \beta'$ folglich

$$ur = u'r' \quad \text{und eingeführt} \quad gr^2 = g'r'^2$$

Die Anziehung verhält sich also verkehrt wie das Quadrat der Entfernung. Diess Gesetz, hier für gleichliegende Punkte dargethan, lässt sich durch höhere Rechnung bei der Ellipse für alle Punkte als richtig erweisen; diess Gesetz ist sogar das einzige, aus dessen Annahme eine elliptische Bahn hervorgehen kann.

Aus dem dritten Kepler'schen Gesetz lässt sich endlich schliessen, dass die auf alle Planeten wirkende Anziehung, ein und dieselbe nur durch die Entfernung veränderte Kraft ist. Betrachtet man nämlich die wenig verlängerten Ellipsen als Kreise, deren Radien A, A' , so sind $2\pi A$ und $2\pi A'$ die in den Umlaufszeiten T, T' durchlaufenen Wege.

Es entwickeln sich Fliehkräfte $g = \frac{4\pi^2 A}{T^2}$, $g' = \frac{4\pi^2 A'}{T'^2}$, welchen

die Centralkräfte gleich sein müssen; man hat daher

$$\frac{g T^2}{A} = \frac{g' T'^2}{A'}$$

und durch Verbindung mit dem dritten Gesetze Kepler's

$$g A^2 = g' A'^2$$

was zu erweisen war.

93. Weitere Folgerungen. — Wie die Fliehkraft muss die sie aufhebende Centralkraft auf alle Massentheilchen des Planeten wirken und eine Resultirende geben, die der Masse desselben proportional ist. Derselbe Planet wirkt aber auf seinen Nebenplaneten mit einer Kraft, welche ebenfalls von seiner Masse abhängt und daher von allen seinen Theilen ausgeht. Die Resultirende der sämtlichen einzelnen Wirkungen beider Körper kann daher dargestellt werden durch

$$P = \mu \frac{m m'}{r^2}$$

wo μ die Anziehung zweier in der Entfernung 1 gedachten Masseneinheiten ist.

Dass dieser Ausdruck für das ganze Planetensystem Gültigkeit hat, findet seine Bestätigung in der vollständigen Erklärung der Störungen (Perturbationen) der Planetenbewegungen. Genau betrachtet, zeigen diese Bewegungen nämlich kleine Abweichungen von den Kepler'schen Gesetzen, schwache wellenförmige Biegungen der elliptischen Bahnlinien, kleine Geschwindigkeitsänderungen im einen oder andern Sinne — Abweichungen, von denen es vollständig gelungen ist, sich Rechenschaft zu geben, wenn man die im Vergleich zu der grossen Wirkung des Centralkörpers geringen Anziehungen in Betracht zieht, welche, dem obigen Gesetze zufolge, die Planeten gegenseitig auf einander ausüben, Leverier ist es sogar gelungen, aus der Gegenwart solcher Störungen der Uranusbahn, das Dasein und die ganze Bewegung des noch unbekannten Planeten vorauszusagen, der nachher an der berechneten Stelle entdeckt und mit dem Namen Neptun belegt wurde.

Alles führt darauf, die Gravitation sogar, über den Umfang des Sonnensystems hinaus, auf die gegenseitige Einwirkung der Fixsterne überzutragen. Soweit man die Bewegung der Doppelsterne kennt, gehorchen auch sie den Kepler'schen Gesetzen, sobald man letztere auf den Fall ausdehnt, wo, nicht wie im Sonnensystem ein sehr grosser auf einen relativ sehr kleinen Körper, sondern mehr vergleichbare Massen auf einander einwirken. Statt einer Bewegung des einen Körpers allein, beschreiben beide dann elliptische Bahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt als gemeinsamen Brennpunkt und zwar so, dass beide Körper stets auf dem gleichen Durchmesser einander gegenüber stehen und vom Schwerpunkte um Grössen entfernt sind, die sich umgekehrt wie die Massen verhalten. Daraus folgt von selbst, dass wenn der eine Körper sehr gross ist, der gemeinsame Schwerpunkt in das Innere seiner Volumens fallen, er als Centralkörper auftreten wird.

Um endlich die Planetenbewegungen vollständig aufzuklären, sei

bemerkt, dass am Anfang der Dinge eine der Triebkraft beim Wurfe analoge Kraft thätig sein musste, welche seitwärts wirkend, das Hinstürzen des Planeten auf den Centalkörper hinderte. Man beweist durch höhere Rechnung, dass die Bahnen, welche aus einer Anfangsgeschwindigkeit in Verbindung mit der dauernd wirkenden Gravitation hervorgehen, nicht nothwendig Ellipsen sind, sondern in gewissen Fällen Parabeln und Hyperbeln werden können. Merkwürdiger Weise ist die Natur der entstehenden Bahn ganz unabhängig von der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit, sondern einzig abhängig von ihrer Grösse u_0 und der Anfangsentfernung r_0 . Je nachdem

$$u_0 < , = , > \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$$

entsteht eine elliptische, eine parabolische oder hyperbolische Bahn. Während die Planeten elliptischen, folgen die Cometen nahe oder ganz parabolischen Bahnen. Körper, die auf Hyperbeln sich bewegen, könnten Einmal gesehen werden, verschwänden dann aber auf ewige Zeiten.

94. Das Wesen der Schwere. — Schon Newton stellte sich die Frage, ob die irdische Schwere nicht dieselbe, nur auf einen nahen Körper ausgeübte Anziehung sei, welche in grösserer Entfernung die kreisende Bewegung des Mondes bestimmt. Ist diese Voraussetzung richtig, so muss sich die am Monde wirkende Central- oder Fliehkraft f zu der Schwere am fallenden Stein verhalten wie das Quadrat des Erdradius zu demjenigen der Mondbahn oder wie 1 : 3600. Aus der Umlaufszeit des Mondes (39343 Min.) und der Entfernung (51803 Meilen) berechnet, findet man $f = 0,27236$ Centim., was mit 3600 multipliziert 980,496 Centim. gibt, also nahe den Werth der Schwere (980,6). Die Schwere ist also nichts als die von der Erde ausgehende allgemeine Gravitation.

Nicht bloss die Erde als Ganzes, auch grössere Massen derselben üben Anziehung aus. Maskelyne (1772) erkannte zuerst am Shehallienberge in Schottland die Anziehung einer Bergmasse, indem die aus astronomischen Beobachtungen bestimmte Richtung zweier Lothe, zu beiden Seiten des Berges mehr divergirten, als die Krümmung der Erde verursachen konnte. Seitdem ist die Seitenanziehung, welche natürlich im Vergleich mit derjenigen der ganzen Erde sehr klein bleibt und daher die Resultirende nur um wenige Secunden abzulenken vermag, an allen grössern Gebirgen bestimmt erkannt worden.

Vollends erhielt jene Anziehung die Bedeutung einer allgemeinen Eigenschaft aller Materie, als Cavendish (1798) sie selbst an kleinern Körpern nachwies, die er dem störenden Einfluss der Schwere entzog. Zwei kleine Metallkugeln a und a' (Fig. 65) waren an den Enden eines Stabes b befestigt, der als Torsionswage von einem feinen Silberfaden getragen wurde. Man näherte denselben zwei grosse Metallkugeln A, A' von 157 Kil. Gewicht, von der Seite her und beobachtete nun durch ein Fernrohr die Schwingungen, welche der Stab durch die Drehung des Fadens mit und ohne Gegenwart der grossen Kugeln machte. Die schnellern Schwingungen im erstern Falle erwiesen das

Dasein einer Anziehung, welche von der Masse und Entfernung der grossen Kugeln abhing.

So wurde nachgewiesen, dass zwischen allen materiellen Theilen eine anziehende Kraft wirksam ist, welche der Masse direkt und dem Quadrat der Entfernung verkehrt proportional ist.

95. Die Schwere des Erdsphäroids. — Wenn die Schwere aus der Anziehung aller Massentheile der Erde entspringt, so ist sie die Resultirende unendlich vieler Kräfte, welche aus verschiedener Entfernung, nach verschiedenen Richtungen und mit verschiedener der Dichte proportionaler Stärke wirken. Aus dem Newton'schen Anziehungsgesetz folgt aber, dass eine homogene Kugelschale eben so wirkt, als wäre ihre ganze Masse im Centrum concentrirt. Wäre also die Erde eine Kugel aus homogenen Schalen, gleichviel nach welcher Ordnung der Dichte zusammengesetzt, so müsste die Schwere an der ganzen Oberfläche, abgesehen von der Fliehkraft, die gleiche, und derjenigen Kraft gleich sein, welche von der ganzen Masse, im Centrum gedacht, ausgehen würde.

Diese Voraussetzung ist aber nicht richtig, die Erde hat die Gestalt eines abgeplatteten Sphäroids, dessen Aequatorradius nach Bessel zu 6377399, Polarradius zu 6356080 Met. angenommen werden muss. An einem solchen Körper wird die Resultirende von Ort zu Ort an Stärke variiren und nicht genau mehr gegen den Mittelpunkt gerichtet sein. Wie leicht zu ersehen, ist sie am Pole, wo der nahe liegenden Theile mehrere sind, stärker als an dem mehr hervortretenden Aequator. Man beweist, dass auch hier bei Annahme beliebig dichter homogener Schalen und geringer Abplattung ein Ausdruck von der Form (78)

$$g = g_0 + \vartheta \sin^2 \varphi$$

die Veränderung darstellt. Nach Clairaut berechnet man die Grösse ϑ , theoretisch, aus der Fliehkraft am Aequator $f_0 = 3,3912$ Centim. (84) der Abplattung des Erdsphäroids, d. h. der Axendifferenz dividirt durch die grosse Halbaxe $e = 0,0033429$, nach der Formel

$$\vartheta = \frac{5}{2} f_0 - g_0 e$$

welche gibt, da in Centim. (78) $g_0 = 978,1027$, $\vartheta = 5,0825$ was von dem Resultate der Beobachtungen 5,00574 (78) nicht sehr abweicht.

Durch Versuche, wie diejenigen von Cavendish (94), die allerdings, um richtige Resultate zu liefern, sehr vollkommene Apparate und zahllose Vorsichtsmassregeln verlangen, hat sich die mittlere Dichtigkeit der Erde bestimmen lassen. Der Versuch mit der Torsionswaage, angestellt mit einer Kugel von bekanntem Gewicht und in bekannter Entfernung, lässt die Anziehung der Masseneinheit in der Einheit der Entfernung bestimmen und wendet man diesen Werth auf die Erde an, so lässt sich die Dichtigkeit finden, die man derselben beilegen muss, um die beobachtete Schwere an der Oberfläche zu erklären. So wurde die mittlere Dichte der Erde, verglichen mit Wasser, gefunden von Cavendish (1798) zu 5,48, später von Reich (1837) zu 5,44, endlich von Baily (1841) zu 5,67. Es sind diese

Werthe übereinstimmend grösser als die, allerdings weniger genauen, welche Maskelyne und Carlini, 4,713 und 4,837, aus der Ablenkung des Lothes durch Bergmassen abgeleitet, und noch weit grösser als die mittlere Dichte, 2 bis 3 höchstens, der uns bekannten Erdkruste, aus den sie zusammensetzenden Stoffen berechnet. Hiernach lässt sich kaum bezweifeln, wofür noch Gründe anderer Art sprechen, dass die Erde eine nicht homogene, sondern nach Innen an Dichte zunehmende Masse ist.

96. Theoretische Sätze. — Im Vorigen wurde wiederholt die Anziehung einer Massenkugel als von ihrem Centrum ausgehend angenommen. Wir wollen diesen Satz und einige andere elementar entwickeln.

1) Sei in A ein von einem Körper B (Fig. 66) angezogener Punkt. Man zerlege den Körper in conische Elemente, sei ω das Flächenelement der Kugel, Radius = 1, welchen dasselbe einnimmt, δl seine Länge, d seine Dichte, sein Volumen wird $r^2 \omega \cdot \delta l$, also seine Anziehung $d \cdot \omega \delta l$ sein und über den ganzen Durchmesser l ausgedehnt

$$p = d \cdot \omega \cdot l.$$

Hieraus folgt, dass alle Körper B, B', B'' von gleicher Dichte mit gleicher Stärke wirken, sobald sie von einem gleichen Raumwinkel eingeschlossen sind und radial gemessen gleiche Durchmesser haben.

2) Der anziehende Körper bilde eine hohle Kugelschale, in deren Höhlung der angezogene Punkt A (Fig. 67) sich befinde. Wie leicht zu ersehen, wird jede Linie a a' die Schale beiderseits mit einer gleichen Länge l durchdringen; daher werden die Anziehungen $d \omega l$ beiderseits gleich und heben sich auf. Da diess für alle Richtungen gilt, so erleidet der Punkt A keinerlei Wirkung — ein Resultat, das sich gleichfalls auf eine ellipsoidale Schale zwischen ähnlichen Oberflächen ausdehnt.

3) Liegt der Punkt A ausserhalb einer Kugel vom Radius R (Fig. 68), deren Mittelpunkt in der Entfernung r liegt, so liefert das Element ω einen Beitrag $d l \omega \cos \alpha$ zu der längs r gerichteten Resultirenden. Die ganze Resultirende wird also sein

$$P = d S (l \cos \alpha \omega)$$

wo S eine auf alle Theile ausgedehnte Summe ist. Den Winkelraum ω dehne man auf den ganzen Umkreis aus und bezeichne den entsprechenden kleinen Bogenanwachs von α durch $\delta \alpha$, so hat man $\omega = 2 \pi \sin \alpha \delta \alpha$ und

$$P = 2 \pi d S (l \sin \alpha \cos \alpha \delta \alpha)$$

Entspricht dem kleinen Anwachs $\delta \alpha$ die Veränderung δl von l , so folgt aus

$$r^2 \sin^2 \alpha = R^2 - \frac{1}{4} l^2$$

$$\text{vorerst} \quad r^2 \sin^2 (\alpha + \delta \alpha) = R^2 - \frac{1}{4} (l + \delta l)^2$$

und in erster Annäherung

$$r^2 \sin \alpha \cos \alpha \delta \alpha = -\frac{1}{4} l \delta l$$

Eingeführt:

$$P = -\frac{\pi d}{2 r^2} S (l^2 \delta l)$$

Nach Formel II ist diese Summe von $l = 2 R$ bis $l = 0$ genommen $= -\frac{8 R^3}{3}$ und man erhält

$$P = \frac{4 \pi d R^3}{3 r^2} = \frac{M}{r^2}$$

Die Anziehung ist so als wäre die ganze Masse $M = \frac{4 \pi d R^3}{3}$ der Kugel in dem einzigen Centrum zusammengedrängt.

4) Der letzte Ausdruck führt auf das Gesetz für die Abnahme der Schwere, wenn man sich von der Oberfläche der Erde, diese mit constanter Dicke gedacht, nach oben oder unten entfernt.

Sind g und g_0 die Werthe der Schwerkraft in der Höhe (oder Tiefe) H und an der Oberfläche selbst, R der Radius der Erde, so hat man im ersten Fall

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+H)^2} \text{ oder nahe } g = g_0 \left(1 - 2 \frac{H}{R}\right)$$

im zweiten Falle, da die Anziehung der äussern Schichten verschwindet und die wirkenden Massen sich wie $(R-H)^3$ zu R^3 verhalten

$$g = g_0 \frac{R-H}{R} \text{ oder nahe } g = g_0 \left(1 - \frac{H}{R}\right)$$

Die Abnahme nach der Tiefe ist nur halb so rasch als nach der Höhe.

5) In diesen Ausdrücken hat $\frac{1}{R}$, für den mittlern Erdradius (95) $R = 6366739^m$ den Werth 0,00000015706, so dass in H Met. über der mittlern Erdoberfläche und in der geographischen Breite φ (78) in Met.

$$g = 98,06055 (1 - 0,0025524 \cos 2\varphi) (1 - 0,00000031412 H)$$

B. Flüssige Körper.

1. Gleichgewichtserscheinungen.

Cap. 1. Der Druck in Flüssigkeiten.

97. Fortpflanzung des Druckes. — Leichte Verschiebbarkeit der Theilchen, verbunden mit geringer Zusammendrückbarkeit sind die beiden Hauptmerkmale des flüssigen Zustandes (21). Aus beiden Eigenschaften erklärt sich, dass die Gestalt einer Flüssigkeitsmasse veränderlich, das Volumen dagegen nahe constant bleiben wird, was wir vorerst als vollkommen verwirklicht annehmen wollen.

Wirkt ein äusserer Druck von oben auf einen prismatischen festen Körper, so pflanzt sich derselbe auf der Krafrichtung unverändert fort (39), nach den Seiten hingegen nicht. Sobald die Masse aber aus beweglichen Theilen besteht, wie z. B. bei einer Sandmasse in prismatischem Gefässe, tritt sogleich durch ein Ineinanderkeilen der Theilchen eine Seitenwirkung hervor, um so stärker je grösser die Beweglichkeit ist. Vollständig zeigt sich die allseitige Fortpflanzung des Druckes in den Flüssigkeiten, wie man mit Hülfe jeder Spritze, an deren Boden verschieden gerichtete Oeffnungen sich befinden, erkennen kann. Sobald die Oeffnungen gleiche Stellung haben, mögen sie vor-, seit- oder rückwärts gerichtet sein, bildet der Wasserstrahl genau den gleichen Bogen, als Beweis, dass nach allen Richtungen eine gleiche Kraft wirkt.

Nach dem Gesetze der unveränderten Fortpflanzung lässt sich der Druck berechnen, den eine Wand von Seiten einer gepressten Flüssigkeit zu leiden hat. Denn wirkt eine Kraft p (Fig. 69) mittelst einer Kolbenfläche a auf die Flüssigkeit, so wird der Druck $\frac{p}{a}$, der auf die Flächeneinheit fällt, allenthalben an den Wänden sich wieder finden und gegen eine Wand von der Grösse A einen solchen

$$P = p \frac{A}{a}$$

hervorbringen. Verschiedene Wände erleiden also einen Gesamtdruck, der ihrer Fläche proportional ist.

98. Die hydraulische Presse. — Auf das nämliche Gesetz der ungeschwächten Fortpflanzung des Druckes gründet sich die zuerst von **Bramah** (1796) angewandte hydraulische Presse, wohl die wirksamste Vorrichtung zur Erzeugung eines sehr starken Druckes.

Man lässt die Kraft p mittelst eines Hebels l (Fig. 70) auf den kleinen Kolben a eines engen Cylinders wirken und benutzt den Druck P , welchen der Kolben A eines weiten Cylinders, der mit ersterem in Verbindung steht, erleidet. Der benutzte Druck verhält sich zur Kraft an dem kleinen Kolben, wie die entsprechenden Kolbenflächen

oder die Quadrate ihrer Durchmesser D und d . Man hat also, wenn $l : 1$ das Verhältniss der Hebelarme ist

$$P = p \frac{l D^2}{d^2}$$

Solche Pressen hat man vielfach zum Heben der schwersten Lasten, zur Prüfung der Stärke der Körper u. s. f. benutzt.

Für den Gebrauch sind noch drei Nebentheile nothwendig 1) eine Pumpeneinrichtung b , um den kleinen Cylinder, nachdem seine Flüssigkeit in den grossen getrieben worden ist, wieder zu füllen, 2) ein Hahn c oder ein Ventil auf der Verbindungsröhre, um den Rückgang der Flüssigkeit zu hindern und den Druck zu halten, 3) ein Hahn e zur Ableitung der Flüssigkeit aus dem grossen Cylinder, wenn der Druck aufhören soll. Oft findet man noch ein Sicherheitsventil f und ein Manometer g , d. h. ein Mittel, den Druck jeden Augenblick zu kennen, angebracht.

Die Nebenfigur A stellt einen Längsdurchschnitt durch Pumpe und Verbindungsröhre dar, B einen, zu diesem senkrechten Querschnitt durch die Stelle des Ventiles f , des Verbindungshahnes c und Abflusshahnes h .

Auch bei Maschinen dieser Art gilt das allgemeine Gesetz (63), dass Geschwindigkeit in dem Maasse verloren als Kraft gewonnen wird. Da nämlich die aus dem kleinen in den grossen Cylinder getriebene Flüssigkeit ihr Volumen nicht ändert, wird das Steigen des grossen Kolbens zu dem Sinken des kleinen sich umgekehrt wie die Flächen beider oder wie die Kräfte verhalten. *

99. Gleichgewicht der Oberfläche. — Auf jedes Theilchen der Oberfläche einer Flüssigkeit wirken, abgesehen vom äusseren Druck, zwei Kräfte: 1) die Resultirende g aller Kräfte, welchen, wie z. B. der Schwere, das Theilchen direkt zum Angriffspunkte dient, 2) ein von der Flüssigkeit an das Theilchen von innen her fortgepflanzter Druck p . Da der letzte Druck immer zur Oberfläche senkrecht ist, so können beide Kräfte sich nur dann aufheben, wenn sie einander gerade entgegenwirken, also auch g zur Oberfläche senkrecht steht. In der That würde jede andere Richtung längs der Oberfläche eine Theilkraft liefern, welche die beweglichen Theile verschieben könnte.

Ist die Schwere die einzige Kraft, wie bei einem ruhenden Gefässe, so stellt sich die Oberfläche genau horizontal. Nur gegen die Wand des Gefässes hin, bemerkt man ein Steigen oder Sinken der Flüssigkeit als Beweis, dass von der Wand herrührende Kräfte zu der Schwere hinzukommen.

Wird ein cylindrisches Gefäss A (Fig. 71) mit Flüssigkeit um seine verticale Axe B gedreht, so wirken in jedem, um den Radius r von der Axe entfernten, Punkt m zwei Kräfte, horizontal die Fliehkraft $f = w^2 \cdot r$ (82) (wo w die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet), vertical die Schwere g . Bildet dann die Tangente dieser Stelle mit der Verticalen den Winkel α , so wird die Resultirende senkrecht sein, wenn ist (59)

$$w^2 \cdot r \sin \alpha = g \cos \alpha$$

also

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{g}{w^2 \cdot r}$$

Bekanntermaassen gilt diese Beziehung für die Tangente einer Parabel $r^2 = bx$, die ihren Scheitel in der Axe und zum Parameter $b = \frac{2g}{w^2}$ hätte.

Man weist durch höhere Rechnung nach, dass der Scheitel b sich von dem anfänglichen Spiegel aa' um eben so viel senkt, als der Rand cc' sich hebt, indem alsdann das Volumen der Senkung und Hebung einander gleich sind.

Eine Flüssigkeitsmasse, deren Theilchen der gegenseitigen allgemeinen Anziehung (94) unterworfen sind, nimmt ruhend natürlich die Kugelform an, bei der die Theilchen alle möglichst nahe zusammengerückt sind. Rotirt sie allmählig, so gestaltet sie sich zu einem abgeplatteten Sphäroid, doch ist diese Form nur so lange möglich, wie durch höhere Rechnung nachgewiesen wird, als w eine gewisse Grenze nicht übersteigt, so lange nämlich

$$w^2 < 0,1123 \cdot 4\pi \cdot d \cdot \mu$$

wo d die Dichte und μ die Anziehung der Masseneinheiten in der Einheit der Entfernung ist. Jenseits dieser Grenze vermag die Gravitation die Fliehkraft am Sphäroid nicht aufzuheben. Es gibt indess noch andere Formen, selbst Ellipsoide mit 3 ungleichen Axen, welche, von Anfang vorhanden, bei einer bestimmten Rotation sich erhalten können.

100. Druck aus der Schwere der Flüssigkeit. — Im Innern einer schweren Flüssigkeit entsteht ein Druck aus dem Gewichte der Flüssigkeit. Die horizontale Schicht a (Eig. 72) eines cylindrischen Gefässes hat offenbar das Gewicht der überliegenden Flüssigkeit zu tragen oder einen Druck

$$P = a \cdot H \cdot s$$

den man aus dem Produkte der gedrückten Fläche a , der Flüssigkeitshöhe H und des specifischen Gewichtes (Gewicht der Cubikeinheit) s berechnet. Der Druck in verschiedenen Tiefen wächst wie die Höhe der Flüssigkeit. — Spricht man vom Druck ϖ einer Stelle ohne Angabe der Fläche, so denkt man sich den Druck auf die Flächeneinheit gleich ausgedehnt. Es ist daher $\varpi = h \cdot s$ und für eine kleine Fläche δa , gleichviel in welcher Lage,

$$p = \varpi \cdot \delta a.$$

Der Druck ϖ ist für alle Theile einer horizontalen Schicht der nämliche, sonst würde die Fortpflanzung von der einen zur andern Stelle ein Fliessen erzeugen. Er ist desshalb ganz unabhängig von der Gestalt und Weite des Gefässes und einzig bedingt von der Höhe und dem specifischen Gewichte der Flüssigkeit. Solche Schichten von gleichem Druck ϖ heissen Niveauschichten. Horizontal, wenn die Schwere allein wirkt, haben sie, wenn andere Kräfte noch vorhanden sind, einen andern Verlauf. Sei q die Resultierende der auf die Theilchen wirkenden Kräfte, für ein Vol. 1 der Flüssigkeit berechnet. Die Niveauschicht wird zu q senkrecht stehen, soll q nicht längs derselben Bewegung hervorbringen. Der Druck $\varpi \delta a$ auf die kleine Fläche der Niveauschicht wird, wenn man auf der Richtung von q um δs fortschreitet, zunehmen um

$$\delta \varpi \cdot \delta a = q \cdot \delta s \cdot \delta a \text{ oder um } \delta \varpi = q \cdot \delta s.$$

101. Communicirende Gefässe. — Stehen zwei oder mehrere mit einer Flüssigkeit gefüllte Gefässe A, B, durch eine Röhre C (Fig. 73) in Verbindung, so kann das Gleichgewicht einer Niveauschicht a b nur dann bestehen, wenn der Druck ϖ in allen Gefässen, also auch die Höhe h , die gleiche ist. Die Flüssigkeit steht also, wie auch die tägliche Erfahrung lehrt, in communicirenden Gefässen gleich hoch, welches auch Gestalt und Weite derselben ist.

Sind zwei verbundene Röhren A und B (Fig. 74) mit verschiedenen getrennt bleibenden Flüssigkeiten vom specifischen Gewichte s, s' angefüllt (z. B. Quecksilber und Wasser), so verlangt vorerst das Gleichgewicht aller durch das Verbindungsrohr geführten Niveauschichten a b, dass dieses nur von der einen schwerern Flüssigkeit angefüllt sei; zweitens müssen für das Gleichgewicht der beiden Säulen c e und d f die Drucke ϖ und ϖ' einander gleich sein, oder

$$s \cdot H = s' \cdot H'$$

Von der Trennungsstelle an gerechnet, verhalten sich die Höhen umgekehrt den specifischen Gewichten. Wären die beiden Röhren in gleiche Längentheile getheilt und vertical gestellt, so würden die gemessenen Höhen auf das Verhältniss der specifischen Gewichte führen.

Auf diesem Grundsatz beruht der Apparat von Alexander zur Bestimmung des specifischen Gewichts s der Flüssigkeiten, verglichen mit Wasser. Zwei Röhren A, A' (Fig. 75) tauchen unten in die zu prüfende Flüssigkeit B und in Wasser B', stehen oben aber durch eine Röhre C, die man ansaugen kann, in Verbindung. Durch Saugen, wodurch der Luftdruck vermindert wird, steigen die Flüssigkeiten auf Höhen H, H', die sich verkehrt wie die Dichten s und 1 verhalten und die man, auf Eintheilungen, an deren Nullpunkt die Flüssigkeitsspiegel gebracht worden, abliest. — Lampen mit constantem Niveau aus einer kürzern Salzwasser- und einer zum Docht steigenden höhern Oelsäule.

Mehrere nicht mischbare Flüssigkeiten ordnen sich in dem gleichen Gefässe nach ihrem specifischen Gewicht, die dichtere, wenn die Schwere wirkt nach unten, wenn die Fliehkraft wirkt, nach aussen. Allerdings wäre eine andere Anordnung denkbar, könnte man die schwere Flüssigkeit genau horizontal auf die leichtere legen; allein die leiseste Ungleichheit der Trennungsfläche stört auf einzelnen Niveauschichten die Gleichheit des Druckes und veranlasst niedersteigende Strömungen der schwerern, aufsteigende der leichtern Flüssigkeit, bis die Flüssigkeiten sich ausgewechselt haben. Die Anordnung nach dem specifischen Gewichte ist eine stabile Gleichgewichtsstellung mit tiefster Lage des Schwerpunktes, die andere eine labile mit höchster Lage desselben.

Flementenglas aus Quecksilber, Salzwasser, Oel und Weingeist. — Passewin. — Salzwasser und süsses Wasser der Flussmündungen.

102. Druck auf ebene Wände. — Der Gesamtdruck gegen eine z. B. schiefgestellte ebene Wand a eines Gefässes (Fig. 76) ist, da die Kräfte alle parallel wirken, gleich der Summe der gegen alle Theile δa derselben senkrecht gerichteten Kräfte $s \cdot h \cdot \delta a$, folglich

$$P = s \cdot S(h \delta a) = s \cdot H \cdot a$$

wenn H die Höhe der Flüssigkeit über dem Schwerpunkte c der Wand darstellt, für welchen (43) $H = \frac{S(h \delta a)}{a}$ ist.

Wie also eine ebene Wande auch gestellt ist, ob sie von oben oder von unten gedrückt werde, der Gesamtdruck wird berechnet, indem man sich die ganze Wand a horizontal in der Tiefe H des Schwerpunktes denkt.

Anatomischer Heber. — Hydraulischer Blasebalg. — Zersprengen von Fässern durch eine hohe Röhre mit Wasser — Wassersäulenmaschine von dem abwechselnd von oben und unten wirkenden Druck des Wassers getrieben.

Der nach dem vorigen aus dem Schwerpunkte berechnete Gesamtdruck P wirkt aber nicht auf diesen Punkt, sondern der Mittelpunkt der parallelen Kräfte, hier Mittelpunkt des Druckes genannt, liegt tiefer, nach der Seite der grössern Kräfte. Seine Tiefe L wird bestimmt (47) aus

$$P \cdot L = s \cdot S (h^2 \delta a)$$

woraus

$$L = \frac{S (h^2 \delta a)}{H \cdot a}$$

Nennt man z. B. h die Höhe der vertical angenommenen Wand, so findet man den Mittelpunkt e

Rechteck Schwerpunkt $H = \frac{1}{2} h$, Mittelpunkt $L = \frac{2}{3} h$

Dreieck, Basis oben „ $= \frac{1}{3} h$ „ $L = \frac{1}{2} h$

„ Basis unten „ $= \frac{2}{3} h$ „ $L = \frac{3}{4} h$.

An diesem Punkte muss die frei angelehnte Wand eines Gefässes gehalten werden, soll sie nach keiner Seite ausweichen. Da z. B. wird man an Bütten und Standen, die aus einzelnen Bolen gebildet sind, den untern Ring am vortheilhaftesten anbringen.

103. Zerlegung des Druckes. — Der Druck $p = \varpi \cdot \delta a$, den das beliebige Flächenelement δa (Fig. 77), das unter dem Winkel α geneigt ist, erleidet, lässt sich zerlegen in einen verticalen Druck p' und einen horizontalen p'' , welche sind

$$p' = \varpi \cos \alpha \delta a \text{ und } p'' = \varpi \sin \alpha \delta a$$

Nun ist $\delta a' = \delta a \cos \alpha$ die horizontale, $\delta a'' = \delta a \sin \alpha$ die verticale Projection von δa , man hat also

$$p' = \varpi \delta a' \quad p'' = \varpi \delta a''$$

An die Stelle des Druckes gegen ein schiefes Element δa , kann man denselben Druck auf die horizontale und verticale Projection des Elementes wirkend setzen.

Wendet man eine solche Zerlegung auf alle Flächenelemente δa einer gekrümmten Wand $A A'$ an, mag sie von oben oder von unten her gepresst werden, so zerfällt der ganze Druck in einen verticalen Druck P und in einen horizontalen P'

$$P = S (\varpi \delta a'), \quad P' = S (\varpi \delta a'')$$

Der erstere gleich dem Gewichte der Wassersäule von der gedrückten Fläche zum Spiegel der Flüssigkeit, der zweite gleich dem Druck gegen eine entsprechende verticale Wand B . Hätte die Fläche auch eine horizontale Krümmung, so würde man die horizontalen Kräfte noch weiter in Kräfte gegen zwei verticale, zu einander senkrechte Wände zerlegen, Projectionen der gegebenen gekrümmten Wand.

Aus diesen Grundsätzen folgt unmittelbar, dass an einem Gefässe

mit Flüssigkeit alle horizontalen Wirkungen nach entgegengesetzten Seiten sich aufheben, dass ein eingesenkter prismatischer Körper aufwärts gedrückt wird mit einer Kraft gleich dem Gewichte der Flüssigkeitssäule, die er einnimmt, dass der Druck einer oben engen Flasche auf eine Wage immer nur dem wirklichen Flüssigkeitsgewicht, nicht aber dem ganzen Druck auf den Boden entspricht u. s. f.

Cap. 2. Das Schwimmen der Körper.

104. Druck auf einen versenkten Körper. — Ein eingetauchter Körper A (Fig. 78) erleidet von allen Seiten her, senkrecht zu seiner Oberfläche, den Druck der Flüssigkeit. Alle diese der Richtung und Stärke nach verschiedenen Kräfte p können aber (103) in ein System verticaler Kräfte p' und zwei Systeme zu einander rechtwinkliger horizontaler Kräfte p'' zerlegt werden. Jedes der beiden letztern Systeme hebt sich an einem ganz eingesenkten Körper auf und derselbe kann daher auf keine Weise durch die ruhende Flüssigkeit eine Seitenbewegung erhalten. — Die verticalen Kräfte hingegen, an der untern Fläche des Körpers nach oben, an der obern nach unten gerichtet, vereinigen sich in eine Resultirende, welche im Sinne der stärkern Kräfte von unten her wirkt und gleich dem Gewichtsunterschiede der beiden Flüssigkeitssäulen bis zum obern Spiegel ist. Daraus ergibt sich der Archimedisches Satz, dass die Resultirende aller Wirkungen der Flüssigkeit von unten nach oben wirkt und dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit gleich ist.

Dass jeder Körper in Wasser getaucht um das Gewicht des verdrängten Wassers zu leicht erscheint, wird erwiesen, indem man an den einen Arm einer Wage ein hohles cylindrisches Gefäss A (Fig. 79) und an dieses einen vollen Cylinder B von identischem Volumen anhängt. Hat man die Wage durch Gewichtssteine zum Einspielen gebracht, und lässt den Körper B in das Wasser tauchen, so wird das Gleichgewicht durch genaues Anfüllen des hohlen Cylinders wieder hergestellt.

Ist das Gewicht P eines Körpers grösser, gleich oder kleiner als das aus dem Volumen V des Körpers und dem specifischen Gewichte s der Flüssigkeit berechneten $V \cdot s$ der letztern, so erfolgt ein Sinken, Schweben oder Steigen. Die Kraft, die hiebei wirkt, ist wegen der Unzusammendrückbarkeit der Flüssigkeiten in verschiedenen Tiefen die nämliche; daher wäre das Steigen oder Sinken gleichmässig beschleunigt, würde nicht der sehr grosse Widerstand die Bewegung weit früher als in der Luft (69) in eine gleichförmige umwandeln.

105. Oberflächliches Schwimmen. — Gelangt der Körper P , der leichter ist als das verdrängte Wasser $V \cdot s$, zur Oberfläche, so wird der Körper theilweise hervorragen, bis das noch verdrängte Wasser seinem Gewichte P gleich ist. Man hat dann also, wenn v das noch eingetauchte Volumen, S das specifische Gewicht des homogen angenommenen Körpers ist

$$P = V \cdot S = v \cdot s$$

Der eintauchende Theil v verhält sich zum ganzen Volumen V wie das specifische Gewicht des Körpers S zu dem der Flüssigkeit s .

Auf verschiedenen Flüssigkeiten, deren specifisches Gewicht s, s' , zum Schwimmen gebracht, sinke der nämliche Körper mit dem Volumen v, v' ein, man wird haben

$$P = v \cdot s = v' \cdot s'$$

es verhalten sich die eintauchenden Theile v, v' umgekehrt wie die specifischen Gewichte der Flüssigkeiten.

Endlich bringe man zwei ganz gleiche Volumina V verschiedener Körper, deren specifisches Gewicht S, S' , auf der nämlichen Flüssigkeit zum Schwimmen. Sind v, v' die eintauchenden Theile, so erhält man

$$V S = v s \text{ und } V S' = v' \cdot s$$

folglich

$$S v' = S' v$$

Die specifischen Gewichte verhalten sich direkt wie die eintauchenden Theile.

Um einen Körper, der schwerer als Wasser ist, zum Schwimmen zu bringen, verbindet man ihn mit einem leichtern von angemessener Grösse. Seien V das Vol., S das specifische Gewicht des schweren Körpers, V', S' die entsprechenden Grössen des leichtern, damit beide verbunden schweben, muss

$$V S + V' S' = (V + V') s.$$

also muss wenigstens

$$V' = V \frac{S - s}{s - S'}$$

Für einen hohlen Raum hat man einfach zu setzen $S' = 0$.

Schwimmer zu verschiedenen Zwecken — Prony's Abfluss-Apparat für constanten Stand. — Schiffskameele.

106. Stabilität schwimmender Körper. — Die im Frühern (104, 105) aufgestellten Bedingungen für das Schweben und das oberflächliche Schwimmen drücken nichts anderes aus, als dass der Körper weder steige noch sinke, genügen aber nicht, um das Gleichgewicht vor Drehung an Ort und Stelle zu sichern. Das Gewicht P des Körpers A (Fig. 78) kann im Schwerpunkt a desselben, der Wasserdruck Q als eine aufwärts gerichtete Gegenkraft im Schwerpunkt b des verdrängten Wassers wirkend angenommen werden. Beide Kräfte werden erst dann sich vollständig aufheben, wenn ihre Richtungen oder Angriffspunkte in Eine Verticale fallen.

Bei einem ganz eingetauchten schwebenden Körper fallen beide Schwerpunkte in der Regel nur dann zusammen, wenn der Körper eben so homogen ist, als das Wasser. Dann aber bleibt der Körper in jeder Stellung, wie im Schwerpunkte gehalten, im Gleichgewicht. Wo nicht, dreht sich der Körper in die stabile Gleichgewichtsstellung, wo sein Schwerpunkt möglichst tief, d. h. vertical unter dem des verdrängten Wassers liegt. Die höchste Stellung bezeichnet, wie leicht zu ersehen, eine labile Stellung.

Bei einem oberflächlich schwimmenden, zugleich homogenen Körper, kann der Schwerpunkt des Körpers niemals unter den der

Flüssigkeit fallen. Aehnlich wie bei einem auf einer Unterlage ruhenden Körper (49) ist die stabile Stellung diejenige, für welche von allen benachbarten Stellungen mit gleichem eintauchendem Volumen der Schwerpunkt am wenigsten hoch über dem Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit liegt. So hat ein Holzprisma liegend eine festere Stellung als stehend.

Die Rücksichten der Stabilität kommen namentlich bei der Gestalt und Belastungsweise der Schiffe in Betracht. Selbst bei der geneigtesten Stellung, welche Wind und Wellen dem Schiffe geben können, muss der Wasserdruck zur Wiederaufrichtung, nicht zur Vermehrung der Neigung einwirken. Sei A (Fig. 80) der durch den Schwerpunkt a gelegte verticale Durchschnitt des Schiffes, in welchem auch bei geneigter Stellung der veränderliche Schwerpunkt b des verdrängten Wassers B liegt. Die in a und b befestigten Kräfte P und V wirken offenbar zur Wiederaufrichtung ein, wenn diejenige des Wasserdruckes auf Seite der Neigung liegt, oder wenn der Durchschnittspunkt c ihrer Richtung mit den ursprünglichen Verticalen des Schwerpunktes a, — welchen Durchschnittspunkt man des Schiffes Metacentrum heisst — über und nicht unter dem Schwerpunkte liegt. Je tiefer überhaupt durch Ballast oder Befrachtungsweise der Schwerpunkt a des Schiffes verlegt wird, desto grösser ist das Moment des Wasserdruckes zur Wiederaufrichtung.

107. Mathematische Bedingungen. — Man gelangt auf dem folgenden Wege zu der mathematischen Bedingung für die Stabilität eines schwimmenden Körpers.

1. Wird der Körper (Fig. 81) aus der stabilen Stellung um den Winkel ϑ gedreht, so geht der Querschnitt der Wasserfläche von AB in A'B' über und dreht sich um einen Durchmesser bc. Soll das eintauchende Volumen V das gleiche bleiben, so muss der hinzukommende Wasserkeil v dem wegfallenden v' gleich sein. Ein solcher Keil v ist aber die Summe der kleinen Prismen, die das Flächenelement δa zur Basis und $r \sin \vartheta$ zur Höhe haben; daher führt $v = v'$, nach Weglassung des gemeinsamen Faktors $\sin \vartheta$ auf

$$S(r \delta a) = S(r' \delta a')$$

Diese Bedingung bezeichnet einen durch den Schwerpunkt der Fläche gehenden Durchmesser (48). Um einen solchen also dreht sich der oberflächliche Querschnitt.

2. Durch Neigung des Körpers hat sich die Verticale, welche den Schwerpunkt d des Körpers P und den c des verdrängten Wassers $Q = V$ enthält, gleichfalls um ϑ gedreht, e liege tiefer als d, was der einzige ungünstige Fall ist. Sämmtliche Kräfte wirken vertical und geben folgende Momente: zum Umsturze 1) das des aufwärts gerichteten Wassergewichtes V ; 2) das des Körpergewichtes P ; 3) das der aufwärts gerichteten Kraft des hinzugekommenen Keiles v ; 4) das der abziehenden daher niederwärts gerichteten Kraft des Keiles v' . Das Moment 1) ist grösser als 2), da $Vs = P$ um

$$V \cdot s \cdot l \cdot \sin \vartheta$$

wenn l die Entfernung der beiden Schwerpunkte auf der Verticalen ist. Die Momente der Keile sind die Momente aller Elemente $r \sin \vartheta \delta a$, also

$$s \cdot S(r^2 \delta a) \cdot \sin \vartheta$$

ausgedehnt auf den ganzen oberflächlichen Querschnitt oder auf beide Keile. Die Stabilität verlangt, dass die letztere Grösse die erstere übertreffe, oder dass

$$S(r^2 \delta a) > V \cdot l$$

3. Diese Bedingung muss für alle Neigungen erfüllt sein, also auch für den Durchmesser bc der $S(r^2 \delta a)$ am kleinsten gibt. Bei einem Schiffe ist

das der Längendurchmesser, für welchen die Theile am wenigsten von demselben entfernt sind.

108. Bewegungen schwimmender Körper. — Ein schwimmender Körper kann zwei Arten von Bewegungen annehmen, solche im horizontalen und solche im verticalen Sinne.

Da alle horizontalen Kräfte sich aufheben, können die ersten dieser Bewegungen einzig und allein von fremden Kräften herrühren, von der Wirkung des Windes auf die Segel, von dem Drucke der Ruder oder der Welle der Schaufelräder auf die festen Theile des Schiffes u. s. f. Für diese Bewegungen gelten die beiden allgemeinen Gesetze (89), dass die Kräfte 1) eine Translation des Schiffes bewirken, als wären sie sämmtlich an dem Schwerpunkte befestigt, 2) eine Rotation, als wäre der Schwerpunkt festgehalten. Die Berechnung wäre einfach, wenn nicht der unbekannte und veränderliche Widerstand des Wassers gleichfalls zu den wirkenden Kräften gezählt werden müsste. Schreitet das Schiff in paralleler Stellung fort, so halten sich nothwendig die Momente der horizontalen Kräfte um den Schwerpunkt das Gleichgewicht.

Sind keine fremden Kräfte vorhanden, so bestehen die Bewegungen in Schwankungen oder Oszillationen um die stabile Stellung, wobei, da alle Kräfte der Schwere und des Wasserdruckes vertical wirken, der Schwerpunkt (abgesehen vom Widerstande und den Reibungen des Wassers) sich nur auf der Verticalen bewegt. Im allgemeinen kann man zwei Arten von Oszillationen unterscheiden: 1) Drehungen hin und her um eine gleiche oder veränderliche horizontale Linie als Axe, wobei das eingetauchte Volumen gleich gross bleibt, 2) Hebungen und Senkungen des ganzen Körpers in paralleler Stellung unter abwechselnder Vergrößerung und Verkleinerung des eingetauchten Volumens.

Die einen und andern Schwingungen hängen im allgemeinen von einander ab, ausser in dem Falle, wo die drehenden Schwankungen in der gleichen Verticalebene vor sich gehen und beim Gleichgewicht die Verticale des Schwerpunktes des Körpers auch den Schwerpunkt des oberflächlichen Querschnittes trifft. Dann werden die beiden Arten von Schwankungen unabhängig von einander, die eine hängt einzig ab von der anfänglichen Hebung und Senkung des Körpers, die andere von der anfänglichen Neigung. Man kann alle solchen Schwankungen mit Pendelbewegungen vergleichen, doch sind die störenden Ursachen, Widerstand, Reibung, Mitbewegung der Flüssigkeit viel bedeutender und bringen den Körper viel schneller wieder zur Ruhe.

Man beweist durch höhere Rechnung, dass im letztern Falle, wenn $S(r^2 \delta a)$ und $V \cdot s$ die in 107 bezeichneten Grössen sind und $K = S(m r^2)$ das Moment der Inertie (75) des Schiffes für eine durch den Schwerpunkt gelegte zur Ebene der Schwingungen senkrechten Axe darstellt, endlich $a = S(\delta a)$ den Inhalt des oberflächlichen Querschnittes bezeichnet:

1) Die verticalen Oszillationen des Schwerpunktes der Schwingungszeit eines einfachen Pendels von der Länge

$$l = \frac{V}{a}$$

entsprechen;

2) die drehenden Schwingungen solchen von der Pendellänge

$$l = \frac{V \cdot K}{M[S(r^2 \delta a) \pm V \cdot s]}$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit beim Gleichgewicht höher oder tiefer liegt als derjenige des Schiffes. *

Cap. 3. Specifisches Gewicht und Dichte der Körper.

109. Vorbemerkung. — Die Kenntniss des specifischen Gewichtes der Körper, d. h. des Gewichtes ihrer Cubikeinheit, ist für alle Berechnungen des Gewichtes aus dem Volumen, z. B. bei allen Berechnungen des Druckes der Flüssigkeiten, unentbehrlich. Die Bestimmungen desselben bilden daher für den Physiker und Chemiker eine der ersten und wichtigsten Untersuchungen.

Da für einen Körper, dessen Gewicht P und Volumen V ist, das specifische Gewicht S erhalten wird aus

$$S = \frac{P}{V}$$

so wird S direkt durch Abwägen eines gemessenen Volumens V des Körpers bestimmt. Diess Mittel lässt sich mit Hülfe von Gefässen mit bekanntem Inhalte oder calibrirter Eintheilung ohne Schwierigkeit anwenden; bei festen Körpern jedoch, deren Gestalt meist unregelmässig und nicht genau messbar ist, nicht anders als durch Versenken in Flüssigkeit und Beobachtung ihrer Volumvergrösserung. Die Ausführung dieses Verfahrens schliesst aber grössere Genauigkeit aus.

Kann man aber auf irgend eine Weise von einem Körper die Dichte D bestimmen, nämlich das Verhältniss seiner Masse oder seines Gewichtes zu denen eines gleichen Volumens Wassers (30), so wird diese unbenannte Zahl, mit dem genau bekannten Gewichte der Cubikeinheit Wasser multipliziert, auf indirektem Wege das specifische Gewicht des Körpers liefern. Wählt man als Einheiten von Gewicht und Volumen die zusammengehörenden Einheiten Kilogr. und Cubikdecimeter, Gramm und Cubikcentimeter, Milligramm und Cubikmillimeter, so werden Dichtigkeit und specifisches Gewicht durch die gleichen Zahlen ausgedrückt sein, wie im Folgenden angenommen wird.

Da übrigens

$$D = \frac{P}{p}$$

so bestimmt man die Dichte D aus dem Gewichte P des Körpers und demjenigen p eines gleichen Volumens Wasser. P wird durch eine gewöhnliche Wägung, p durch die folgenden beiden Verfahren gefunden.

110. Die hydrostatische Wage. — Mit diesem Namen bezeichnet man eine Wage, deren eine kürzer gehängte Schale A zum Anhängen des Körpers B mittelst eines dünnen Fadens eingerichtet ist (Fig. 82). Erst nimmt man das Gewicht P des frei hängenden Körpers, dann den Verlust bei vollständigem Einsenken in das Wasser C, welcher Verlust das verdrängte Wassergewicht p darstellt (104) und dividirt das Erste durch das Letzte.

Das Verfahren lässt sich in seiner Einfachheit nicht anwenden 1) bei Körpern die leichter als Wasser sind. Man muss sie mit einem

schwereren verbinden, dessen Gewichtsverlust p'' von dem gemeinsamen Gewichtsverluste p' in Abzug gebracht wird, da dann

$$D = \frac{P}{p' - p''}$$

2) bei Körpern, die in Wasser auflöslich sind, daher während des Versuches ihr Gewicht verändern. Man prüft sie in einer andern wirkungslosen Flüssigkeit, deren Dichtigkeit d man kennt. Findet man D' , so ist die wahre Dichtigkeit

$$D = D' \cdot d$$

3) bei porösen Körpern, bei welchen man bald nach der wahren, bald nach der scheinbaren Dichtigkeit fragt. Die wahre, diejenige der festen Masse allein, würde eine vollständige Durchdringung mit Wasser voraussetzen, die nicht erhältlich ist; der Körper muss daher zerstossen und durch das folgende Verfahren geprüft werden. Die scheinbare Dichte, alle Poren mit Luft erfüllt, wird erhalten, indem man den Körper mit einer gegebenen Menge Wachs oder Pech überzieht, deren Gewichtsverlust im Wasser man kennt und von dem ganzen Gewichtsverluste in Abzug bringt.

Endlich dient die hydrostatische Wage für Flüssigkeiten, indem man den Verlust eines gleichen angehängten Körpers in der zu prüfenden Flüssigkeit und in Wasser untersucht und, da sie einem gleichen Volumen zugehören, als P und p zur Rechnung benutzt.

III. Das constante Gefäss. — Ein Gläschen oder Fläschchen von stets gleichem Volumen erspart die Anwendung einer besondern Wage. Ein recht constanter Verschluss wird entweder mittelst eines guteingeschliffenen Glasstöpsels, oder, was eben so genau ist, mittelst einer auf den genau abgeschliffenen Rand gelegten kleinen Glasplatte A erhalten (Fig. 83). Bei jeder Wägung wird natürlich das Gewicht von Gefäss und Platte abgezogen.

Zur Bestimmung der Dichte einer Flüssigkeit füllt man den gleichen Inhalt mit der Flüssigkeit, bei einem zweiten Versuche mit Wasser, und erhält sofort die Grössen P und p . Nur achte man auf vollständiges Reinigen und Austrocknen des Gefässes, auf Entfernung aller Luftblasen, auf vollständiges Wegnehmen der ausgeflossenen Flüssigkeit mittelst Seidenpapier u. s. f.

Statt eines abgeschlossenen Gefässes wendet man für Flüssigkeiten wohl auch eine kleine Glasampulle C mit zwei feinen röhrenförmigen Oeffnungen an, an denen zwei Marken α , α' die Grenzen des Volumens bezeichnen.

Bei festen Körpern sind drei Wägungen erforderlich: 1) des festen Körpers, wodurch P erhalten wird, 2) des Wasserinhaltes p' , 3) des Wassers mit hineingelegtem Körper p'' . $p'' - p'$ bezeichnet die Vermehrung des Gewichtes von der zweiten zur dritten Wägung oder den Ueberschuss von P über das gesuchte verdrängte Wasser p . Da also $p = P - (p'' - p')$ so folgt

$$D = \frac{P}{P + p' - p''}$$

Diess Verfahren, das, abgesehen die mehreren Manipulationen, gleichfalls einer grösseren Genauigkeit fähig ist, passt namentlich für Körper, die man nur in kleinen Stücken oder Körnern besitzt.

112. Correktionen. — Handelt es sich bei den beiden vorhergehenden Verfahren um etwas genaue Bestimmungen, so bedarf es, ausser einer sorgfältigen Ausführung der Wägungen, noch dreier Correktionen:

1) Der Reduktion auf den leeren Raum. Körper und Gewichtssteine in der Luft benutzt, erleiden, analog wie ein in Wasser getauchter Körper (104), eine Gewichtsverminderung gleich dem Gewichte der verdrängten Luft und ihr Gewicht muss daher um dieses vermehrt werden;

2) Der Reduktion des Körpers auf 0^0 , der bei Vergleichen angenommenen Normaltemperatur. Bei der zufällig vorhandenen Wassertemperatur hat er ein anderes Volumen und verdrängt eine andere Wassermenge;

3) Der Reduktion des Wassers auf 4^0 , derjenigen Temperatur, für welche die Dichte des Wassers als Einheit gilt.

Die Berechnung dieser Correktionen ist die folgende: Man bezeichne mit

P, p, p' das wahre Gewicht des Körpers und der Gewichtssteine in beiden Wägungen, im leeren Raum;

$S, \frac{1}{k} S, \frac{1}{k'} S$ das specifische Gewicht des Körpers bei 0^0 , bei der Lufttemperatur t der ersten Wägung und der Wassertemperatur T der zweiten;

s, s' das specifische Gewicht der Gewichtssteine bei der Lufttemperatur t, t' beider Versuche;

σ, σ' dasselbe für die Luft selbst in beiden Fällen;

Σ dasjenige des Wassers bei T Grad.

Da $P \frac{k}{S}, P \frac{k'}{S}$ und $\frac{p}{s}, \frac{p'}{s'}$, die Volumina des Körpers und der Gewichtssteine bei beiden Wägungen sind, so erhält man die verdrängten Luft- und Wassergewichte nach der Reihe durch Multiplication mit $\sigma, \Sigma, \sigma, \sigma'$. Die beiden Wägungen führen dann auf die Gleichungen

$$\text{Wägung in der Luft} \quad P \left(1 - \frac{k \sigma}{S}\right) = p \left(1 - \frac{\sigma}{s}\right)$$

$$\text{Wägung im Wasser} \quad P \left(1 - \frac{k' \Sigma}{S}\right) = p' \left(1 - \frac{\sigma'}{s'}\right)$$

Setzt man zur Abkürzung die kleinen Grössen $\frac{\sigma}{s} = i, \frac{\sigma'}{s'} = i',$

$\frac{k \sigma}{S} = I,$ eliminirt aus beiden Gleichungen P und zieht den Werth von S heraus, so folgt

$$S = \frac{p (1 - i) k' \Sigma - p' (1 - i') k \sigma}{p (1 - i) - p' (1 - i')}$$

Aus S lässt sich dann auch das wahre oder absolute Gewicht P des Körpers finden, nämlich aus der ersten Gleichung

$$P = p \frac{1 - i}{1 - I}$$

Für eine erste Annäherung der kleinen Grössen i , i' und I erhält man

$$S = \frac{p k' \Sigma - p' k \sigma}{p - p'} + \frac{p p'}{(p - p')^2} (k' \Sigma - k \sigma) (i - i'), \quad P = p (1 + I - i)$$

Sind die beiden Lufttemperaturen der zwei Wägungen, t , t' gleich also auch $i = i'$, was in einem kühlen, schattigen Raume leicht zu erhalten ist, so folgt einfacher:

$$S = \frac{p k' \Sigma - p' k \sigma}{p - p'}$$

Die Bestimmung des specifischen Gewichtes ist dann unabhängig von s , s' oder von der Natur der Gewichtssteine, was für P nicht der Fall ist, da

$$P = p \left(1 + \frac{K \sigma}{S} - \frac{\sigma}{s} \right)$$

Die Grössen i , i' , I hängen von der Beschaffenheit der Luft ab, auf welche Druck, Temperatur und Feuchtigkeit Einfluss haben, die beiden ersten Grössen ferner von der Wärmeausdehnung der Gewichte, die letzte von der Ausdehnung des Körpers.

Ist σ_0 das specifische Gewicht der atmosphärischen Luft bei 0° und 760 Millim. Druck, so hat man, wie später erläutert wird, bei t° und b Millim. Druck

$$\sigma = \sigma_0 \frac{b}{760} \cdot \frac{1}{1 + \gamma t}$$

wo $\gamma = 0,003667$ den Coefficienten der Luftausdehnung bezeichnet.

Sind die Coefficienten der Längenausdehnung für den Körper und die Gewichte α und α' , so hat man

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} (1 + \alpha' t)^3, \quad k = (1 + \alpha t)^3, \quad k' = (1 + \alpha T)^3$$

Man erleichtert die Berechnung durch 3 Tafeln, welche geben:

1) σ aus b und t und dem Werthe σ_0 für atmosphärische Luft = 0,001292770;

2) $\frac{1}{s}$ und $\frac{1}{s'}$, aus t und t' und dem Coefficienten α' der für

Messinggewichte nach Schumacher $\alpha' = 0,000018785$ für Platingewichte $\alpha = 0,000009$ ist;

3) Σ aus der Temperat. T

Zu einer genauen Berechnung wäre α , die Ausdehnung des Körpers, gleichfalls nothwendig. Meist kennt man sie nicht; dann ist der einzige Weg einer genauen Bestimmung, die Versuche bei 0° oder nahe bei 0° anzustellen, da dann k , k' zu 1 werden.

113. Das Gewichts-Aräometer. — Wenn keine grosse Genauigkeit verlangt wird, kann die Dichte mit Hülfe der Senkwagen oder Aräo-

meter bestimmt werden, schwimmende Körper, deren ungleiches Einsinken gleichsam das Spiel einer Wage ersetzt.

Das Gewichts-Aräometer von Nicholson besteht aus einem hohlen Cylinder A (Fig. 84) durch eine Beschwerung vertical gehalten und oben und unten in a und b mit Schalen versehen. Die obere Schale wird von einem Stäbchen getragen und mit veränderlichen Gewichten immer so belastet, dass, an einer Marke c geprüft, der eintauchende Theil der gleiche bleibt.

Sind die Gewichte p' erforderlich, um das Aräometer für sich bis zur Marke zum Sinken zu bringen, wenn aber der Körper auf a gelegt wird, nur noch diejenigen p'' , so wird $P = p' - p''$ das Gewicht des Körpers sein. In die untere Schale b gelegt, bedürfe man der Gewichte p''' , so stellt $p = p''' - p''$ die Gewichtsverminderung oder das verdrängte Wassergewicht dar. Man hat daher

$$D = \frac{p' - p''}{p''' - p''}$$

Zur Prüfung einer Flüssigkeit bedarf man überdiess der Kenntniss des Gewichtes Q des Instrumentes selbst. Diese Grösse muss den in der Flüssigkeit und im Wasser erforderlichen Gewichten p' , p'' beigezählt werden, will man in beiden Fällen die Gewichte des gleichen verdrängten Volumens erhalten. Hieraus folgt

$$D = \frac{Q + p'}{Q + p''}$$

114. Die Skalen-Aräometer. — Eine andere Art sehr bequemer Aräometer dient ausschliesslich für Flüssigkeiten. Statt durch verschiedene Gewichte ein gleiches Einsinken zu bewirken, wird bei gleichbleibendem Gewicht das verschiedene Einsinken beobachtet, zu welchem Zwecke das Instrument mit einer aus dem Wasser ragenden Eintheilung versehen ist. Ihrer äussern Form nach sehr mannigfach (Fig. 85), lassen sich diese Instrumente sämmtlich unter drei Classen bringen.

1) Solche, welche die Dichtigkeit bestimmen lassen. Dahin gehören: 1) das Densimeter, welches dieselbe, — Wasser gleich 100 gesetzt, — direkt angibt, 2) dann das Volumeter, an welchem man das eingetauchte Volumen, dasjenige im Wasser wieder zu 100 angenommen, abliest. Beobachtet man an letzterem in einer Flüssigkeit die Zahl n , so folgt aus der Proportion (105)

$$D : 1 = 100 : n, \text{ mithin } D = \frac{100}{n}$$

Die Theile der Skale am Volumeter sind gleich; am Densimeter nehmen sie nach unten ab. Geht nämlich das eingetauchte Volumeter über von V in $V + v$, die Dichte aber ändere von D auf $D + d$, so folgt aus

$$\frac{V + v}{V} = \frac{D}{D + d} \text{ der Werth } v = -V \frac{d}{D + d}$$

v hat entgegengesetztes Zeichen und wird immer kleiner, je grösser D .

Nach G. G. Schmidt construirt man die Eintheilung des Densimeters (Fig. 86) durch Einsenken in Wasser und eine andere Flüssigkeit von be-

kannter Dichtigkeit, die sich wie $10 + n : 10$ verhält. Der Zwischenraum $a b$ der beiden gefundenen Punkte soll in n Theile, gleichen Dichtigkeitszunahmen entsprechend, eingetheilt werden. Zu dem Ende messe man auf der Senkrechten $c a d$ zu $a b$ nach $a c$ hin n , nach $a d$ 10 gleiche Theile von beliebiger Grösse. Man ziehe $c b$ bis nach e , auf der Parallelen zu $a b$. Die Linie $e f$ nach einem Theile n' von $a c$ gezogen, bezeichnet auf $a b$ den Punkt g , entsprechend der Dichte $10 + n'$. Es soll nämlich nach dem vorigen:

$$a b : a g = \frac{n}{10 + n} : \frac{n'}{10 + n'}$$

Diese Proportion folgt aber aus den ähnlichen Dreiecken $c a b$, $c d e$ einerseits, $f a g$, $f d e$ andererseits, welche geben

$$a b = d e \frac{n}{10 + n} \text{ und } a b = d e \frac{n'}{10 + n'}$$

2) Die Procent-Aräometer, welche die Zusammensetzung einer Flüssigkeit aus zwei andern von verschiedenem specifischen Gewichte angeben. Dahin gehören die Alcoholometer, die Säuremesser u. s. f., an denen man den Gehalt an absolutem Alcohol (vom specifischen Gewichte 0,793) oder concentrirter Säure, dem Volumen nach, auf 100 Vol. der Mischung mit Wasser abliest; dann auch die Salz-, Salpeter-, Alaunspindeln, welche die Gewichtsprocente anzeigen, die in 100 Gewichten Wasser aufgelöst sind. Unzuverlässiger wird die Anwendung dieser Aräometer bei Flüssigkeiten, die aus mehreren Stoffen bestehen, wie bei Wein, Most, Bier, Milch u. s. f., da die Veränderungen nicht von demjenigen, den man bestimmen will, allein abhängen.

Die Eintheilung der Procent-Aräometer muss versuchsweise durch Einsenken in bekannte Mischungen gebildet werden, indem die Vereinigung zweier Stoffe oft von Contractionen oder Ausdehnungen begleitet ist, deren Gesetze man nicht kennt.

3) Aräometer mit willkürlicher Skale. Die Eintheilung hat gleiche Theile und wird an jedem Instrumente auf zwei vorgeschriebene Normalpunkte eingestellt. Die Bedeutung der Theile, an sich unbekannt, kann aber durch besondere Versuche ermittelt und in Tafeln gebracht werden. Aus der grossen Zahl solcher Instrumente wollen wir einzig des Beaumé'schen erwähnen, das für schwerere und leichtere Flüssigkeiten als Wasser in folgender Weise construirt wird. Die Normalpunkte sind

für schwerere Flüssigkeiten	0° im reinen Wasser.
	15° in 17 Th. Wasser und 3 Th. Kochsalz.
für leichtere Flüssigkeiten	0° in 9 Th. Wasser und 1 Th. Salz.
	100° im reinen Wasser.

Nach Francoeur berechnet man die Dichte D eine Flüssigkeit aus dem abgelesenen Grade n des Beaumé'schen Aräometers mittelst der Ausdrücke

$$D = \frac{152}{152 - n} \text{ und } D = \frac{146}{136 + n}$$

je nachdem die Flüssigkeit schwerer oder leichter als Wasser ist; doch lässt sich schon die zweite Decimale nicht mehr verbürgen.

115. Dichte verschiedener Körper. — Die folgende Tafel enthält die Dichte einiger der gewöhnlichsten Substanzen.

Feste Körper.

Platin (gehämm.) . . .	21,359 Meissn.	Alabaster	2,876 Briss.
Gold (gehämm.) . . .	19,362 Briss.	Marmor (carrar.) . . .	2,717 Briss.
Blei (gegoss.) . . .	11,352 Briss.	Bergkristall (hell) . . .	2,690 Mohs.
Palladium (gegoss.) . .	11,300 Wollast.	Smaragd (grün)	2,678 Mohs
Silber (gehämm.) . . .	10,511 Briss.	Feldspath (gemeiner) . .	2,574 Rose
Wismuth (gegoss.) . . .	9,823 Briss.	Porzellan (chinesisch.) .	2,385 Briss
Kupfer (gegoss.) . . .	8,946 Berzel.	Pottasche	2,264 Karst
Kobalt (gegoss.) . . .	8,513 Berzel.	Glaubersalz	2,246 Muschb.
Kanonengut	8,440 Baumg.	Kupfervitriol (natürl.) .	2,213 Mohs
Messing (gegoss.) . . .	8,396 Briss.	Kochsalz	2,078 Karst
Nickel (gegoss.) . . .	8,279 Richt.	Eisenvitriol	1,840 Hassenf.
Stahl (weicher)	7,833 Briss.	Alaun	1,714 Muschb.
Eisen (weiches)	7,790 Karst.	Bittersalz	1,660 Hassenf.
Zinn (gegoss.)	7,291 Kupff.	Salpeter	1,621 Hassenf.
Gusseisen	7,207 Briss.	Diamant (heller)	3,521 Briss.
Zink (gegoss.)	6,862 Berzel.	Glanzkohle (Sachsen) . .	1,482 Mohs
Antimon (gegoss.) . . .	6,702 Briss.	Steinkohle (cannelcoal)	1,270 Thoms.
Arsenik (natürl.) . . .	5,766 Mohs	Bernstein (honiggelb)	1,081 Mohs
Natrium (rein)	0,972 Gay-L.	Ebenholz (lufttrock) . .	1,187 Karm.
Kalium (rein)	0,865 Gay-L.	Eichenholz »	0,950 Karm.
Jod	4,948 Gay-L.	Buchenholz »	0,750 Karm.
Selen	4,320 Berzel.	Birkenholz »	0,738 Karm.
Schwefel (natürl.) . . .	2,033 Briss.	Ahornholz »	0,645 Karm.
Phosphor	1,770 Berzel.	Lindenholz »	0,559 Karm.
Schwerspath (kristall.)	4,466 Mohs	Tannenholz »	0,481 Karm.
Flintglas (engl.) . . .	3,329 Briss.	Kork »	0,240 Muschb.
Flussspath	3,140 Mohs	Elfenbein »	1,917 Gehler
Rubin (brasilian.) . . .	3,130 Meissn.	Knochen »	1,656 Gehler
Turmalin (dunkler) . . .	3,076 Mohs		
Glas (v. St.Gobain) . . .	2,892 Briss.		

Flüssigkeiten.

Quecksilber	13,596 Règn.	Wasser	1,000
Schwefelsäure (stärke)	1,843 Gay-L.	Olivenöl	0,915 Briss
Chloroform	1,525 Pierre	Terpentinöl	0,872 Despr.
Salpetersäure	1,510 Gay-L.	Citronenöl	0,863 Guib.
Schwefelkohlenstoff . .	1,293 Pierre	Aldehyd	0,805 Pierre
Salzsäure	1,278 Biot.	Alcohol (absolut.) . . .	0,792 Gay-L.
Essigsäure	1,063 Thoms	Schwefeläther	0,736 Pierre.

2. Bewegungserscheinungen.

Cap. 4. Vom Abfluss aus Gefässen.

116. Allgemeine Bemerkungen. — Die Bewegungserscheinungen der Flüssigkeiten sind bedeutend verwickelter als die der festen Körper, weil die Entfernung der Theilchen veränderlich ist und die Bewegung der einen nicht auf so einfache Weise diejenige der andern nach sich zieht. Jedes Theilchen hat seine eigenthümliche Bahn und ändert auf eigenthümliche Weise seinen Druck und seine Ceschwindigkeit, unter den einzigen Einschränkungen, dass diese Grössen von Theil zu Theil stetig variiren und das Volumen des Ganzen ein zusammenhängendes unveränderliches bleibe. Mit Hülfe kleiner in der Flüssigkeit schwebender Theilchen (Bernstein, Wachs, schweres Holz) hat man versucht, die Bewegungen der einzelnen Theilchen zu verfolgen, allein es fehlt an

ausgedehnten und genauen Beobachtungen dieser Art und unsere Kenntnisse beschränken sich auf einige der einfachsten Fälle und die Veränderung der flüssigen Masse als Ganzes.

Unter allen Bewegungserscheinungen ist die wichtigste diejenige eines unveränderten Abflusses durch ein Gefäss von beliebiger Form. Da folgen alle Theilchen, die nach einander eine Stelle erreichen, im weitem Verlauf einer nämlichen Bahn und gehen durch die nämlichen Bewegungszustände, gleichsam als bewegten sie sich in festen Canälen. Für diesen Fall gilt das allgemeine Gesetz, dass in gleicher Zeit, z. B. in 1 Sec., durch zwei beliebige Querschnitte A , a gleiche Flüssigkeitsmengen ein- und austreten müssen, da die Flüssigkeitsmenge zwischen ihnen sich nicht ändern kann.

Heisst man U die mittlere Geschwindigkeit im Querschnitte A , d. h. diejenige, welche im ganzen Querschnitt gleich anzunehmen ist, um die wirklich durchgehende Wassermenge zu liefern, u diejenige des Querschnittes a , so erhält man

$$A \cdot U = a \cdot u$$

Die Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Querschnitte.

117. Bewegung eines Wasserfadens. — Man betrachte bei unverändertem Abfluss die Bewegung eines einzelnen Wasserfadens $B' B$ (Fig. 87). An einer Stelle desselben, in der Tiefe h seien ω , p , u Querschnitt, Druck auf die Flächeneinheit und Geschwindigkeit. Man theile den Faden in prismatische Theilchen von gleichem Inhalte und von einer Länge $u \delta t$, so wird jedes Theilchen nach der kleinen Zeit δt genau die Stelle des spätern einnehmen.

Die Bewegungsänderung des Theilchens, dessen Masse $d \omega u \delta t$ ist, d als Dichte der Flüssigkeit genommen, wird sich daraus ergeben, dass die vom Theilchen in der Zeit δt gewonnene Bewegungsmenge der von den Kräften, Druck und Schwere, mitgetheilten gleich sei. Ändert u in dieser Zeit um δu , so wird die Menge Bewegung

$$d \omega u \delta u \delta t$$

gewonnen. Der Druck auf dem ersten Querschnitte ωp , wächst bis zum zweiten um $\omega \delta p$ und da er von aussen, also entgegen auf das Theilchen wirkt, so kann er eine Bewegungsmenge

$$- \omega \delta p \delta t$$

mittheilen. Die Schwere endlich auf die Masse $d \omega u \delta t$ wirkend und zwar nach der Richtung des Fadens, dessen Tangente mit der Verticalen den Winkel α bildet, theilt eine Menge Bewegung

$$g \cos \alpha d \omega u \delta t^2 = g d \omega \delta h \delta t$$

mit, wenn $u \delta t \cos \alpha$, das Element der Höhe, durch δh ersetzt wird.

Die zwei letzten Grössen der ersten gleich gesetzt, geben nach Weglassung des gemeinsamen Faktors $\omega \delta t$

$$d u \delta u = - \delta p + d g \delta h \quad (1)$$

Und nimmt man die Summe von einem höhern Punkte B' , wo u' , p' , h' bis zu dem, wo u , p , h gelten, so erhält man nach Formel I und II

$$\frac{1}{2} d (u^2 - u'^2) = p' - p + d g (h - h') \quad (2)$$

Diese Beziehung zwischen der Geschwindigkeit, dem Druck und der Wasserhöhe an zwei Stellen eines Fadens, der Ausgangspunkt der meisten Bewegungen über den Abfluss, ist indess unvollständig, da die Kräfte übergangen sind, mit welchen anliegende Wasserfaden auf einander und an der Grenze die Wände einwirken.

Denkt man sich die ganze Flüssigkeit von solchen Wasserfaden $B B'$ durchzogen und durch irgend einen Punkt B eine krumme Fläche so gelegt, dass sie nach der Reihe alle Faden senkrecht durchschneidet, so findet längs dieser Fläche keine Bewegung statt und der Druck pflanzt sich längs derselben auf hydrostatische Weise fort. In dieser Fläche werde ferner eine Curve $C C'$ gezogen, welche dem kleinsten Krümmungsradius der auf einander folgenden Canäle folgt. Längs dieser Linie pflanzt sich der gewöhnliche hydrostatische Druck und überdiess der Druck aus der Fliehkraft fort. Dieser letztere im

Theilchen $d\omega \delta s$ ist $d\omega \delta s \frac{u^2}{r}$, (82) wenn t den kleinsten Krümmungsradius

bezeichnet; auf die Fläche 1 berechnet, $d\delta s \frac{u^2}{r}$. Für zwei Punkte dieser zweiten Curve, die wir durch Doppelstriche von derjenigen der Canäle unterscheiden wollen, erhält man:

$$p'' - p + d(h - h'')g + dS\left(\frac{u^2}{r} \delta s''\right) = 0 \quad (4)$$

Endlich kann man sich senkrecht zur Tangente der Canäle und zu den Radien r eine dritte Curve $D D'$ von Theil zu Theil gezogen denken. Auf dieser Curve wirkt auch die Fliehkraft nicht, und man hat daher, unter Anwendung dreifacher Indices

$$p''' - p + d(h - h''')g = 0 \quad (5)$$

Die drei Systeme von Curven geben die richtigste Vorstellung von der Vertheilung des Druckes und der Bewegung in der ganzen flüssigen Masse.*

118. Abfluss aus kleiner Oeffnung. — An einem Gefässe, das durch eine kleine Oeffnung vom Querschnitte a (Fig. 88) abfliesst, reichen die kleinen Wasserfaden von der Oberfläche, deren Grösse A sei, bis zur Oeffnung a . Da oben und unten der gleiche Luftdruck wirkt, so hat man zu setzen $p = p'$; ferner wenn die Oeffnung in der Tiefe H unter dem Wasserspiegel liegt und die Abflussgeschwindigkeit U hat, $h' = 0$, $h = H$, $u' = U \frac{a}{A}$; folglich:

$$U = \sqrt{\frac{2gH}{1 - \frac{a^2}{A^2}}} \text{ genähert } U = \sqrt{2gH}. \quad (1)$$

Die Geschwindigkeit bei weitem Gefässe und kleiner Oeffnung ist nahe der Fallgeschwindigkeit durch die Wasserhöhe gleich (64), ein Gesetz, das Torricelli zuerst aufgestellt hat. Sie hängt nicht von der Natur der Flüssigkeit ab, indem bei einer schwerern Flüssigkeit zwar die drückenden Kräfte die stärkern, im gleichen Verhältnisse aber die bewegten Theile dichter sind und zu gleicher Geschwindigkeit mehr Kraft verlangen.

Schreibt man allen Theilen der Oeffnung die gleiche parallele Geschwindigkeit U zu, so fliesst in 1 Secunde die theoretische Wassermenge

$$Q = a \cdot U \quad (2)$$

aus; in t Sec., bei constantem Abfluss, das t fache.

Damit die Abflussgeschwindigkeit U gleich bleibe, muss die Höhe H

durch entsprechenden Zufluss gleich erhalten werden. Fehlt dieser, so entleert sich das Gefäss allmähig mit einer der Wurzel der Wasserhöhe proportionalen Geschwindigkeit. Man beweist leicht, dass die Zeit, welche ein prismatisches Gefäss zur Entleerung nöthig hat, die doppelte von derjenigen ist, welche bei constantem Wasserstande die gleiche Wassermenge liefern könnte.

Sei A der Querschnitt, H die Höhe, also AH der Inhalt des prismatischen Gefässes. Bei constantem Stande habe das Wasser in der Oeffnung a die Geschwindigkeit U . Zum Abfluss einer Menge AH wird eine Zeit T' erforderlich sein, die sich bestimmt aus

$$AH = a U T' \text{ woraus } T' = \frac{A}{a} \cdot \frac{U}{2g}$$

Das Gefäss entleere sich; nach der Zeit t stehe das Wasser noch auf der Höhe h . Man hat dann die Geschwindigkeit

$$u^2 = 2gh$$

Nach der Zeit $t + \delta t$ aber

$$(u + \delta u)^2 = 2g(h - \delta h) \text{ also nahe } u \delta u = -g \delta h$$

Die während des Zeitelementes δt abfliessende Wassermenge wird sein

$$A \delta h = a u \delta t$$

Aus dieser und der vorigen Gleichung δh eliminirt, erhält man

$$A \delta u = -a g \delta t$$

Die Summe für die ganze Zeit genommen, d. h. von $u = U$ bis 0 und von $t = 0$, bis T gibt

$$AU = gaT, \text{ also } T = \frac{A}{a} \cdot \frac{U}{g}$$

was das Doppelte von T' ist.

119. Versuche über den Abfluss. — Das Gesetz des Abflusses oder die theoretische Wassermenge hat man durch vielfache Versuche, in denen die Wasserhöhe und die in einer beobachteten Zeit abgeflossene Wassermenge gemessen wurden, geprüft. Wir wollen einzig den Weissbach'schen Apparat beschreiben, der besonders zweckmässig ist, um innerhalb gewisser Grenzen des Druckes, die mannigfachsten Versuche anzustellen.

Derselbe besteht aus einem cylindrischen, oben erweiterten Behälter A (Fig. 89) der in verschiedenen Höhen a, a', a'' mit Oeffnungen versehen ist, die man mittelst eines von dem Stabe b geführten Ventils c fest schliessen oder durch Zurückziehen des Stabes öffnen kann. Die verschiedenen Abflussöffnungen, an Metallplatten befindlich, werden mittelst eines Ringes mit Schrauben d , angeklemt.

Die Wasserhöhe und ihre Veränderungen werden an beweglichen Zeigern e, e' abgenommen, die von unten mit ihrer Spitze das Wasser tangiren. Man beobachtet dann die Zeit, welche der Spiegel gebraucht, um von e auf e' zu sinken und berechnet die abgeflossene Wassermenge aus der Senkung und den genau bekannten Durchmesser des Behälters.

Soll der Abfluss unter constantem Niveau erfolgen, so wird der Hauptbehälter A durch eine an der untern Oeffnung a'' befestigte weite Röhre C mit einem zweiten cylindrischen Behälter B in Verbindung gesetzt, an dem sich die Abflussöffnung a''' befindet. Durch Stellung des Hahnes C kann man leicht den Zufluss so reguliren, dass der Wasserstand während des Abflusses constant bleibt. Ein Sieb F dämpft die Bewegung des zuströmenden Wassers.

120. Der wirkliche Abfluss. — Die theoretische und wirkliche Wassermenge stimmen nur dann, bis auf 0,02—0,04 mit einander überein, wenn die Oeffnung (Fig. 90 A) einen in gleiche Richtung umgebogenen Rand hat. In allen andern Fällen erhält man eine abweichende, meist bedeutend kleinere Wassermenge. Es rührt diess daher, dass die Berechnung in allen ausfliessenden Wasserfaden gleiche und parallele Geschwindigkeiten voraussetzt, während dieselben in der Wirklichkeit (Fig. 8) in beiden Hinsichten abweichen, von allen Seiten convergirend durch die Oeffnung gehen und erst in gewisser Entfernung in einem kleineren Querschnitte, vermuthlich mit verschiedenen Geschwindigkeiten, gleiche Richtungen annehmen.

Um also die wirkliche Wassermenge Q aus der theoretischen $Q' = a \cdot U$ (wo $U = \sqrt{2 g H}$) zu berechnen, hat man letztere mit einem Abflusscoefficienten k zu multipliciren, den man sich selbst wieder aus einem Querschnittscoefficienten ε , Verhältniss des Querschnittes der Contraction a' und der Oeffnung a , und einem Geschwindigkeitscoefficienten ζ , Verhältniss der mittlern Geschwindigkeiten U' und U in a' und a , zusammengesetzt denken kann. Man hätte so

$$Q = k \cdot a \cdot U = \varepsilon \cdot \zeta \cdot a \cdot U \text{ wo } \varepsilon = \frac{a'}{a}, \quad \zeta = \frac{U'}{U}$$

Die Bestimmung von ε beruht natürlich auf der genauen Ausmessung des Querschnittes der Zusammenziehung a' . Hachette fand bei runden Oeffnungen von 0,1—1 Centim. für ε 0,69 bis 0,60; Poncelet bei solchen von 20 Centim. höchstens 0,602 und 0,608, bei quadratischen höchstens 0,56. ε variirt also mit den Dimensionen der Oeffnung, so auch mit dem Druck nach einem noch unermittelten Gesetze.

Versuche mit allmählig umgebogenen Rande, bei welchen alle Faden parallel abfliessen, so dass $\varepsilon = 1$, zeigen, dass ζ bei nicht zu grossem Druck nahe constant, gleich 0,97 bleibt; bei sehr grossem wächst dieser Coeffic. jedoch bis über 1.

In den meisten sehr zahlreichen Versuchen begnügte man sich jedoch den für praktische Zwecke wichtigen Abflusscoefficienten k zu bestimmen. Weissbach fand z. B. für runde Oeffnungen

Durchmesser	Druck auf d. Mitte	Coeffic. k
1 ^{cm}	8 ^{cm} ,72 bis 89,90	0,649 bis 0,617
2	„ „ „	0,632 „ 0,615

also eine Abnahme des Coeffic. mit wachsendem Druck und wachsendem Durchmesser. Die sehr umfassenden Versuche von Poncelet und Lebros, in grossem Maassstabe und mit rechteckigen Oeffnungen angestellt, gaben

Höhe d. Oeffnung	Druck auf d. Mitte	Coeffic. k
1 ^{cm}	1 ^{cm} bis 300,5	0,705 bis 0,609
20	12 „ 320,0	0,572 „ 0,601

Der Coeffic. k nimmt bei kleiner Oeffnung mit wachsendem Drucke ab, bei grosser Oeffnung zu.

Wird die, bisher in dünner Wand angenommene Oeffnung mit vortretendem Rande versehen, dem das Wasser folgt, so vermehrt sich

die Wassermenge. So erhielt Bidone, indem er die Contraction einer quadratischen Oeffnung durch kleine Seitenwände aufhob, folgende Werthe:

	Seitenwände				
	0	1	2	3	4
Abflusscoefficient.	0,619	0,639	0,662	0,694	0,820

Demgemäss hatten schon früher Dan. Bernoulli und Venturi nachgewiesen, dass die Anbringung einer kleinen Ansatzröhre (Fig. C), deren Länge unter dem dreifachen Durchmesser bleibt, den Coefficient auf 0,80 bis 0,83 erhebt. Mit kurzen conischen Ansätzen an einer Oeffnung von 2 Centim. und unter einen Druck von 30 bis 300 Centim. erhielt Weissbach, für verschiedene Convergenzwinkel mit der Axe:

	Winkel mit der Axe				
	90°	67°,5	45°	22°,5	0°
Ausflusscoefficient.	0,632	0,684	0,753	0,902	0,966.

Den kleinsten Werth 0,541 liefert ein einwärts gekehrtes kurzes Rohr. Den grössten hingegen 1,4, einen stärkern Abfluss als den theoretischen anzeigend, findet man mit einem um 4 — 5° nach aussen sich erweiternden Ansatzrohr, so lange das Wasser sich nicht ablöst, um mit freier Contraction abzufließen. In letzterm Falle verliert der Stahl sein volles kristallhelles Ansehen und erscheint durch oberflächlich eindringende Luft trüb und matt.

121. Der dynamische Druck. — Der Druck der beweglichen Flüssigkeit kann von demjenigen der ruhenden wesentlich abweichend. Es fliesse das Wasser z. B. aus einem weiten Gefässe A (Fig. 91) durch die ungleiche Abflussröhre B in das Vacuum. An irgend einer Stelle C sei a der Querschnitt, h die Wasserhöhe, p der Druck, u die Geschwindigkeit. Die Bewegungsgleichung eines Wasserfadens (2) in (117) wird, da für die Oberfläche Wasserhöhe, Druck und Geschwindigkeit $= 0$ sind

$$p = dgh - \frac{1}{2} du^2$$

Der dynamische Druck p ist also kleiner als der hydrostatische dgh um eine dem Quadrate der vorhandenen Geschwindigkeit proportionale Grösse.

Sind A , H , U Querschnitt, Wasserhöhe und Geschwindigkeit an der Abflussöffnung D, so dass wegen $u \cdot a = U \cdot A$ (116)

$$u^2 = 2gH \frac{A^2}{a^2}$$

und ersetzt man p durch eine entsprechende Wassersäule $g \cdot d \cdot h'$, so erhält man

$$h' = h - H \frac{A^2}{a^2}$$

Der dynamische Druck h' kann also $+$, 0 oder $-$ werden, je nachdem

$$\frac{A}{a} >, = \text{ oder } < \sqrt{\frac{H}{h}}$$

ist. Da H grösser als h , so kann sich ein positiver Druck nur da zeigen, wo die Röhre bedeutend weiter als die Abflussöffnung ist; je höher die Stelle liegt, desto weiter muss der Querschnitt sein. An allen Stellen, deren Querschnitte dem der Oeffnung sich nähern, wird der Druck negativ.

Beim Abfluss in die Luft wird durch eine kleine Oeffnung an der Stelle C bei positivem Druck Wasser austreten, bei negativem C' hingegen Luft eindringen. In einer in C angebrachten kleinen doppelschenklichten Röhre steht das Wasser aussen um h' höher als die Oeffnung; in C' innen um h' höher als aussen.

122. Die Gestalt des Wasserstrales. — Der aus der Oeffnung getretene Stral, so lange er als krystallartiges Stäbchen zusammenhängt, verdünnt sich beim Fallen, indem der Querschnitt umgekehrt mit der wachsenden Geschwindigkeit abnehmen muss (116). Zugleich zeigt sich bei nicht runden Oeffnungen eine Erscheinung, welche man die Umkehrung des Wasserstrales heisst.

Bei einer linearen Oeffnung A (Fig. 92) z. B. beobachtet man in einer gewissen Entfernung a , die mit der Geschwindigkeit des Wassers wächst, eine Zusammenziehung im Sinne der grössern, eine Anschwellung im Sinne der kleinern Oeffnungsdimension. Etwas tiefer, in b , nimmt der Stral wieder die Gestalt der Oeffnung, noch tiefer in c wieder die umgekehrte u. s. f. Es entsteht eine Form, als würde ein Papierrohr an abwechselnden Stellen im einen und andern Sinn zusammengeklemt. — Bei einer kreuzförmigen Oeffnung B drehen sich die grössern Dimensionen abwechselnd aus der Stellung, wie in der Oeffnung, um 45° in die Diagonalrichtung.

Die Ursache dieser Umkehrungen hat man in den Druckverhältnissen der Oeffnung zu suchen, welche bei nicht runden Oeffnungen nicht symmetrisch sind. Auf dem grössern Durchmesser drängen sich von den Seiten her mehr Theile zum Abfluss und es entsteht ein stärkerer Seitendruck gegen den Wasserstral als auf der Richtung der kleinern Dimensionen. Im Sinne der letztern werden daher die fallenden Theile aus einander, auf der andern zusammengedrängt. Der weitere Verlauf ist eine Art Wellenerscheinung, ein Schwingen der beweglichen Theile und der Oberfläche um die mittlere Gleichgewichtsstellung, bald im einen bald im andern Sinne.

Merkwürdig ist es, wie Sawart gezeigt hat, dass die einzelnen Tropfen, in welche zuletzt in Folge der wachsenden Geschwindigkeitsunterschiede der Stral sich auflöst, statt die Kugelgestalt (99) anzunehmen, analoge periodische Gestaltänderungen (Fig. 93) zwischen einem verlängerten und abgeplatteten Sphäroide aufweisen. Man erkennt es, wenn man den Stral durch Oeffnungen einer schnell drehenden Scheibe betrachtet, so dass die Stelle, durch welche man blickt, sich vertical aufwärts bewegt. Im Augenblicke der Ablösung ist der Tropfen verlängert; nach der Ablösung strebt er nach der Kugelform, erreicht sie aber auch nur nach einer Reihe von Schwingungen, welche den Tropfen im Sinne des Falles bald verlängern, bald verkürzen.

123. Oberflächlicher Abfluss. — Fliesst das Wasser aus einem Behälter A (Fig. 94) durch den Ausschnitt einer Seitenwand oberflächlich aus, so wird theoretisch beurtheilt, jedes Theilchen eine Geschwindigkeit u annehmen, welche von der Wasserhöhe h über demselben abhängt. Trägt man alle solchen Geschwindigkeiten horizontal als Ordinaten auf, so bezeichnet die Gleichung $u^2 = 2 g h$ die Grenzcurve als eine Parabel, deren Parameter $2 g$ ist. Die Fläche $a b c$ dieser Parabel — bekanntermassen $\frac{2}{3}$ des Rechteckes $a b c d$ — gibt mit der Breite b der Oeffnung multipliziert die in 1 Secunde theoretisch ausfliessende Wassermenge.

Für eine Oeffnungshöhe H erhält man

$$Q = \frac{2}{3} b \cdot H \cdot \sqrt{2 g H} \text{ allgemeine } Q = k b H \sqrt{2 g H}$$

Auch hier, wie bei den meisten Berechnungen über Wasserbewegung weichen die, der Einfachheit zuliebe gemachten Voraussetzungen bedeutend von dem wirklichen Vorgange ab. In der Wirklichkeit nämlich senkt sich die Oberfläche in der Oeffnung durch ein Mitreissen der obern Theilchen und das Wasser füllt die Oeffnung nicht mehr vollständig aus. Mit der Breite der Oeffnung variirend, beträgt diese Senkung nach Daubuisson bei geringer Breite nur $\frac{1}{5}$, bei grosser bis $\frac{1}{2}$ der Wasserhöhe H . Seine Versuche mit Oeffnungen in ganzer Breite des Behälters geben statt 0,666 den um $\frac{1}{3}$ kleinern Coeffic. $k = 0,443$. — Dieser Werth ändert sich aber mit der Höhe des Wassers und mit dem Verhältniss der Oeffnungsbreite zur Breite des Behälters, letzteres in Folge von Contraction. So fand Poncelet mit einer Oeffnung von 20 Centim. Breite, in einer Wand von 368 Centim. Breite, wenn der Druck von 1 Centim. auf 22 Centim. änderte, eine Abnahme des Coeffic. von 0,424 auf 0,385. Hinwieder bei einem gleichen Drucke unter 22 Centim. variirte er von 0,443 auf 0,398, wenn das Verhältniss der Oeffnungs- und Behälterbreite von 1 auf $\frac{1}{4}$ sich verminderte.

124. Der Springbrunnen. — Da der Druck einer Flüssigkeit nach allen Seiten wirkt, so bleibt die Geschwindigkeit die nämliche, gleichviel ob die Oeffnung nach unten, oder seitwärts oder nach oben gerichtet ist. Im letztern Fall bildet der Wasserstral einen Springbrunnen, der nach den Gesetzen des verticalen Wurfes (67) theoretisch das Wasser bis zu der Höhe des Wasserspiegels oder richtiger bis zu der Höhe, welche zu der wirklichen Abflussgeschwindigkeit ζU (120) gehört, treiben könnte. Diese Höhe ist also, da $\zeta = 0,97$

$$H = \zeta^2 \frac{U^2}{2 g} = \zeta^2 H' = 0,941 \cdot H'$$

wenn H' die Druckhöhe bezeichnet.

Von dieser berechneten Höhe weicht die wirklich beobachtete nach den Versuchen von Weissbach mit Druckhöhen von 80 bis 100 Centim. nur um 0,01 bis 0,02 ab, um so mehr, je leichter die Flüssigkeit ist. Bei kleinern Druckhöhen werden, wie Bossut und Mariotte gezeigt, die Abweichungen grösser. Ausser von den Reibungen in der Zuflussröhre und an der Oeffnung, rühren diese Abwei-

chungen von dem Widerstande der Luft her, der auf leichtere Theile mehr Einfluss als auf schwerere, auf Wasser mehr als auf Quecksilber gewinnt (69); theilweise auch von dem Zurückfallen der obersten Theilchen auf die tiefern, ein Umstand, der durch eine etwas geneigte Richtung des Strahles beseitigt wird.

So lange der Wasserstral zusammenhängend bleibt, ändert sich nothwendig sein Querschnitt a mit der Geschwindigkeit u (116) und verdickt sich nach oben (Fig. 104). Da in einer Höhe h über der Oeffnung, die Geschwindigkeit $u = \zeta U - \sqrt{2gh}$ ist, so wäre der Querschnitt

$$a = A \frac{\zeta U}{\zeta U - \sqrt{2gh}}$$

wo A denjenigen der Oeffnung bezeichnet.

Cap. 5. Das gehinderte Fliessen.

125. Bewegung in Röhren. — Die Geschwindigkeit, mit der das Wasser aus einem Behälter durch eine ganz kurze Röhre in einen zweiten tiefern fliesst, hängt, abgesehen von den Hindernissen bei der Ein- und Ausmündung, von dem Höhenunterschiede H ihrer beiden Oberflächen ab und wäre also

$$U = \sqrt{2gH}.$$

Anders verhält es sich, wenn eine lange Röhre ab (Fig. 95) die beiden Behälter A und B verbindet. Die Geschwindigkeit U , mit der das Wasser austritt, entspricht lange nicht dem Höhenunterschied $bc = H$, sondern einer bedeutend kleinern Druckhöhe

$$H' = \frac{U^2}{2g}$$

so dass der Druck einer Wassersäule $H - H'$ in der Bewegung fehlt und durch irgend eine Ursache aufgehoben worden sein muss. Damit steht in Verbindung, dass die gleichweite Röhrenleitung von oben bis unten voll bleibt, was auf eine gleichbleibende mittlere Geschwindigkeit (116) hinweist, obgleich ein Theil der Schwere längs der geneigten Leitung beständig zur Beschleunigung einwirkt.

Aus beiden Thatfachen folgt das Dasein einer Gegenkraft, welche an jeder Stelle die Beschleunigung der Schwere vernichtet und von Hindernissen herrührt, welche die Unebenheiten der Wände und das Anhängen des Wassers der Bewegung entgegensetzen. In jedem Querschnitte wirkt diess Hinderniss vom Umfange C aus, zunächst auf die berührenden Wasserfaden, von diesen auf die nächstfolgenden, zuletzt auf die ganze Flüssigkeit. Der Einfluss desselben wird begreiflicherweise 1) der Länge L der Leitung, d. h. der Strecke, auf welcher die Theilchen dem Hindernisse ausgesetzt sind, proportional sein, 2) dem Umfange C des Querschnittes, von welchem dasselbe ausgeht, 3) umgekehrt der Fläche A des Querschnittes oder der Menge gehemmter Theile, endlich 4) von der Geschwindigkeit U abhängen, indem bei stärkerer Neigung der Röhre der stärkere Theil der Schwere mittelst einer grössern Geschwindigkeit aufgehoben wird.

Nach den Beobachtungen von Prony und Eytelwein würde die auf der Leitung verlorne Druckhöhe H'' dargestellt durch

$$H'' = \frac{CL}{A} (\alpha U + \beta) U$$

wo nach D'Aubuisson, alles in Metern gemessen, die beiden Coefficien den Werth hätten

$$\alpha = 0,0003425, \quad \beta = 0,000018837$$

Weissbach, dessen Versuche das Hinderniss reiner herausstellen, findet einen Ausdruck von der Form

$$H'' = \frac{CL}{A} (\alpha U + \beta \sqrt{U}) U \quad (1)$$

und setzt $\alpha = 0,0001834, \quad \beta = 0,00012068$

Man hat nun, wenn keine andern Hindernisse vorhanden sind, und das Rohr in die Luft sich öffnet

$$H = H' + H'' = + \left(\frac{1}{2g} + \alpha \frac{CL}{A} \right) U^2 + \beta \frac{CL}{A} U^{\frac{3}{2}} \quad (2)$$

woraus U , vorerst genähert, unter Weglassung des letzten Gliedes, dann unter Benutzung des gefundenen U , genauer, berechnet wird.

Statt der Geschwindigkeit U kann man auch die Wassermenge in 1 Sec. $Q = A \cdot U$ einführen und bestimmen.

Für sehr lange Leitungen für welche $L > 37 D$ und grosse Geschwindigkeiten $U > 0,76$ Met., vereinfacht D'Aubuisson den Ausdruck ² der Wassermenge, für die Praxis hinlänglich genau, auf

$$Q = 20,3 \sqrt{\frac{HD^5}{L}} \text{ und } D = 0,298 \sqrt[5]{\frac{LQ^2}{H}}$$

je nachdem die Wassermenge Q oder die Röhrenweite D die gesuchte Grösse ist.

126. Druck in Röhren. — Derselbe, zuerst von Dan. Bernoulli aufgestellte Grundsatz, welcher (125) die Beziehung zur Bestimmung der Geschwindigkeit liefert, lässt sich auch benutzen, um für irgend einen Punkt d der Leitung, vom Anfang derselben um die Röhrenlänge l entfernt, die Stärke des Druckes, d. h. die Höhe $dc = h$ zu bestimmen, bis zu welcher in einer kleinen aufgesteckten Röhre das Wasser gehoben würde. Wenn auf der Länge L die Druckhöhe H'' verloren geht, so kommt auf die Länge l ein Theil

$$h'' = H'' \frac{l}{L} \quad (1)$$

dieses Verlustes. Bezeichnet also h' die hydrostatische Wasserhöhe d f über dem Punkte d , so hätte man

$$h = h' - h'' - H' = h' - H'' \frac{l}{L} - H' = h' - \frac{H' (L - l) + H'' \cdot l}{L} \quad (2)$$

da $H'' = H - H'$ ist (125). Für eine kleine Abflussgeschwindigkeit wird H' klein und man hat genähert

$$\frac{h' - h}{H} = \frac{l}{L} \quad (3)$$

Oder es steigt das Wasser nahe bis zu der Geraden gb , die man vom Wasserspiegel des Behälters g bis nach dem Ende b ziehen kann. Diess wäre zugleich die theoretische Höhe (124) eines auf der Leitung angelegten Springbrunnens, der nur eine sehr kleine Wassermenge in Anspruch nähme.

Genau genommen gelten ähnliche Verhältnisse wie beim Wasser einer Röhrenleitung bei jedem einzelnen Wasserfaden, der zwischen andern sich bewegt (117) so nämlich, dass ein mit grösserer Geschwindigkeit begabter Faden auf einen benachbarten langsamern beschleunigend einwirkt, dieser umgekehrt auf jenen verzögernd. Diese Einflüsse, welche bei kleinen Geschwindigkeitsverschiedenheiten allerdings klein sind, streben immer nach Ausgleichung der Bewegungen zu einer mittlern Geschwindigkeit.

127. Unregelmässigkeiten der Leitung. — Jede Unregelmässigkeit im Verlauf einer Röhrenleitung hat örtliche Veränderungen von Druck und Geschwindigkeit zur Folge und damit auch Veränderungen der Geschwindigkeit und der Menge des Gesamtabflusses.

Jeder Winkel, jede Krümmung des Rohres vermindert den Abfluss, indem ein Theil der Bewegung gegen die Wände als Druck verloren geht. So fand schon Venturi, dass zum Anfüllen eines gleichen Gefässes mittelst einer Röhre von 38,0 Länge und 3,3 Centim. Weite 45, 50 und 70 Secunden erforderlich waren, je nachdem die Röhre gekrümmt oder scharf geknickt war. Man führt solche Umstände in Rechnung, indem man in den Ausdruck für die ganze Druckhöhe H (125) (2) den entstehenden Verlust an Druckhöhe durch Glieder von der Form

$$\alpha \frac{U^2}{2g}$$

darstellt. Der Widerstandscoeff. α hat in verschiedenen Fällen einen verschiedenen Werth. Nach Weissbach ist derselbe

1) für Winkeländerungen von 20° , 90° , 140° gleich 0,046, 0,984, 2,431;

2) für Krümmungen, an welchen das Verhältniss $\frac{D}{r}$ der Weite zum Radius der Krümmung 0,2, 1,0, 2,0 ist, gleich 0,124, 0,398 und 3,228.

Verengungen der Röhre vermehren die Geschwindigkeit in dem betreffenden Querschnitte, indem sie den Druck vor derselben vergrössern; Erweiterungen wirken umgekehrt, das Wasser strebt sich von der Röhrenwand abzulösen und dann kann die Erscheinung des negativen Druckes eintreten, dass nämlich durch eine kleine Seitenöffnung nicht nur kein Wasser ausströmt, sondern Luft eingesogen wird. In einem Versuche von Venturi sank die Wassermenge von 100 auf 62 durch Anbringen von 5 Erweiterungen an einer Röhre von 2,03 Centim. Weite. In der Nähe solcher Stellen plötzlicher Aenderungen der Weite, bald vor, bald hinter denselben entstehen immer Räume mit totem Wasser, indem die Wasserfaden, zumal bei grösserer Geschwindigkeit, nur durch Bogen in die neuen Richtungen übergehen. Da das Wasser eine beständige wirbelnde Bewegung hat, so geht ein Theil der Bewegung des Wassers, der bisher jeder genauen Schätzung entgangen ist, auf die Ueberwindung ihrer Hindernisse verloren.

128. Bewegung in offenen Canälen. — Noch vollständiger als in Röhrenleitungen stellt sich in offenen Canälen und Flüssen ein Zustand her, welcher ganz unabhängig von der Höhe des Wasser-ursprungs, an jeder Stelle einzig von der Beschaffenheit und Neigung des Bettes abhängt. Auch hier nämlich geht von dem benetzten Umfange C ein Hinderniss aus, das mittelbar die Wassermasse des ganzen Profils A verzögert und die Beschleunigung der Schwere für jede Neigung bei einer Bestimmten Geschwindigkeit U vollkommen aufhebt. Nur dass hier die Oberfläche der Flüssigkeit frei, und kein Druck von Innen nach Aussen vorhanden ist, daher auch ein mit dem Wasser schwimmender Körper keinen andern Druck als den einer ruhenden Flüssigkeit erleidet.

Die Geschwindigkeit U wird aus einer ähnlichen Beziehung wie (125) hergeleitet, indem man beachtet, dass auf eine angemessene Länge L des Flusses die ganze Druckhöhe H des Höheunterschiedes durch die Hindernisse verloren geht. Man hat also

$$H = \frac{LC}{A} (\alpha U + \beta) U$$

Den Beobachtungen zu genügen setzt D'Aubuisson für Metermaass

$$\alpha = 0,0003605, \beta = 0,000024265$$

Weissbach

$$\alpha = 0,0003776, \beta = 0,000022102$$

Werthe, die nicht sehr von denen bei Leitungen (125) abweichen.

Man erhält durch diese Berechnung die mittlere Geschwindigkeit (126), deren Produkt mit dem Querschnitte A die in einer Secunde durch das Profil gehende Wassermenge liefert. Sie weicht sowohl ab von der kleinsten längs den Wänden und der Sohle des Canalbettes, als von der grössten, welche man in der Mitte des Canales, wegen des Hindernisses der Luft etwas unter der Oberfläche zu suchen hat. Die Ungleichheit der Rand- und Mitten-Geschwindigkeit tritt an der Anschwellung der mittlern Stromfläche sichtbar hervor. Nach (122) entspricht einer kleinern Geschwindigkeit U' der parallelen Wasserfaden am Rande nothwendig ein grösser Druck p , der im Querprofil hydrostatisch sich fortpflanzend, das Wasser der Mitte, dessen grössere Geschwindigkeit U ist, um die Grösse

$$h = \frac{U^2 - U'^2}{2g} \quad (2)$$

hebt.

129. Messung der Geschwindigkeit und Wassermenge. — Die Bestimmung der mittlern Geschwindigkeit aus den Dimensionen und dem Gefälle des Bettes passt nur auf regelmässige Canäle und Flüsse und verlangt genaue Ausmessung der Profile. Der Erfahrung zufolge besteht ein nicht sehr veränderliches Verhältniss zwischen der mittlern Geschwindigkeit und der grössten des Stromstriches — welche letztere leicht aus der Zeit bestimmt wird, welche ein Schwimmer zum Durchlaufen einer gemessenen Länge nöthig hat. Zuzufolge Dubuat beträgt die mittlere Geschwindigkeit von 0,76 bis 0,89 der grössten, wenn letztere auf 0,1 bis 4,0 Meter ansteigt. Die Beobach-

tungen von Brünnings und Lahmeier führen (für Metermaass) auf den Ausdruck

$$U = 0,826 U' - 0,00807 U'^2$$

zur Berechnung der mittlern Geschwindigkeit U aus der grössten U'

Bei ganz unregelmässigen Flussbetten sind die Geschwindigkeiten der einzelnen Stellen zu ungleich vertheilt, um irgend eine Brechung zu gestatten. Es bleibt dann nichts übrig, als die mittlere Geschwindigkeit aus vielen direkten Messungen, an verschiedenen Stellen und Tiefen des Profils angestellt, zu bestimmen. Hiezu dient der Woltman'sche Strommesser (Fig. 96), bestehend aus einem dem strömenden Wasser ausgesetzten Flügelrädchen a , dessen Axe durch eine Schraube ohne Ende b ein Zahnrädchen c bewegt und aus den vorbeigehenden Zähnen die Zahl der Umdrehungen, auf 1 Min. z. B., bestimmen lässt. Hat man durch einen vorläufigen Versuch bei bekannter Geschwindigkeit U' die Zahl n' Umdrehungen erhalten, so betrachtet man $k = \frac{U'}{n'}$, als die

auf jede Umdrehung zu rechnende Geschwindigkeit, und multiplicirt mit diesem Reductionscoefficienten k die jedesmal beobachtete Umdrehungszahl n

$$U = k \cdot n$$

eine Berechnung, die indess keineswegs als genau zu betrachten ist, weil das Verhältniss von U zu n etwas variirt.

Die Wassermenge in einer Sekunde wird in jedem Falle aus dem Produkte

$$Q = A \cdot U$$

des Querschnittes mit der mittlern Geschwindigkeit gefunden.

130. Wirbelbewegungen. — Von dem bewegenden und hemmenden Einflusse der einen Theile auf die andern und der Mittheilung des dynamischen Druckes hängen die Wirbelbewegungen ab, von welchen wir zwei Fälle hervorheben.

1) Eine drehende Bewegung stellt sich mehr oder weniger deutlich in jedem Gefässe ein, aus welchem Flüssigkeit durch eine untere Oeffnung ausfliesst, sobald Oeffnung oder Gefäss Unregelmässigkeiten der Gestalt oder Stellung zeigen. Statt von oben bis unten in einer durch die Axe des Abflusses gehenden Meridianebene zu bleiben, bildet der Wasserfaden $a b c$ (Fig. 97), Weg des Theilchens a , eine nach der Oeffnung sich verengende Schraubenlinie $a b' c$. Hätte hierbei die ganze Masse eine gleiche Winkelgeschwindigkeit ω , so würde die Oberfläche (99) sich parabolisch aushöhlen; in der Regel aber ist ω grösser für die mittlern als für die äussern Theile, die Fliehkraft $r \omega^2$ (82) von jenen wird verhältnissmässig grösser und die Vertiefung nähert sich einer conischen oder spindelförmigen Gestalt $a d a'$.

2) Wirbelbewegungen entwickeln sich ferner in den von todttem Wasser erfüllten Stellen eines Canales, der plötzliche Aenderungen des Querschnittes besitzt (127). So z. B. wenn eine starke Strömung A an einer vorspringenden Wand B (Fig. 98) vorbeigeht, bilden sich grössere Wirbel in C und D und oft ein kleinerer dicht vor dem Ende der Wand in a . Die an dem ruhenden Wasser vorbeifliessende Strömung setzt die nächsten Theile und durch sie die entfernten in Bewegung,

bis in den Mittelpunkt des Winkels. Die Geschwindigkeitsverhältnisse sind hier die umgekehrten als vorhin, wenigstens am Anfang; die Winkelgeschwindigkeit nimmt von aussen nach dem Centrum ab und die Vertiefung nimmt eine Gestalt, die nach der Mitte flacher, nach der Peripherie steiler ist als die Parabel. Selten indess sind diese Wirbel regelmässig und stark genug, um ihre Eigenthümlichkeiten gehörig zu offenbaren.

131. Veränderliche Wirbel. — Die vorgenannten Wirbel können, wie die Abflussverhältnisse, aus denen sie hervorgehen, beharrende werden, so dass auch hier jedes Theilchen, von einer bestimmten Stelle aus, stets den gleichen Weg wieder durchläuft. Weit verwickelter sind die Winkelbewegungen, die entstehen, wenn Bewegungen in einer flüssigen Masse beginnen oder aufhören, die Wirbel stets neue andere Theile ergreifen, sich auf- und abwickeln und dabei ihre Stelle im Raume verändern.

Diess z. B. ist der Fall, wenn ein durch Farbe sichtbar gemachter Wasserstrahl A (Fig. 99) durch den Stoss einer Spritze in das Innere einer ruhenden Wassermasse getrieben wird. Der cylindrische Strahl, gegen die widerstehende Flüssigkeit andrängend, breitet sich garbenförmig wie B aus, die Wege der äussern Theile biegen sich mehr und mehr nach weniger widerstehenden Richtungen hin, und es entstehen rings herum Wirbel c, so dass bei regelmässiger Entwicklung die gefärbte Masse einem Pilze mit rings umgeschlagenem Rande gleicht. Es ist diese Gestalt aber nur vorübergehend, die Garbe wächst, die Wirbel rücken vor, ändern und zertheilen sich und die ganze Bewegung verliert sich in eine wolken- und lockenartige Verbreitung des Farbstoffes und in zahlreiche kleine veränderliche Wirbel, die oft noch lange andauern können.

Du Bois-Reymond hat solche Bewegungen näher untersucht. Wir begnügen uns anzuführen, dass manche Eigenthümlichkeiten der Erscheinung sich auf den folgenden Grundsatz zurückführen lassen: Naheliegende Wasserfaden, in gleichem Sinne fliessend, weichen wie durch Abstossung aus einander; in entgegengesetztem, wie durch Anziehung gegeneinander; ruhendes Wasser verhält sich wie entgegengesetzt fliessendes. Ueberhaupt hängt die Einsicht in diese und alle ähnlichen Erscheinungen von der Ermittlung der Bewegung der einzelnen Theilchen ab, mit der man sich bisher weniger als mit den praktischen Gesamtergebnissen der Bewegung befasst hat (116).

Cap. 6. Reaction und Stoss des Wassers.

132. Reaction des Wassers. — Fliessen das Wasser eines Gefässes A (Fig. 100) durch eine Seitenöffnung a ab, so besteht die Gleichheit des Druckes auf die gegenüberstehenden Wände (103) nicht mehr. Wenn einerseits eine Kraft dem Wasser Bewegung mittheilt und durch die demselben in 1 Sec. mitgetheilte Bewegungsmenge gemessen wird, so wirkt andererseits, in Folge der Gleichheit vor Wirkung und Gegenwirkung (37), eine ebenso grosse in entgegengesetzter Richtung auf das Gefäss und vermag dieses, wenn beweglich zurück zu treiben.

Bezeichnet $U = \sqrt{2 g H}$ die Abflussgeschwindigkeit, so ist $d a U$ die in 1 Sec. abfliessende Wassermasse, folglich die Reaction

$$Q = d \cdot a \cdot U^2 = 2 a H s.$$

Die Reaction wächst prop. mit der Fläche der Oeffnung a , mit der Dichtigkeit d , und dem Quadrate der Geschwindigkeit U , und stellt einen Druck dar, doppelt so gross als der hydrostatische.

Eine nähere Einsicht in die Reaction folgt aus der Berücksichtigung der Fliehkraft, welche aus der Krümmung der Wasserfaden entsteht. Sei, bei constantem Abfluss (117) ω der Querschnitt an der Stelle c eines Wasserfadens $b b'$, $u \delta t$ oder $r \delta \alpha$ die Länge eines Theilchens, wo r den Krümmungsradius in c und $\delta \alpha$ den Winkel zweier auf einander folgenden solchen Radien bezeichnet. Die Masse $d \omega r \delta \alpha$ des Theilchens kann durch die Fliehkraft $\frac{u^2}{r}$ (82) in 1 Sec. eine Menge-

Bewegung gewinnen, welche horizontal gegen die Wand zerlegt, den Theil liefert

$$d \cdot \omega \cdot u^2 \sin \alpha \delta \alpha$$

Längs der Tangente ferner gewinnt die gleiche Masse $d \omega u \delta t$ eine Geschwindigkeit δu in der Zeit δt , auf 1 Sec. berechnet eine solche $\frac{\delta u}{\delta t}$; die gewonnene Bewegungsmenge horizontal zerlegt wird sein

$$d \omega \cos \alpha u \delta u$$

und eine gleiche wirkt rückwärts gegen die Wand.

Da die verticale Schwere horizontal keine Theilkraft liefert, so besteht die Reaction des Theilchens aus der Summe dieser beiden Grössen, und ist, wenn man für ω den Querschnitt ω' des Fadens in der Oeffnung, das heisst $\omega = \omega' \frac{U}{u}$ einführt

$$d \omega' U (u \sin \alpha \delta \alpha + \cos \alpha \delta u)$$

eine Grösse, welche, — wie man sich durch Einführen der zusammengehörenden $u + \delta u$, $\alpha - \delta \alpha$ für u und α überzeugt, den kleinen Anwachs

$$d \omega' U \delta (u \sin \alpha) = d \omega'^2 U^2 \delta \left(\frac{\cos \alpha}{\omega} \right)$$

darstellt. Der ganze Wasserfaden liefert also, wenn α'' , ω'' , α' , ω' die Anfangs- und Endwerthe von α und ω sind die Reaction

$$q = d \omega'^2 U^2 \left(\frac{\cos \alpha'}{\omega'} - \frac{\cos \alpha''}{\omega''} \right) \quad (1)$$

welche nur von den Endrichtungen und Querschnitten der Wasserfaden, nicht aber von ihrer Krümmung abhängt.

In unserem Falle, wo $\alpha'' = 90^\circ$, $\alpha' = 0$ erhält man

$$q = d \omega' U^2$$

und auf alle Wasserfaden ω' der ganzen Oeffnung a ausgedehnt, die ganze Reaction

$$Q = d a U^2 \quad (2)$$

wie vorher angegeben wurde.

133. Versuche über Reaction. — Weissbach hat die Richtigkeit dieser Ausdrücke mittelst eines Reactionsrädchens (Fig. 101)

geprüft. Ein verticaler leicht drehender Cylinder A erhält von oben in a beständig Wasser, und lässt es unten durch radiale Röhren mit Seitenöffnungen b wieder abfliessen. Man kennt die Wasserhöhe H , misst den Wasserabfluss $a \cdot U$, wenn die Bewegung gleichförmig geworden ist, so wie die Geschwindigkeit rückwärts des Rädchens und vergleicht die Arbeitsgrösse des Wassers (51) mit derjenigen eines Gewichtes, welches durch Aufwinden des Fadens c auf den Cylinder A gehoben wird.

Ändert man die Richtung der ein- und ausfliessenden Wasserfaden gegen die Bewegungsrichtung, so lässt sich gleichfalls die Richtigkeit des Ausdruckes (1) in 132 genähert prüfen.

134. Der Stoss des Wassers. — Stoss eines Wasserstrales heisst man nicht bloss, wie bei festen Körpern, das erste Anschlagen des Wassers gegen einen Körper, sondern missbräuchlich auch den Druck, den letzterer durch Ablenkung des noch unzertheilten Wasserstrales längs seiner Oberfläche, erleidet.

Die Wirkung der Ablenkung eines Wasserfadens bei dieser Erscheinung ist offenbar von ganz ähnlicher Art wie bei der Reaction und hängt von den Winkeln α' , α'' der Bewegung mit der Richtung des Druckes und den entsprechenden Querschnitten ω' , ω'' ab. Meist kann man die Geschwindigkeit in dem kleinen Umfang der Erscheinung als ungeändert betrachten; dann ist auch $\omega'' = \omega'$ und der Ausdruck (132) wird

$$Q = d a U^2 (\cos \alpha' - \cos \alpha'') \quad (1)$$

Sucht man den Druck in der Richtung des Wasserstrales, so ist $\alpha' = 0$, α'' gleich der ganzen Ablenkung α , also

$$Q = d a U^2 (1 - \cos \alpha) = 2 a (1 - \cos \alpha) H \cdot s \quad (2)$$

Für eine rechtwinklichte Ablenkung A (Fig. 102) wird also der dynamische Druck dem doppelten hydrostatischen gleich; für eine kleinere, B, kann er bis beinahe auf 0 herabsinken; für eine stärkere endlich, C, wenn der Strahl zuletzt vollständig zurück getrieben wird, auf den vierfachen hydrostatischen Druck ansteigen.

Versuche von Morosi und andern, in welchen die getroffene Fläche an dem verticalen Arme eines Winkelhebels befestigt war, während Gewichte an dem horizontalen Arme das Zurückweichen hinderten und den Druck angaben, haben die Richtigkeit dieser Resultate bestätigt. Weissbach vergleicht den Wasserstoss mit der Reaction, indem er vor die Seitenöffnungen seines Reactionsrades (Fig. 101) verschiedene Stossflächen an die Arme befestigt. Bei ebenen und verticalen Stossflächen steht das Rädchen, wegen Gleichheit der beiden Wirkungen still; bei convexer Stossfläche überwiegt die Reaction, bei concaver der Stoss. Auch hier stimmt die gemessene Arbeit, so weit es bei Versuchen dieser Art erwartet werden kann, mit der berechneten überein.

135. Abweichende Fälle. — Man wird allgemein den Druck, den eine getroffene Fläche erleidet, durch einen Ausdruck

$$Q = k \cdot a H s$$

darstellen können, wo k von 0 bis 4 variirend einen Coeff. bezeichnet,

der mit der Ablenkung der Faden sich ändert. Diese Ablenkung kann aber abhängen:

1) Von der Grösse der getroffenen Fläche. Da die Wasserfaden, z. B. auf eine ebene Fläche treffend, einen Conus todten Wassers umschliessen und allmählig nur ihre Richtung verändern, so muss die getroffene Fläche zu vollständiger Ablenkung einen $2\frac{1}{2}$ bis 3mal grössern Durchmesser als der Wasserstral haben. Wo nicht, entweichen die Wasserfaden in schiefen Richtungen und k wird kleiner als 2.

2) Von der schiefen Stellung der Fläche. Es treffe der Stral gegen eine gekrümmte Rinne, die ihn vollständig um den Winkel α ablenke. Die Wirkung in der Richtung $a b$ (Fig. 103) des Strales wird für eine Gesamtablenkung β .

$$d a U^2 (1 - \cos \beta)$$

sein; diejenige in der senkrechten $a c$

$$d a U^2 \sin \beta$$

da in den Ausdruck (1) von (134) für α' und α'' zu setzen sein wird 90° und $270^\circ - \beta$. Bildet daher die Resultirende Q beider Wirkungen den Winkel γ mit der Richtung des Strales, so bestimmen sich Q und γ aus den Bedingungen

$$Q \cos \gamma = d a U^2 (1 - \cos \beta), \quad Q \sin \gamma = d a U^2 \sin \beta$$

welche geben

$$Q = 2 d a U^2 \sin^2 \frac{\beta}{2}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \cotg \frac{\beta}{2}$$

Die Richtung der Resultirenden Q steht senkrecht zur Halbirungslinie von β .

3) Von der Bewegung der getroffenen Fläche. Eine senkrecht gestellte Fläche, mit der Abflussgeschwindigkeit U zurückweichend, veranlasst keine Ablenkung, erleidet also keinen dynamischen Druck. Weicht sie mit einer kleinern Geschwindigkeit u , so hängt der Stoss von der relativen Geschwindigkeit $U - u$ und seine Wirkung wird sein

$$Q = d a (U - u)^2$$

Für eine entgegenkommende Fläche wäre $u +$ zu setzen.

Allgemeiner ausgedrückt, hätte die Fläche eine Geschwindigkeit u in einer beliebigen Richtung, die mit derjenigen des Wassers den Winkel γ bildet, so erfolgt der Stoss so, als wäre die Fläche ruhend, das Wasser aber mit einer Geschwindigkeit begabt, welche die Resultirende aus U und der entgegengesetzt genommenen u der Fläche wäre; denn die gegenseitige Beziehung zweier Körper wird nicht verändert, wenn man beiden eine gleiche Geschwindigkeit u entgegengesetzt mittheilt, was die Fläche zur Ruhe bringt.

Das Schweben einer hohlen Kugel A (Fig. 104) auf dem Gipfel eines etwas reichen Springbrunnens B ist eine Wirkung des schiefen Stosses. Tritt nämlich die Kugel etwas aus der Axe des Wasserstrales, so werden auf dieser Seite die Ablenkungen stärker, erzeugen einen stärkern Druck und treiben die Kugel nach der Axe zurück.

136. Wasserräder. — Ohne in die praktische Hydraulik überzugreifen, mögen einige Worte über die nützliche Anwendung des Wassers hier am Orte sein. — Wie mannigfach auch, den gegebenen

Zwecken und Verhältnissen zufolge die Beschaffenheit der hydraulischen Motoren sein mag, sie benutzen am Ende alle die Wirkung der Schwere auf das Wasser, sei es, dass sie dasselbe unmittelbar als Gewicht wirken lassen, oder mittelbar die Geschwindigkeit, die aus einer vorangegangenen Wirkung der Schwere entstanden ist, zur Anwendung bringen. Ist also M die vom Wasserzufluss in 1 Sec. gelieferte Wassermasse, Mg ihr Gewicht, $H' = \frac{U^2}{2g}$ die Höhe, welche

zur Geschwindigkeit U gehört, mit welcher das Wasser den Motor erreicht, H endlich den Höhenunterschied der Stelle, wo das Wasser eintrifft über dem Stande des Unterwassers, so steigt die vom Wasser gebotene Arbeitsgrösse (63) (Produkt von Druck und Weg in seiner Richtung) auf $Mg(H + H')$

Befindet sich nun der Motor in einem gleichförmigen (oder periodischen) Gange, dem einzigen, den zu berücksichtigen es von Wichtigkeit ist, so verschwindet der Einfluss der Inertie seiner Theile, und jene Arbeitskraft wird vertheilt und verbraucht werden:

1) Auf eine Wassermenge m , die der Benutzung entgeht und eine Arbeitskraft $mg(H + H')$ darstellt, 2) auf die nützliche Arbeitskraft $P \cdot V$, Produkt des Druckes P in der Richtung und an der Stelle, wo das Wasser wirkt, mit der Geschwindigkeit V dieser Stelle, 3) auf eine Arbeitskraft R , welche durch die Reibungen des Rades selbst vernichtet wird, 4) auf die lebendige Kraft $\frac{1}{2}(M - m)U'^2$, mit welcher das benutzte Wasser den Motor wieder verlässt, endlich 5) auf einen Theil lebendiger Kraft Q , welcher durch Stösse, Störungen der Bewegung, Wirbel, Gegenwirkungen u. s. f. des Wassers verloren geht.

Die Summe dieser 5 Grössen, der ganzen Arbeitskraft gleichgesetzt, gibt als nutzbare Arbeitskraft

$$P \cdot V = (M - m)g(H + H') - R - \frac{1}{2}(M - m)U'^2 - Q$$

Sie erscheint um so grösser, 1) je kleiner die verlorne Wassermenge m ist, 2) je geringer die Reibungen des Motors sind, 3) je kleiner U' ist, das heisst, je vollständiger das Wasser seine Bewegung verliert und als todttes Wasser den Motor verlässt, 4) je weniger plötzliche und nachtheilige Bewegungsänderungen das Wasser am Motor erleidet.

Die Vorzüge der neuern Motoren, sowohl der eigentlichen Wasserräder mit horizontaler Axe, als der Reactionsräder und Turbinen mit verticaler Axe, beruhen besonders darauf, dass sie den letzten zwei Bedingungen möglichst zu genügen trachten, besonders, wenn es sich um gute Benutzung der Wassergeschwindigkeit handelt. Das Wasser muss ohne eigentlichen Stoss, also mit einer längs der Fläche der Schaufeln gerichteten relativen Bewegung an dieselben gelangen, durch Ablenkung und Reibung seiner Wasserfaden für die Bewegung möglichst günstig auf dieselben wirken, endlich möglichst entgegengesetzt mit derjenigen Geschwindigkeit austreten, welche das letzte Element des Schaufelblattes hat. Aber allerdings ändert sich die Arbeit eines

Motors auch mit dem Widerstande P , den er zu überwinden hat, und es gibt für einen jeden derselben einen solchen Widerstand, der in Verbindung mit der gleichzeitig eintretenden Geschwindigkeit, ein grösstes Produkt liefert und die beste Benutzung der Maschine darstellt.

137. Der Stossheber. — Eine dem Prinzip nach merkwürdige, wenn auch selten mit Vortheil angewandte Maschine, ist der von Montgolfier erdachte Stossheber, dessen Spiel einzig und allein von dem Unterschiede des statischen und dynamischen Druckes des Wassers abhängt. Das fliessende Wasser gelangt durch die Röhre A (Fig. 105) zu dem Kopfe des Stosshebers B, über welchem der Windkessel C mit der Steigröhre c d angebracht ist. Eine erste zum Abfluss des Wassers dienende Oeffnung a lässt sich durch eine hohle Metallkugel von unten schliessen, eine zweite nach dem Windkessel sich öffnende Klappe b trennt diesen vom Wasserzufluss.

Die Kugel a ist schwer genug, dem Druck des ruhenden Wassers zu widerstehen; wenn aber die Geschwindigkeit des Abflusses wächst, kommt ein Augenblick, wo der dynamische Druck die Kugel hebt und die Oeffnung verschliesst. Das in der Röhre in Bewegung begriffene Wasser wird plötzlich gehemmt und übt, vermöge seiner lebendigen Kraft, einen Stoss gegen die Wände des Rohres und gegen das Ventil b aus, wodurch dieses gehoben und ein Theil des Wassers in den Windkessel C und von diesem in die Steigröhre c d getrieben wird. — Nach erfolgtem Stoss hat das Wasser seine Bewegung verloren, die beiden Ventile sinken sofort und das Spiel beginnt von neuem.

Die Wirkung der Maschine besteht hiernach in der Erhebung einer gewissen Menge Wasser durch das Steigrohr, auf Unkosten einer grösseren Menge abgeflossenen Wassers. Bis jetzt ist die Schwierigkeit der Berechnung des Stosshebers ein Grund gegen seine häufigere Anwendung geworden. Indess hat Eytelwein gefunden, dass in einigen Fällen, bei Steighöhen die nicht mehr als das Doppelte der Druckhöhe des Wassers betragen, eine Wirkung von $\frac{9}{10}$ der Arbeitskraft erhalten wurde, freilich bei grössern Höhen kaum $\frac{1}{5}$. Wie leicht zu ersehen, werden Länge des Zuflussrohres, Geschwindigkeit und Dichtigkeit der Flüssigkeit günstig wirken müssen.

138. Druck gegen einen eingesenkten Körper. — Während in ruhender Flüssigkeit der horizontale Druck gegen einen eingetauchten Körper sich von allen Seiten aufhebt (104), ist diess in fliessendem Wasser nur dann der Fall, wenn der Körper mit der Geschwindigkeit des Wassers sich fortbewegt. Ist derselbe A (Fig. 106) ruhend, so werden die gegen ihn gerichteten Wasserfaden an seiner Vorderseite a abgelenkt, die mittlern am stärksten, die äussern immer weniger, fliessen dann an den Seiten hin, und vereinigen sich unter spitzem Winkel hinter dem Körper wieder. Daraus gehen Wirkungen der Ablenkung hervor, die, an verschiedenen Stellen verschieden, an einem oberflächlich schwimmenden Körper durch Hebungen und Senkungen des Wassers sich verathen. Vor dem Körper in a tritt eine Vermehrung des Druckes, eine Erhöhung ein, die bei einer Wassergeschwindigkeit U theoretisch

$$h = \frac{U^2}{2g}$$

betragen müsste. Nach der Umbiegung der Wasserfaden bildet sich aber in *b* eine Verminderung des Druckes, die namentlich hinter der Kante des Körpers bedeutend wird. Auf der Rückseite fliessen die Theilchen seitwärts gegen eine noch grössere Vertiefung, die von Wirbeln eingenommen ist.

Hiernach entsteht an der Vorderseite eine Vermehrung *p* des hydrostatischen Druckes $P = A H s$, auf der Rückseite eine Verminderung *p'*, zusammengefasst also ein Druckunterschied

$$Q = p + p'$$

welcher den Körper im Sinne des Wassers fortzutreiben strebt. Eine genaue Berechnung der Ablenkungen war bisher unmöglich, weil sie für verschiedene Wasserfaden ungleich sind und viel weiter reichen als die Dimensionen des Körpers. Man begnügt sich einstweilen für *p* und *p'*, nach Analogie mit dem Stoss eines Wasserstrales Ausdrücke $k A h s$ und $k' A h s$ in Anwendung zu bringen, also

$$Q = A h s (k + k')$$

zu setzen, und dabei die Coeffic. *k*, *k'* den Beobachtungen gemäss zu bestimmen.

So wird denn der Gesamtdruck proportional angenommen 1) der eingetauchten Fläche *A*, was man gewissermassen als Querschnitt des abgelenkten Wasserstrales betrachtet, 2) der Druckhöhe *h* oder dem Quadrate der Geschwindigkeit U^2 , da bei doppelter Geschwindigkeit z. B., in 1 Sec. zweimal so viel Theile, zweimal so schnell abgelenkt werden, 3) dem specifischen Gewichte *s*, welches die Zahl abgelenkter Theile bestimmt, und 4) den Coeffic. *k* und *k'*, welche mit der Art der Ablenkung an der Vorder- und Rückseite, d. h. mit der Gestalt und Grösse des Körpers variiren.

Die nämlichen Ausdrücke benutzt man zur Berechnung des Widerstandes eines bewegten Körpers in ruhendem Wasser, indem man die gegenseitige Beziehung beider gleich annimmt, als wäre der Körper ruhend, das Wasser aber entgegengesetzt mit gleicher Bewegung begabt (135).

139. Beobachtungen. — Die unmittelbare Messung der Kraft, die zum Halten eines Körpers im fliessenden oder zum gleichförmigen Fortziehen desselben im ruhenden Wasser erforderlich ist, hat die vorigen Gesetze nur unvollständig bestätigt. So z. B. fand Mariotte bei zwei eingesenkten quadratischen Flächen, den Druck nicht der Fläche proportional; diese verhielt sich wie 100 : 25, jener dagegen wie 100 : 16.

Nach Dubuat und Duchemin ist der Druck auf gleiche Vorderflächen verschiedener prismatischer Körper von gleichem Querschnitt der nämliche, derjenige der Rückseite hingegen von dem Verhältniss der Länge *L* zu der Seite *D* des quadratischen Querschnittes abhängig. Der erstere erhielt mit Prismen, für welche $D = 32,5$ Centim. war, in den beiden Fällen von fliessendem und ruhendem Wasser

	$\frac{L}{D}$	k	k'	$k + k'$ in bewegtem ruhendem W.	
Brettchen	0	1,19	0,67	1,86	1,25
Würfel	1	1,19	0,26	1,45	1,28
Prisma	3	1,19	0,13	1,32	1,32
„	6	1,19	0,17	1,36	1,37

Die angenommene Gleichheit beider Fälle ist nicht vorhanden. In beiden Fällen aber ergibt sich von einem gewissen Werthe der Länge an eine Wiederzunahme des Coeffic., was ohne Zweifel der an den längern Seiten grössern Reibung beizumessen ist.

Solche Versuche wurden namentlich auch mit Rücksicht auf den Widerstand der Schiffe angestellt, wo also der Körper oberflächlich schwimmt und A nur dem eingetauchten Theile entspricht. Dubuat erhielt mit einem Prisma von 130 Centim. Länge, 84 Breite und 65 Höhe, vorn mit einem verticalen Keile vom Winkel β versehen, folgende relativen Werthe des Widerstandes

Winkel $\beta =$	180°	132°	84°	36°	12°
Widerstand	1	0,85	0,51	0,41	0,40

kleinere Winkel als 36° bringen, wegen zunehmender Reibung an den längern Schenkeln des Keiles, keinen Vortheil mehr.

Schiefe, unter einem Winkel γ an- oder niedersteigende Flächen, gaben vergleichungsweise mit demselben Prisma folgende Widerstände

Winkel $\gamma =$	90°	43°	25°
Widerstand der ansteigenden Fl.	1	0,65	0,64
niedersteigenden	1	1,36	1,12

in letztem Falle also, in Folge eines Herabdrückens des Körpers einen grössern Widerstand als bei verticaler Fläche.

Durch Flächen mit doppelter Krümmung wird der Abfluss der Wasserfaden bedeutend erleichtert. Bei einer Kugel sinkt der Coeffic. $k + k'$ auf den Werth 0,6 herab. Bossut und Morin nehmen für die bestgestalteten Fahrzeuge bei mässigen Geschwindigkeiten unter 1,7 Met. 0,22 bis 0,27 an; indess scheint dieser Werth bei grossen Geschwindigkeiten von 3 Met. und mehr nahe auf das Doppelte anzusteigen. Die Frage über die Gestalt des geringsten Widerstandes wurde theoretisch nur unvollständig gelöst, wogegen die Praxis hinlänglich genaue empirische Regeln darüber besitzt.

Cap. 7. Die Wellenbewegung.

140. Verschiedene Wellenarten. — Erhebungen und Vertiefungen der Oberfläche, durch Störungen des Gleichgewichtes einer Flüssigkeit hervorgebracht und nur so lange andauernd als die Theilchen Bewegung haben, heissen Wellen. Man unterscheidet vorzüglich drei Arten derselben.

1) Feste Wellen, Erhöhungen und Vertiefungen, die an bestimmten Stellen in der Nähe fremder Hindernisse bleibend entstehen. Sie gehören nicht zu der wahren Wellenbewegung, sondern sind eine Erscheinung des Abflusses, wie die Umkehrung des Wasserstrales (122)

und der Wulst am Vordertheile eines Schiffes (138). Die Theilchen gleiten wie in festen Wasserfaden über die wellige Oberfläche, indem Druck und Geschwindigkeitsverhältnisse jeder Stelle durch äussere Bedingungen vorgeschrieben sind.

2) Fortschreitende Wellen, die in Gestalt langer Rücken und Thäler über die Oberfläche des Wassers hinwandern;

3) Stehende Wellen, in welchen die Höhen und Tiefen, wie durch ein Tanzen des Wassers, an der gleichen Stelle entstehen und wieder verschwinden.

Jede ganze Welle besteht aus einem Berge und einem Thale, welche zusammen deren Breite bilden, und in der Regel nahe gleiches Volumen haben; sie umfasst eine Reihe in allen Stufen der Bewegung begriffener Wassertheilchen. Obgleich beständig die nämlichen Theilchen die Oberfläche zusammensetzen, darf ihre Bewegung doch mit derjenigen der ganzen Welle nicht verwechselt werden. So z. B. bewirken die nach dem Ufer eilenden Wellen keine wirkliche Strömung, sondern sind lediglich eine veränderliche Form, derjenigen eines bewegten Tuches ähnlich.

H. und W. Weber haben die Wellenbewegung mit Sorgfalt untersucht. Sie bestimmten die Gestalt der Wellen nach dem nassen Umriss auf schnell eingetauchten Schiefertafeln, die Bewegung der einzelnen Theilchen aber aus der Bewegung feiner schwimmender Theilchen in einer aus parallelen Glaswänden gebildeten, mit Wasser gefüllten Wellenrinne.

141. Fortschreitende Wellen. — Jede Störung des ruhigen Wasserspiegels ruft fortschreitende Wellen hervor, kreisförmig sich ausbreitend und noch lange bemerkbar, nachdem die Ausgangsstelle bereits zur Ruhe gelangt ist. Verfolgt man die Bewegung eines kleinen schwimmenden Körpers während des Durchganges einer regelmässigen Welle, so sieht man denselben einen kleinen Kreis (oder liegende Ellipse) A (Fig. 107) beschreiben, dessen Durchmesser dem Höhenunterschiede des höchsten und tiefsten Punktes der Welle gleich ist, und zwar in der Zeit, welche die Welle gebraucht, um durch ihre ganze Breite fortzuschreiten. Die Hauptstufen der Bewegung sind die folgenden

Anfang des Berges

Verticales Steigen.

Gipfel des Berges

Horizontale Vorwärtsbew.

Ende des Berges, Anfang des Thales

Verticales Sinken

Tiefe des Thales

Horiz. Rückwärtsbew.

Ende des Thales

Verticales Steigen.

Zwischen der Umlaufs- oder Schwingungszeit T des Theilchens, der Fortpflanzungsgeschwindigkeit U , der Wellenbreite L und der mittlern Schwingungsgeschwindigkeit u , hat man, wenn r den Radius des Kreises bezeichnet, die Beziehungen

$$L = U \cdot T \text{ und } u = \frac{2 r \pi}{T}$$

Die Wellenbreite verhält sich zum Schwingungskreise wie die Fortpflanzungs- zur mittlern Schwingungsgeschwindigkeit. Es werden ferner die horizontalen und verticalen Coordinaten

x, y des Theilchens, so wie die horizontalen und verticalen Geschwindigkeiten v, w zur Zeit t durch periodische, aus Sinus und Cosinus bestehende Funktionen von $2\pi \frac{t}{T}$ darzustellen sein. Die ganze Welle, der Gestalt nach einer gestreckten Cycloide (71) ähnelnd, besteht demgemäss aus einer Reihe Theilchen in allen möglichen Stufen einer gleichen Kreisbewegung (Fig. 108).

Sind Berg und Thal ungleich, z. B. jener stärker als dieses, so kehrt das Theilchen nicht genau zu seinem Ausgangspunkte zurück, sondern ist um einen kleinen Schritt vorgerückt (Fig. 107 B); entgegengesetzten Falles um einen solchen zurückgegangen (C). Man sieht in der That schwimmende Körper oft im Sinne der Wellen langsam fortwandern, bisweilen im entgegengesetzten zurückweichen.

Nach der Tiefe verkleinert sich die Bewegung (Fig. 109). Die Umlaufszeit wird kleiner, die elliptische Bahn wird flacher und verwandelt sich nahe dem Boden in eine kleine gerade Linie; doch war in Tiefen, welche 350mal die Wellenhöhe überstiegen, noch Bewegung bemerkbar.

142. Geschwindigkeit der Fortpflanzung. — Sind auch die genauen Gesetze dieser Geschwindigkeit unbekannt, so haben die Weber'schen Versuche dennoch die Umstände, welche darauf Einfluss haben, nachgewiesen. Sie ergaben für Wellen ohne Seitenausbreitung Folgendes:

1) Da die Welle in der Umlaufszeit der Theilchen um ihre Breite vorrückt, so wächst ihre Geschwindigkeit durch Verkleinerung der ersten, durch Vergrösserung der zweiten dieser gewissermaassen unabhängigen Grössen, von welchen die erste entgegengesetzt mit der Höhe sich ändert.

2) Gleich starke, d. h. eine gleiche lebendige Kraft (36) enthaltende Wellen schreiten mit nahe gleicher Geschwindigkeit fort, mag auch die eine breit und niedrig, die andere hoch und schmal sein, was von der Erregungsweise abhängt. Hingegen haben stärkere Wellen die schnellere Fortpflanzung.

3) Die erste Welle namentlich, bei ihrem gleichförmigen Fortschreiten, nimmt an Höhe ab, an Breite aber zu; die Umlaufszeit muss also, trotz der kleinern Bahnen, länger werden.

4) Sollen die Wellen verschiedener Flüssigkeiten gleich fortschreiten, so muss die Stärke der Anregung dem specifischen Gewichte proportional sein. Durch das Herabsinken gleich hoher Flüssigkeitssäulen erhält man schmale und hohe Wellen von Quecksilber, niedere und breite im Wasser, die gleich schnell wandern.

5) Verminderung der Wassertiefe vermindert sowohl die Schwingungs- als Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

6) Seitliche Ausbreitung einer Welle macht die Welle langsamer und niedriger; Concentration erhöht und beschleunigt sie. Jenes beobachtet man bei den Wellenkreisen auf freiem Wasser; dieses, wenn die Wellen von den Wänden eines erschütterten Gefässes nach der Mitte gehen.

143. Entstehung der Wellen. — Die Wellenbewegung, stets eine

Folge einer äussern Störung, entsteht durch Wirkung der Schwere aus dem Streben der Theilchen nach einem stabilen Gleichgewicht. Ein in das Wasser geworfener Stein z. B. drängt dasselbe als kleinen Wall zur Seite. Der Druck der so gehobenen und bewegten schweren Theilchen wirkt sowohl nach aussen als nach dem Verschwinden des Steines nach innen hin. Nach Aussen setzt er immer neue Theile in Bewegung, deren folgeweises Steigen den fortrückenden Berg der Welle veranlasst, während das nachfolgende Thal von dem Zurücksinken der Theile, vermöge der erlangten Geschwindigkeit unter den Spiegel der Flüssigkeit, herrührt. Die Welle, indem sie kreisförmig sich ausbreitet, wird breiter und niedriger und verliert sich zuletzt in die horizontale Ebene.

Nach Innen verursacht der Druck der gehobenen Theile, wegen Concentration der Wirkung, ein höheres Steigen des Wassers, das in abnehmenden Oscillationen sich wiederholt und der Ursprung einer Reihe schwächerer Wellenringe wird. So ruft eine einzelne Störung eine Reihe abnehmender Wellen hervor, die in Folge ihrer ungleichen Geschwindigkeit (142) mehr und mehr aus einander rücken. Anfangs ist die erste Welle die höchste, bald aber ragt die zweite mehr hervor, dann die dritte u. s. f. Während die ersten allmählig verschwinden, entwickeln sich, wie durch eine Rückwirkung, im Gefolge der vorhandenen, neue, die ihrerseits dominiren und verschwinden können.

Man bemerkt ferner, dass schon in kleiner Entfernung von der Ausgangsstelle, gleichviel wie die Anregung geschah, welche Gestalt z. B. der hineingeworfene Körper hatte, die Wellen nach ihrer Länge hin vollkommene Kreise darstellen. Es rührt diess von einer rein hydrostatischen Ausgleichung des Druckes (117) nach der Länge der Wellenrücken her (senkrecht auf alle Bewegungsrichtungen der Theilchen), wobei die höhern Theile des Walles sich erniedrigen, die tiefern sich erheben, jene ihre Geschwindigkeit vermindern (142), diese sie vermehren.

144. Wellen im Grossen. — Die auf freiem Wasser vom Winde erzeugten Wellen weichen von einfachen Kreiswellen ab, indem die Störung des Gleichgewichtes von zahllosen verschiedenen Stellen ausgeht. Es beginnt die Bewegung mit einer schwachen Kräuselung, herrührend theils von einem ungleichen Druck des Windes, theils von einem Anhängen der Luft am Wasser, theils von zufälligen Stäubchen, die der Wind fassen kann. Die ersten Ungleichheiten einmal gebildet, wirkt der Wind gegen die eine Seite derselben und verstärkt die sinkende, und damit zugleich die steigende Bewegung der Theilchen. Die Wellen wachsen so an Grösse und Stärke, verschmelzen sich zu ausgedehnten Rücken, deren unbestimmt polyedrische Oberfläche immer noch den zusammengesetzten Ursprung verräth, und wandern von den Hauptstellen der Anregung nach allen Seiten gegen die Ufer. Wo Untiefen verborgen sind, hebt sich der ganze Wellenzug; wo der Wind stärker einwirkt, überholen beim Fortschreiten die Berge die Thäler, die Welle fängt an zu schäumen und überzugiessen, wie es namentlich am Strande beobachtet wird; wo endlich die Wellen in Buchten sich concentriren, wachsen sie zu ungewöhnlicher Höhe an.

Die Grösse der Wellen hängt bekanntermassen, bei gleichem Winde, von der Ausdehnung und Tiefe der Wassermasse ab, auf welcher sie sich entwickeln. Auf Landseen sind Wellen von $1\frac{1}{2}$ Met. eine Seltenheit; auf der Ostsee steigen sie auf $2\frac{1}{2}$ Met., im Mittelmeer auf 4, im atlantischen Ocean auf 10 und mehr Met. Mit der Grösse wächst die Geschwindigkeit (142), die nach Horsburgh auf 32000 Met. die Stunde, nach Wollaston noch höher steigen kann. Nach der Tiefe hin kann die Bewegung auf 60 und 80 Met. (Bremontier), nach Siau sogar bis 180 Met. reichen.

145. Theorie der Wellenbewegung. — Noch scheint keine Theorie den verwickelten Vorgang der Wellenbewegung ganz vollständig zu erklären. Ein von La Grange gefundenes Gesetz, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem langen nicht tiefen Canale der Fallgeschwindigkeit durch die halbe Wassertiefe gleich sei, hat sich wohl im Grossen, nicht aber mit der Wellenrinne bewährt. Die vollständigsten Theorien sind die von Gerstner, von Cauchy und Poisson. Letzterer findet für eine schmale tiefe Rinne, in welcher die Bewegung durch das Herausziehen eines wenig eingetauchten gekrümmten Körpers hervorgebracht wird, folgende Gesetze:

1) Der erste, kaum merkliche Anstoss pflanzt sich fast momentan durch die ganze Wassermasse fort, so dass anfangs die Geschwindigkeit u der Theilchen in der Entfernung r vom Ursprunge mit der Verticalen einen Winkel bildet, der das Doppelte desjenigen von r ist, und den Werth hat

$$u = \frac{g \cdot t \cdot A}{3 \cdot \pi \cdot r^2}$$

u ist also proportional der Zeit t von Anfang der Bewegung, der Oberfläche A der Anregungsstelle; und für gleiche Entfernung r gleich gross.

2) Die oberflächliche erste Bewegung ist durchgehends ein Sinken proportional der Tiefe h und Breite l der Auszugsstelle. Es ist nämlich diese Geschwindigkeit

$$u = \frac{2 \cdot h \cdot l \cdot g \cdot t}{3 \pi \cdot r^2}$$

3) Die stärkere Anfangsbewegung beginnt mit einem Thale und besteht in abnehmenden aus einander gehenden Wellen, die gleichmässig beschleunigt fortschreiten und immer mehr aus einander rücken. Fortpflanzungsgeschwindigkeit U und Höhe H sind

$$U = \alpha \cdot g t \quad ; \quad H = \beta \frac{h l}{y t^2}$$

für das erste Thal ist $\alpha = 0,3253$, $\beta = 1,8388$

» den ersten Berg $= 0,1163$, $= 1,2557$

4) Die spätere Oberflächenbewegung besteht in grossen Hauptwellen, die von kleinen Nebenwellen (Treppen) überdeckt sind. Die Gipfel und Knoten (Punkte des ursprünglichen Spiegels) wandern gleichförmig fort und man hat

$$U = \gamma \sqrt{\frac{g l}{2}}, \quad H = \delta \cdot h \sqrt{\frac{l}{2 g t^2}}$$

Dabei erstes Thal $\gamma = 0,3691$, $\delta = 2,3527$, zweites $\gamma = 0,1649$, $\delta = 0,4032$
 erster Berg $0,2059$ $0,6878$, » $0,1421$ $0,2741$

5) Für die kleinen Nebenwellen, deren Höhe h und Schwingungszeit T , findet man

$$h = \varepsilon \frac{l}{2}, \quad T = \zeta \sqrt{\frac{l}{2 g}}$$

wobei erstes Thal $\varepsilon = 1,7118$, $\zeta = 2,3191$, zweites $\varepsilon = 0,3420$, $\zeta = 1,0364$
 erster Berg $0,5331$ $1,2938$ $0,2536$ $0,8926$.

6) Vertical nach der Tiefe besteht die Bewegung in einem anfänglichen Steigen und nachherigen Sinken. Die Stellen grösster Schwingungsgeschwindig-

keit pflanzen sich gleichmässig beschleunigt mit einer Geschwindigkeit U fort und haben in der Tiefe r die Schwingungsgeschwindigkeit u

$$U = \vartheta \frac{gt}{2} \quad \text{und} \quad u = \iota \frac{A}{r} \sqrt{\frac{g}{r}}$$

wo Geschwindigkeitsmaxim des Steigens $\vartheta = 2,8161$, $\iota = 0,2328$
 Sinkens $0,2614$ $= 0,0441$

Die ganze verticale Ausdehnung der Schwingung ist

$$h = 0,4382 \frac{A}{r}$$

146. Zurückwerfung der Wellen. — Gelangt eine Welle, senkrecht fortschreitend, gegen eine Wand, so durchläuft sie die in Fig. 110 für 5 Augenblicke dargestellten Veränderungen. Die Bewegung des Berges kann sich nicht nach vorn entwickeln und verwandelt sich (B) in ein stärkeres Steigen, in welchem die Theilchen, dasjenige zunächst der Wand vertical, nach oben convergiren. Das Sinken des Wassers wird nun der Ursprung eines rückwärts schreitenden Berges, der für einen Augenblick das noch vorrückende Thal aufhebt (C), nachher dann einer tiefen Grube (D), mit divergirenden Theilchen, aus der ein dem Berge rückwärts folgendes Thal hervorgeht (E). So geschieht es, dass die ganze Welle sich umwendet ohne Aenderung in der Reihenfolge von Berg und Thal.

Wandert auf der Wasseroberfläche ein Zug geradliniger Wellenrücken in der Richtung $a b$ (Fig. 111) schief gegen eine Wand A , so zerlegt sich die Bewegung der Theilchen in einen senkrechten und parallelen Antheil. Die nachherige Bewegung setzt sich zusammen aus der gemäss dem Vorhingesagten senkrecht zurückkehrenden Bewegung und der unveränderten parallelen; daraus geht ein zurückgeworfener Wellenzug hervor, dessen Richtung der Fortpflanzung einen gleichen Winkel $\beta = \alpha$ mit der Wand bildet, wie der einfallende Wellenzug.

Das Gesetz der Zurückwerfung der Wellenrichtung unter dem gleichen Winkel erklärt z. B., dass von einem Steine in a erzeugte Kreiswellen von einer ebenen Wand wieder in Kreiswellen zurückkehren (Fig. 112), deren Centrum b eben so weit hinter der Wand als die Ausgangsstelle a vor derselben liegt. Ebenso werden Kreiswellen, in einem elliptischen Quecksilbergefass durch auf den einen Brennpunkt fallende Tropfen hervorgebracht, nach der Zurückwerfung kreisförmig gegen den andern Brennpunkt zusammenlaufen, denn alle Wege von dem einen Brennpunkte zur Curve und dann zum andern, sind erstens gleich lang und bilden zweitens gleiche Winkel mit der Curvenlinie.

147. Stehende Wellen. — Wenn zwei einfache Wellen (Fig. 113) einander gerade entgegenlaufen, so wird das Theilchen a an der Stelle, wo entsprechende Bewegungen zusammenkommen sich nicht horizontal, sondern mit nahe doppelter Stärke nur vertical auf und nieder bewegen können. Versuche im Kleinen gaben, verglichen mit dem der fortschreitenden Welle, eine Höhe des Steigens von 47 zu 26. Jede Welle wird daher von der andern wie von einer Wand zurück-

geworfen und es sieht aus, als würden beide, nach momentaner Verschmelzung, ungestört ihre Wege fortsetzen.

Sind es andauernde Wellenzüge, die sich begegnen, so entsteht aus der Durchkreuzung an allen Stellen, der Zustand stehender Wellen, wovon Fig. 114 die Hauptstufen darstellt. An den, um eine halbe Wellenbreite aus einander liegenden Stellen $a, b, a', b' \dots$ kommen immer entsprechende Bewegungen zusammen; daher schwingen die Theilchen auf doppelte Weite vertical auf und nieder und zwar in $a, a' \dots$ in entgegengesetztem Sinne als in $b, b' \dots$. Zwischen diesen Stellen, den Bäuchen der Bewegung, sind andere Stellen, die Knoten, c, d, c', d' , wo die verticalen Bewegungen sich aufheben und die Theilchen, auf den ursprünglichen Wasserspiegel bleibend, in $c, c' \dots$ entgegen von $d, d' \dots$, sich nur horizontal verschieben. Das Wasser tanzt abwechselnd auf und nieder in stehenden Wellen von derselben Breite und nahe der doppelten Höhe der fortschreitenden und bildet zwischen den Wechsellinien vorübergehend eine horizontale Fläche, in welche alle Theilchen mit dem Maximum ihrer Geschwindigkeit eintreffen. Die Bahnen der Theilchen selbst sind cycloidale Linien, die zur Bildung eines Berges convergiren, bei Entstehung des Thales divergiren (Fig. 115).

Wenn schiefgerichtete Wellenzüge, sei es mit gerade- oder krummlinigter Längenerstreckung, sich durchkreuzen, so entsteht aus der Interferenz eine oft zierliche Vertheilung der Berge und Thäler. Für jede Stelle und für jeden Augenblick ist die vorhandene Bewegung nahe so, als hätten die beiden einzelnen Bewegungen sich einfach über einander gelegt oder algebraisch summirt. Die Figuren 112 und 116 geben durch dicht punktirte Linien die Anordnung der Maximaländerungen, durch weitpunktirte diejenige der Knoten an.

Im Grossen werden stehende Wellen, wegen ihrer starken unregelmässigen Bewegung, den Schiffen besonders gefährlich. Man beobachtet sie vorzugsweise in der Nähe der Hindernisse, aus der Begegnung direkter und zurückgeworfener Wellen, dann gegen Ende eines Sturmes, wenn der Wind nur noch auf einzelne Gegenden der Wasserfläche anregend wirkt.

148. Beugung der Wellen. — Eine letzte Veränderung, welche die Wellenbewegung erleiden kann, ist die Beugung, welche dann eintritt, wenn ein Wellenzug, z. B. aus geradlinigten Wellen bestehend und in der Richtung ab (Fig. 117) fortschreitend, das Ende b eines Hindernisses, etwa einer Wand A , erreicht. Auf der Vorderseite der Wand erfolgt Zurückwerfung (146) nach bc ; auf der Rückseite dagegen bilden sich in dem geschützten Raume B , durch eine Seitenwirkung des Druckes der ungestört fortschreitenden Wellen, schwache Beugungswellen, die b zum Ausgangspunkte haben. Die Bewegungsmitteltheilung nach der Seite schwächt aber die Hauptwellen, und so sieht man, nicht nur im geschützten Wasser B , auch in C , Ringe sich fortpflanzen, auf denen die Hauptwellen ein vermindertes Steigen und Sinken zeigen, also von entgegengesetztem Charakter als die Beugungswellen.

Hätte die Wand überdiess eine Bewegung den Hauptwellen entgegen, so werden Beugungswellen und Wirbelbewegungen (130) sich vereinigen und die verwickelten Erscheinungen erzeugen, die man z. B. hinter einem Ruderblatte entstehen sieht. Von allen diesen Erscheinungen ist es nicht schwer, nach der täglichen Anschauung, sich eine ungefähre Vorstellung zu bilden, während der genaue mechanische Nachweis die gegenwärtigen Kräfte der Analysis übersteigt.

C. Luftförmige Körper.

1. Gleichgewichtserscheinungen.

Cap. 1. Der atmosphärische Druck.

149. Gase und Flüssigkeiten. — Noch um eine Stufe verwickelter als die Erscheinungen der Flüssigkeiten sind diejenigen der luftförmigen Körper, weil, neben einer noch grössern Beweglichkeit der Theile, auch noch die Dichtigkeit und die von ihr abhängige von Innen nach Aussen wirkende Expansivkraft veränderlich sind.

Alle Erscheinungen, die mit der Beweglichkeit in Verbindung stehen, finden sich bei beiden Classen von Körpern in gleicher Weise und es bedarf keiner neuen Erläuterung derselben. Dahin gehört die allseitige Fortpflanzung des Drucks, der daraus hervorgehende Druck gegen Wände, die Zerlegung des Druckes, die Bedingungen des Steigens und Sinkens (97, 103, 104) u. s. f. Selbst die Zunahme des Druckes von oben nach unten durch das Gewicht der Theile, nach horizontalen Niveauschichten (100), findet sich streng genommen wieder, doch sind die Gase so leicht, dass diese Zunahme bei gewöhnlichen kleinen Gefässen unmerklich bleibt und der Druck nach allen Seiten als gleich und einzig von der Expansivkraft herrührend betrachtet werden kann — eine Annahme die allerdings bei hohen Gefässen nicht mehr erlaubt ist.

Bei den Luftarten fallen alle Erscheinungen der freien Begrenzung sei es gegen den leeren Raum, sei es gegen andere Luftarten weg. Es wirkt die Expansivkraft immer zur Vergrösserung des Volumens, daher eine Gasmasse nur durch vollständige Abgrenzung oder durch äussern Druck zusammengehalten wird. Beim Zustand der Ruhe stehen nothwendig Expansivkraft und äusserer Druck im Gleichgewicht und gelten als gleich. Ueberhaupt sind den Luftarten diejenigen Erscheinungen eigenthümlich, in denen die Expansivkraft hervortritt, welche Kraft wir vorläufig als in vollkommenem Grade vorhanden annehmen werden.

150. Der atmosphärische Druck. — So leicht die Luft ist, wird der Druck aus ihrem Gewichte doch bedeutend, wenn von der äussern bis zur Grenze der Atmosphäre reichenden Luftsäule die Rede ist. Das Dasein des Luftdruckes zeigt sich am Steigen des Wassers in einer Röhre, aus der man die Luft saugt; dass er bedeutend ist, beweist das Eindrücken und Zersprengen einer gespannten Blase, unter der man die Luft entfernt.

Die Entdeckung des Luftdruckes, einer der wichtigsten Fortschritte der Physik, wurde durch die zufällige Wahrnehmung veranlasst, dass bei einem Ziehbrunnen das Wasser dem gehobenen Kolben nicht weiter als 10,333 Meter folgen wollte. Torricelli (1643) nachdem er den Versuch mit Quecksilber wiederholt und dieses nur auf 0,76 Meter, eine dem specifischen Gewichte umgekehrte Höhe, hatte steigen sehen,

erklärte sich gegen die herrschende Meinung, dass ein *horror vacui* das Steigen des Wassers verursache und für die Annahme eines aussen auf die Oberfläche wirkenden Luftdruckes, — womit in der That alle Erscheinungen zusammenstimmen.

Eine einerseits geschlossene, vollständig mit Quecksilber gefüllte Röhre, die man umdreht, und unter Quecksilber öffnet, heisst ein *Barometer*. Das Quecksilber sinkt, ein Vacuum zurücklassend, auf die Höhe, welche dem jedesmaligen Luftdrucke entspricht und kann daher zur Messung des Letztern dienen. Da 1 Cubikcentim. Quecksilber 13,596 Gramm schwer ist, so bezeichnet eine Höhe von b Centim. einen Druck auf das Quadratcentim. in Grammen von

$$p = 13,596 \cdot b$$

Am Ufer des Meeres im mittlern Europa steht das Quecksilber nahe auf 76 Centim., welche Höhe man als *Normaldruck* betrachtet und 1 *Atmosphäre* nennt. Auf 1 Quadratcentim. drückt 1 Atmosph. mit 1033,296 Gr. auf ein Quadratmeter mit 10332,96 Kilogramm. Da dieser Druck von allen Seiten auf die Körper wirkt, selbst durch das ganze Innere des thierischen Körpers, so tritt er nirgends, ausser wenn er einseitig vorhanden ist, wahrnehmbar hervor.

151. Einrichtung des Barometers. — Für genauere Zwecke erhält das Barometer zweierlei Formen:

1) Das *Gefässbarometer*. Die Röhre A taucht in ein besonderes Gefäss mit Quecksilber B (Fig. 118), dessen Oberfläche dem festen Nullpunkte a entspricht. Da der Quecksilberstand im Gefässe mit jeder Aenderung des Luftdruckes sich gleichfalls etwas verändert und daher vom festen Nullpunkte abweicht, so bedarf die Ablesung der Höhe einer Korrektion vom gleichen Zeichen wie die Variation des Standes in der Röhre. Geht eine kleine Quecksilbermenge vom Gefäss in die Röhre über, so verhält sich das Sinken β' in ersterem zum Steigen β in der Letztern umgekehrt wie die Querschnitte beider. Die Korrektion wird also

$$\beta' = \beta \frac{d^2}{D^2}$$

sein, wenn d , D die Durchmesser von Röhre und Gefäss sind.

Soll diese Korrektion, selbst für die grössten Variationen des Luftdruckes, etwa 15 Millim. vom Mittel, bei einer Röhre von 9 Millim. Weite, unter 0,02 Millim. fallen, was man für gewöhnliche Beobachtungen verlangt, so bedürfte es eines Gefässes von

$$D = \sqrt{\frac{15 \cdot 81}{0,02}} = 246 \text{ Millim.}$$

Weite.

Solche Weiten sind nur an *Standbarometern* zulässig, in welchen man die grosse Menge des Quecksilbers durch eine angemessene Gestalt des Gefässes vermindert (Fig. 119 A). Wo nicht, wie namentlich bei *Reisebarometern*, versieht man das Gefäss mit einem beweglichen Boden (z. B. einem Lederbeutel), der mittelst einer Schraube jedesmal so gestellt wird, dass das Quecksilber den durch eine Elfenbeinspitze bezeichneten Nullpunkt berührt (Fig. 119 B).

2) Das Heberbarometer (Fig. 120) hat, statt eines besondern Gefässes, einen zweiten aufwärts gerichteten Schenkel B. Da die Veränderungen beiderseits bedeutend sind, werden zwei Ablesungen erforderlich, wozu zwei Eintheilungen dienen, die von einem gleichen in der Mitte der Höhe befindlichen Punkte a ausgehen. — Um das Instrument, das vor dem Gefässbarometer die Vorzüge kleines Volumens, kleines Gewichtes und geringerer Kosten hat, für den Transport einzurichten, lässt man den Luftdruck durch eine kleine Oeffnung b wirken, zu klein, um das Quecksilber austreten zu lassen, und hindert den Nachtheil allfällig eindringender kleiner Luftblasen, mit Hülfe der Buntenschen Einrichtung c. Die Röhre ist nämlich an einer Stelle doppelt und bildet einen ringförmigen Raum, der die eindringende Luft zurückhält.

Eine hinlänglich weite Heberöhre ohne Eintheilung, deren Höhenunterschied mittelst eines Cathetometers (10) abgelesen wird, bildet das geeignetste Normal-Barometer eines physicalischen Cabinets.

Das Schiffsbarometer von Amonton, das aus einer conischen hinlänglich engen Röhre besteht, um das Eindringen der Luft neben dem Quecksilber nicht zu gestatten; das Radbarometer, dessen Zeiger von einem auf dem Quecksilber des kurzen Schenkels befindlichen Schwimmer geführt wird u. s. f. sind Formen, die auf keine Genauigkeit Anspruch machen können.

152. Bedingungen der Genauigkeit. — Um den Druck der Luft mit Genauigkeit anzugeben, muss das Barometer 1) aus einer hinlänglich weiten Röhre bestehen, 2) mit reinem Quecksilber gefüllt und 3) vollkommen frei von Luft und Feuchtigkeit sein.

Jede Glasröhre drückt das Quecksilber, wie später erläutert wird, um eine Grösse herab, welche bei kleinem Durchmesser diesem nahe verkehrt proportional ist, bei grösserem in stärkerem Verhältniss abnimmt. Bei 2 Centim. fand Ivory die Depression gleich 4,888 Millim., bei 10 gleich 0,406, bei 20 endlich nur noch gleich 0,031. Dieser von der Capillarität herrührende Fehler tritt am Gefässbarometer mit voller Stärke hervor; am Heberbarometer, wo die beidseitigen Wirkungen sich grossentheils aufheben, weit weniger und kann bei einer Weite von 12 bis 15 Millim. bei gewöhnlicher Benutzung als nahe verschwindend betrachtet werden.

Unreines Quecksilber hat ein anderes specifisches Gewicht als das reine und ändert daher die Höhe der Säule. Soll die letztere nicht um 0,02 Millim. abweichen, so darf das specifische Gewicht nicht um $\frac{1}{28001}$ unrichtig sein. Man hat daher für genaue Instrumente entweder chemisch reines, aus rothem Oxyd bereitetes Quecksilber anzuwenden, oder solches, das durch lange Behandlung mit diluirter Salpetersäure und durch mehrmalige Destillation möglichst von den häufigen Beimengungen von Zinn, Blei, Zink u. s. f. gereinigt worden ist.

Schon eine kleine Menge Luft im leeren Raume drückt das Quecksilber sehr merkbar herab. Daher kann nicht genug Sorgfalt auf die Befreiung der Röhre von Luft und Feuchtigkeit gelegt werden, wozu das blosse Einfüllen heissen Quecksilbers in eine heisse Röhre nicht genügt. Das einzige befriedigende Mittel besteht in dem successiven

Eingiessen kleiner Partien warmen Quecksilbers und dem jedesmaligen Auskochen der betreffenden Röhrenstelle, da dann Hitze und Bewegung des Quecksilbers die stark anhängende Luft entfernen. Oft indess genügt ein einmaliges Auskochen nicht und man muss das mühsame, für die Röhre nicht gefahrlose Verfahren mehrmals wiederholen.

153. Correktionen. — Ist das Instrument mit Sorgfalt hergestellt und mit seiner Eintheilung versehen worden, so geschieht die Ablesung an dem Gipfel der Quecksilberkuppe, indem das Auge sich genau in gleiche Höhe stellt und die Noniushülse zum Contact bringt. Die abgelesene Höhe bedarf folgender Correktionen:

1) Die oben angegebene (151) für die Abweichung des Quecksilbers vom Nullpunkt. Sie setzt voraus, dass man die Höhe kenne, für welche beide zusammenfallen oder sie durch Vergleichung mit einem Normalbarometer bestimmt habe.

2) Die Correktion der Capillarität. Schleiermacher und Bravais haben Tafeln darüber bekannt gemacht, die einen von der Kenntniss des Pfeiles der Kuppe, die andern von der des Randwinkels ausgehend. Sehr genau lässt sich diese Correktion nicht vornehmen, wesshalb es gut ist, sie durch Anwendung weiter Röhren möglichst zu verkleinern.

3) Die Reduktion des Quecksilbers auf 0^0 , weil dasselbe bei verschiedenen Temperaturen ein ungleiches specifisches Gewicht hat, daher eine ungleiche Höhe annimmt. Da das Quecksilber für 1^0 sich um $\beta = 0,00018153$ von seiner Höhe bei 0^0 ausdehnt, so würde die abgelesene Höhe b bei t^0 , bei 0^0 ersetzt durch eine solche

$$b_0 = \frac{b}{1 + \beta t} \text{ genähert} = b(1 - \beta t)$$

4) Die Reduktion der Eintheilung auf 0^0 . Auch die Eintheilung dehnt sich aus, vergrößert ihre Theile und gibt deren zu wenige. Bezeichnet α das Verhältniss der Ausdehnung zur Länge bei 0^0 , so hätte man statt der abgelesenen b Theile bei t^0 , bei 0^0 eine Zahl derselben

$$b_0 = b(1 + \alpha t)$$

Der Werth β ist für Messing $\alpha = 000001873$

Glas „ 0,00000923

Platin „ 0,00000884

Auch über diese Correktionen hat man die Rechnung abkürzende Tabellen. Sie setzen die Kenntniss der Temperatur des Quecksilbers und der Eintheilung voraus, welche durch ein neben der Röhre angebrachtes, wo möglich aus dem nämlichen Glase wie die Röhre verfertigtes Thermometer gegeben wird.

Cap. 2. Die Gesetze der Expansivkraft.

154. Das Gesetz von Mariotte. — Die Expansivkraft einer abgegrenzten Luftmasse ändert sich durch zwei Ursachen: durch Aenderung des Volumens oder der Dichte, und durch Aenderung der Temperatur. Darauf beziehen sich die beiden Grundgesetze der Gase, welche man die Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac nennt.

Zum Nachweis des ersten bedient man sich einer Röhre (Fig. 121) ähnlich derjenigen eines Heberbarometers, nur ist der kurze Schenkel A geschlossen und enthält das Luftvolumen, der lange B offen zur Aufnahme der drückenden Quecksilbersäule. Vergrössert man diese durch Eingiessen von Quecksilber, so verkleinert sich das Luftvolumen in A. Man findet so, wenn man mittelst angebrachter Eintheilungen in zwei Versuchen, einerseits das Volumen V, V' , anderseits die drückende Quecksilbersäule h, h' misst, welche mit dem äussern Barometerstand b die Druckhöhen $H = h + b$ und $H' = h' + b$ ausmachen, die einfache Beziehung

$$V H = V' H' \text{ oder auch } \frac{H}{D} = \frac{H'}{D'}$$

da die Dichten D, D' dem Volumen verkehrt proportional sind. Druck und Expansivkraft sind der Dichte direkt, dem Volumen verkehrt proportional.

Dulong und Arago haben solche Versuche bis auf einen Druck von 27 Atmosph. angestellt. Die Röhre, von 21 Met. Länge zog sich an einem Balken durch einen Thurm empor; damit die Temperatur der Luft sich nicht ändere, war der kurze Schenkel von einer weitem Röhre umschlossen, durch welche beständig Wasser von gleicher Temperatur floss. Der Druck endlich wurde nicht durch Eingiessen von Quecksilber, sondern mittelst einer Druckpumpe hervorgebracht, welche auf einen Behälter von Quecksilber wirkte, der zwischen beiden Schenkeln sich befand und den Druck nach beiden Seiten mit gleicher Stärke mittheilte. Bis zu 27 Atmosphären bemerkte man mit trockner atmosphärischer Luft keine merklichen Abweichungen von dem obigen Gesetze, dem man hiernach wohl bis 40 und 50 Atmosphären Gültigkeit beimessen kann.

Auch nach Seite der Verdünnung wurde das Gesetz, vornehmlich von Gay-Lussac, geprüft. Wenn man eine oben geschlossene, bis auf eine kleine Luftmenge mit Quecksilber gefüllte Röhre A (Fig. 122) so weit in das Quecksilber eines tiefen Behälters B einsenkt, bis der Stand a innen und aussen gleich ist, so steht die innere Luft unter dem äussern oder Barometerdruck. Zieht man die Röhre mehr und mehr heraus, so vergrössert sich das Volumen bc der Luft, zugleich steigt das Quecksilber um $ab = h$, und diese Grösse, vom Barometerstand b subtrahirt, gibt den noch vorhandenen Druck des Gases. — So wurde das Gesetz bis auf eine 120fache Verdünnung geprüft und richtig gefunden.

155. Abweichungen. — Das Mariotti'sche Gesetz darf bei den permanenten Gasen: Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff, dann auch beim Stickstoff- und Kohloxydgas für alle praktischen Berechnungen als genau angesehen werden, obgleich auch bei diesen Gasen Régnault kleine Abweichungen nachgewiesen hat, von denen später die Rede sein wird.

Bedeutender sind aber, zufolge den Untersuchungen von Despretz und Pouillet, die Unterschiede bei denjenigen Gasen, welche durch Druck flüssig gemacht werden können, und zeigen sich immer in dem Sinne, dass für gleiche Expansivkraft, das Volumen kleiner,

die Dichte grösser erscheint, als bei der atmosphärischen Luft. So z. B. fand Pouillet

Druck in Atmosph.		1	5	10	20	40
Volumen.	Atm. Luft	1	0,2000	0,1000	0,0500	0,0250
	Kohlensäure	1	0,1978	0,0965	0,0459	0,0185
	Stickstoffoxydgas	1	0,1966	0,0956	0,0448	0,0183

Für solche Gasarten ist das Gesetz nur innerhalb kleinerer Druckänderungen genau. Ähnliches, in verstärktem Maasse, gilt von den Dämpfen, so dass das einfache Mariottische Gesetz mehr eine ideale Grenze des Verhaltens der Gase, als den wirklichen Zustand derselben darstellt. Indessen wollen wir vorläufig von allen diesen Abweichungen absehen.

156. Manometer, — sind Vorrichtungen, die zur Messung des Druckes in Behältern dienen. Die für praktische Zwecke üblichsten sind:

1) Bei sehr geringem Druck, wie z. B. unter der Luftpumpe, das verkürzte Barometer (Fig. 123), ein Heberbarometer, dessen geschlossener Schenkel nur 20 — 25 Centim. misst, daher das Quecksilber nur bei einem noch kleinern Druck sich oben ablöst. Der Unterschied $a b$ beider Säulen bezeichnet den vorhandenen Druck.

2) Für mittlern Druck, bei Gasometern zumal, wendet man das offene Manometer an, eine umgekehrte Heberöhre (Fig. 124), deren eines Ende sich nach dem Behälter, das andere nach der äussern Luft öffnet. Die manometrische Differenz $a b$, dem barometrischen Drucke zugezählt, gibt den Druck des Behälters.

3) Für grossen Druck endlich dient das Luftmanometer (Fig. 125). Man lässt den Druck direkt oder durch Zwischenkunft einer Röhre mit Wasser, auf das Quecksilber einer geschlossenen Eisenkapsel A wirken, die das Gefäss für eine mit trockner Luft gefüllte Röhre bildet und bestimmt denselben, mit Hülfe des mariottischen Gesetzes, aus dem Volumen $a b$ der comprimierten Luft, unter Addition der gehobenen Quecksilbersäule $b c$.

Für Ablesungen mittelst des Cathetometers, bei genauen Untersuchungen, hat Régnault andere Apparate in Anwendung gebracht:

4) Das Manobarometer (Fig. 126), wenn der Druck unter dem atmosphärischen bleibt. Zwei gleiche Röhren A und B tauchen in die beiden Zellen eines Gusseisengefässes C. Die erste A ist ein sorgfältig ausgekochtes Barometer (151), die andere B kann aber mittelst Hahn und Bleiröhre a mit dem Behälter, in dem man die Verdünnung hervorbringt, in Verbindung gesetzt werden. Wenn das Quecksilber im Gefässe über der Scheidewand steht, so bezeichnet die Differenz beider Stände $b c$ den gesuchten Druck. Der Barometerstand ergibt sich aus der Länge eines das Quecksilber berührenden Doppelstiftes $d e$ und der Entfernung $e c$. Ein Hahn f gestattet die Entleerung der Manometerzelle, ohne Nachtheil für das Barometer.

5) Das offene Manometer von Régnault besteht aus zwei Glasröhren A und B, die unten in ein mit Hahn versehenes Verbindungsrohr C eingekittet werden (Fig. 127). A wird, wie bei dem vorigen Instrumente mit dem Behälter in Verbindung gesetzt, in dem man die Verdichtung hervorbringt, B hingegen misst bei hinlänglicher Länge

den Druck durch eine Quecksilbersäule $b\ c$, welcher der Barometerdruck beizuzählen ist. Der untere Hahn c , dessen Einrichtung in D und E angegeben ist, gestattet die eine oder andere Röhre abzuschliessen oder zu entleeren, oder auch beide in Verbindung zu setzen.

157. Das Differenzialbarometer. — Kopp hat dieses auf das Mariotti'sche Gesetz gegründete Instrument vorgeschlagen, um in bequemern Dimensionen das Barometer zu ersetzen, wo es wenigstens auf keine grosse Genauigkeit ankommt. Eine offene mit Millim. Theilung versehene Röhre $a\ b$ (Eig. 128) ist luftdicht in den Glascylinder A eingesenkt und trägt, in $\frac{1}{n}$ (z. B. $\frac{1}{5}$) der Cylinderhöhe über dem Ende b eine Drahtspitze c . Treibt man nun mittelst des Kolbens B Quecksilber in den Cylinder bis zur Spitze c , so steigt dasselbe in der Röhre um $c\ d = h$, welche Grösse den Ueberschuss der innern verdichteten Luft über den atmosphärischen Druck b anzeigt. Da das innere Volumen von 1 auf $1 - \frac{1}{n}$ sich verändert hat, so folgt aus dem Mariotti'schen Gesetz

$$b = (b + h) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ oder } b = (n - 1) h$$

Durch Annäherung der Punkte b, c könnte man dem Instrumente kleine Dimensionen geben, da man aber vom Kleinen auf das Grosse schliesst, wächst in gleichem Verhältniss der Einfluss der Beobachtungsfehler (Ablesung, Einstellung, Capillarität). Für genaue Messungen kann das Kopp'sche Instrument das Barometer unmöglich ersetzen.

158. Das Gesetz von Gay-Lussac. — Die Wirkung der Wärme auf die Gase gehört zwar in den Abschnitt von der Wärme, hier indess muss soviel davon angeführt werden, als zum Verständniss des zweiten Hauptgesetzes der Gase erforderlich ist.

Man kann eine Gasmasse auf doppelte Weise erwärmen: 1) indem das Volumen abgeschlossen bleibt, die Zunahme der Expansivkraft aber von p auf p' gemessen wird; 2) indem man den Druck gleich erhält, das Volumen aber von V auf V' sich ausdehnen lässt, bis die Anfangs vergrösserte Expansivkraft p' wieder auf p herabsinkt. Man hat nach dem Mariottischen Gesetz

$$p' = p \frac{V}{V'}$$

Die Volumina nach dem zweiten Verfahren verhalten sich wie der Druck bei dem ersten.

Beide Wege sind von verschiedenen Physikern eingeschlagen worden. Den letztern wählte Gay-Lussac und erkannte die folgenden einfachen Gesetze: 1) Die Zunahme des Volumens ist der Zunahme der Temperatur proportional, 2) Diese Zunahme ist für verschiedene Gase nahe die gleiche, nämlich für 1° 0,00375 des Volumens bei 0° .

Bezeichnet also γ die Ausdehnung der Cubikeinheit für 1° , so wird ein Vol. V_0 bei 0° sich bei t° ändern zu

$$V = V_0(1 + \gamma t) \text{ mit dem spec. Gew. } S = S_0 \frac{1}{1 + \gamma t}$$

Gegen die Richtigkeit des von Gay-Lussac gefundenen Werthes von γ hat zuerst Rudberg Zweifel erhoben, welche durch die sehr genauen und zahlreichen Untersuchungen von Magnus und Régnault als begründet erkannt worden sind. Régnault wandte die verschiedensten Methoden an, in welchen bald die Volumen-, bald die Druckänderungen gemessen wurden und erhielt für ganz trockne atmosphärische Luft übereinstimmend:

$$\gamma = 0,003665$$

wenn man die Aenderungen der Expansivkraft ins Auge fasst; hingegen

$$\gamma = 0,003670$$

wenn man, wie Gay-Lussac, die Volumensänderungen misst.

Man kann also mit Babinet $\frac{11}{3000} = 0,003666$ annehmen, für 100°

also $\frac{11}{30}$. Auch hier jedoch beobachtet man kleine Unterschiede

1) zwischen den Werthen von γ bei verschiedenen Gasen, zumal bei denen, welche ihre Aggregatform leicht ändern, 2) bei dem gleichen Gas bei verschiedener Dichte oder unter verschiedenem Druck. Alle geprüften Gase, Wasserstoff ausgenommen, geben bei grösserer Dichte einen grösseren Coefficienten. — So wichtig diese Abweichungen von wissenschaftlicher Seite sind, können sie dennoch bei gewöhnlichen Rechnungen der Praxis, oder wenn die Temperaturänderungen klein sind, unberücksichtigt bleiben.

159. Folgerungen. — 1) Es habe eine Luftmasse beim Druck 760 Mm. und der Temp. 0, oder im Normalzustande ein Vol. V_0 und ein specifisches Gewicht S_0 , unter dem Druck b werden diese Grössen, gemäss dem Mariottischen Gesetze $V_0 \frac{760}{b}$ und $S_0 \frac{b}{760}$, und

ändert man auch noch die Temperatur, zufolge dem Gay-Lussac'schen

$$V = V_0 \frac{760}{b} \cdot (1 + \gamma t) \text{ und } S = S_0 \frac{b}{760} \cdot \frac{1}{1 + \gamma t} \quad (1)$$

Geht also eine nämliche Luftmasse vom Zustande b', t' in den b, t über, so erhält man

$$\frac{V}{V'} = \frac{b'}{b} \cdot \frac{(1 + \gamma t)}{(1 + \gamma t')} \text{ und } \frac{S}{S'} = \frac{b}{b'} \cdot \frac{(1 + \gamma t')}{(1 + \gamma t)} \quad (2)$$

2) Ein Volumen V , enthaltend das Gasgewicht P bei b' und t' , werde theilweise entleert (oder auch mehr angefüllt), man finde nun den Druck b und die Temperatur t , was für ein Gewicht p des Gases ist noch vorhanden?

$$\text{Man hat } p = V \cdot s, s = S \frac{b}{b'} \cdot \frac{1 + \gamma t'}{1 + \gamma t}, S = \frac{P}{V}, \text{ folglich}$$

$$p = P \cdot \frac{b}{b'} \cdot \frac{1 + \gamma t}{1 + \gamma t'} \quad (3)$$

3) Ein Volumen V mit Gas bei b und t habe das Gewicht P , wie gross ist sein specifisches Gewicht im Normalzustand?

Da hier $S = \frac{P}{V}$, so hat man nach (1)

$$S_0 = \frac{P}{V} \cdot \frac{760}{b} (1 + \gamma t) \quad (4)$$

Für zwei Gase S_0, S_0' , im gleichen Vol. V gewogen, findet man

$$\frac{S_0}{S_0'} = \frac{P}{P'} \cdot \frac{b'}{b} \cdot \frac{(1 + \gamma t)}{(1 + \gamma t')} \quad (5)$$

160. Das Gewicht der atmosphärischen Luft. — Gewöhnlich vergleicht man der Analogie wegen das specifische Gewicht der Gase mit demjenigen der atmosphärischen Luft, daher es vor allem nothwendig ist, das Letztere mit Bezug auf Wasser genau zu kennen. Man verfährt hierbei nach dem zweiten der beim specifischen Gewicht der Flüssigkeiten erläuterten Verfahren (III), indem man 3 Wägungen eines mit Hahn verschliessbaren Glasballons ausführt: 1) im ganz luftleeren Zustande, 2) mit trockener atmosphärischer Luft gefüllt, 3) mit reinem Wasser gefüllt. Die erste Wägung von den beiden andern abgezogen, gibt das Gewicht P und p der Luft und eines gleichen Volumens Wasser, woraus folgt

$$S = \frac{P}{p}$$

Da die Wägung der Luft bei dem Druck b und der Temperatur t ausgeführt wird, so muss sie auf den Normalzustand reduzirt werden, ebenso das Gewicht des Wassers auf die Temperatur 40° .

Sei Σ das aus Tabellen bekannte specifische Gewicht des Wassers bei der Temperatur, die es beim Versuche hat, das Vol. V des Ballons (in Cubikcentim. für Grammgewichte) wird $V = \frac{p}{\Sigma}$ sein. Unter den Um-

ständen der Luftwägung wird man haben $S = \frac{P}{V} = \frac{P}{p} \Sigma$ woraus durch

Einführung in den Ausdruck (159) für den Normalzustand folgt

$$S_0 = \Sigma \cdot \frac{P}{p} \cdot \frac{760}{b} \cdot (1 + \gamma t)$$

Eine Hauptschwierigkeit solcher Bestimmungen liegt in der von der Leichtigkeit der Luft geforderten Grösse des Ballons, wodurch das Wassergewicht sehr gross und die Anwendung einer sehr starken, daher weniger empfindlichen Wage nothwendig wird. Ausserdem bedarf es verschiedener Correktionen für die Ausdehnung des Ballons selbst, bei der Temperatur der Luft und des Wassers, für das verdrängte Luftgewicht, den Lufrückstand beim Entleeren u. s. f.

Man hat lange die von Biot und Arago (1806) ausgeführten Wägungen für die genauesten gehalten; sie gaben für Paris das Ge-

wicht von 1 Cubikdecim. atmosphärischer Luft im Normalzustande = 1,299541 Gramme.

Unter Anwendung des genauen Werthes von γ und mit den vollkommensten Hilfsmitteln fand Regnault

	Gramme.
1 Cubikdecim. atm. Luft in Paris im Normalzustande	1,293187
unter 45° N.B., am Ufer des Meeres	1,292770

Hiernach ist die atm. Luft im Normalzustand 773,533 Mal leichter als Wasser bei 4°, und 10517,0 Mal leichter als Quecksilber von 13,59603 spec. Gewicht.

Das Gewicht S von 1 Cub.Decim., für Paris, d. h. für die geographische Breite $0^\circ \varphi = 48^\circ 50' 14''$ und die Höhe $H = 60$ Met. über dem Meere gefunden, liefert S_{45} für 45° am Ufer des Meeres, durch Veränderung nach dem Verhältnisse, nach welchem g in g_{45} übergeht, da der Druck von 760 Mm. Quecksilber nach diesem Verhältnisse variirt. Man hat also nach (78) und (96)

$$S_{45} = S \frac{g_0 + \frac{1}{2} \varphi}{g_0 + \varphi \sin^2 \varphi} \cdot \left(\frac{R+H}{R} \right)^2 = S \frac{9,806055}{9,809398} \left(\frac{6366799}{6366735} \right)^2 = 0,9996780 S$$

woraus der obengegebene Werth hervorgeht.

161. Specifisches Gewicht der Gase. — Die Vergleichung der andern Gase mit Luft geschieht nach einem ganz ähnlichen Verfahren wie das vorbeschriebene, nur hat man es nicht mehr mit so ungleichen Belastungen zu thun. Drei Wägungen des luftleeren, des mit Gas und des mit atmosphärischer Luft gefüllten Ballons geben die zu vergleichenden Gewichte P , p des Gas- und des Luftinhaltes.

Hat man die erste Wägung bei b und t ausgeführt, die zweite bei b' und t' , so findet man (159)

$$S_0 = s_0 \frac{P}{p} \cdot \frac{b'}{b} \cdot \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t'}$$

wo s_0 das specifische Gewicht der atmosphärischen Luft bezeichnet. Der Ausdruck vereinfacht sich auf

$$S_0 = s_0 \frac{P}{p}$$

wenn man durch Auswahl eines günstigen Raumes von constanter Temperatur und durch die Regulirung des Druckes, unter welchem die Füllung des Ballons erfolgt, die Temperaturen t und t' und den Druck b und b' als unveränderlich betrachten darf.

Bei solchen Untersuchungen hat man dann auf Folgendes zu achten:

1) Ein hinlänglich grosses Ballon; zugleich aber hinlänglich stark, um den Luftdruck ohne Nachtheil zu tragen, Daneben eine hinlänglich starke, etwa 2 Kilom. tragende, dennoch aber empfindliche Wage.

2) Vollkommenes Austrocknen des Ballons im Innern, was nicht anders gelingt, als durch mehrfaches Ein- und Auspumpen von warmer, trockener Luft. Ebenso, vollkommene Trockenheit der zu wägenden Luftarten, indem dieselben von der Pumpe durch Glasröhren, welche mit Chlorcalcium oder mit von Schwefelsäure getränkten Bimssteinstücken angefüllt sind, in das Ballon gelangen.

3) Jedesmalige Berücksichtigung des beim Auspumpen noch blei-

benden Luft- oder Gasrückstandes. Man bestimmt das Gewicht desselben (159) aus dem zurückgebliebenen Druck und der Temperatur.

4) Berücksichtigung der verdrängten Luft, wenn die Versuche bei verschiedener Temperatur vorgenommen wurden. Regnault macht sich von dieser Korrektur unabhängig, indem er an den andern Arm der Wage ein eben so grosses und gleich schweres Ballon bleibend anhängt.

5) Die Ausdehnung des Ballons, im Falle beide Temperaturen verschieden sind.

Es erhellt hieraus, dass sehr genaue Bestimmungen mit vielen Schwierigkeiten verbunden sind. Als die genauesten werden diejenigen von Régnault betrachtet, welche für Paris und für 45° nach der Berechnung von Lasch ergeben.

	Dichte	1 Cubickdecim.	
		Paris Gramme.	45° Gramme.
Atm. Luft	1	1,293187	1,292770
Stickstoff	0,971360	1,256149	1,255745
Sauerstoff	1,105628	1,429940	1,429322
Wasserstoff	0,069268	0,089576	0,089546
Kohlensäure	1,529084	1,977390	1,976754
Wasser	773,533	1000	

Cap. 3. Anwendungen.

162. Abflussapparate. — Eine Menge Vorrichtungen zum Abfluss des Wassers benutzen den Druck der Atmosphäre oder die Expansivkraft der Luft. Dahin gehören die folgenden:

1) Der Heber (Fig. 129), eine zweiseitenkliche offene Röhre A, die, z. B. durch Saugen, mit Wasser gefüllt wird, und zur Entleerung eines Gefässes B, ohne Bewegung desselben, dient. Das Wasser fliesst so lange das äussere Ende b tiefer liegt, als der Wasserstand c im Behälter. — Der Luftdruck $P = Hs$ (wo H für Wasser gegen 10,33 Met. beträgt) wirkt von beiden Seiten auf die Oberfläche des Wassers und gegen das offene Ende, wird aber durch die gegenwirkenden Wassersäulen $a c = h' s$ und $a b = h s$, die vom obersten Punkte a nach dem Wasserstande und der Abflussöffnung reichen, vermindert. Von Innen nach Aussen bleibt ein Ueberschuss an Druck

$$(H - h') s - (H - h) s = (h - h') s$$

entsprechend dem Höhenunterschiede von Wasserstand und Oeffnung. Daher werden die Abflussgeschwindigkeit und Abflussmenge Einer Secunde, abgesehen von den Reibungen, sein (118)

$$U = \sqrt{2g(h - h')} \text{ und } Q = a \cdot U$$

wo a den Querschnitt der Röhre bezeichnet.

Damit das Wasser übergehe, darf der höchste Punkt a die zum Luftdruck P gehörende Flüssigkeitshöhe von 10 Meter nicht übersteigen.

Weite Heber füllt man von oben, unter Verschluss der Enden, und lässt das Ende, damit keine Luft eindringe, unter Wasser sich öffnen.

2) Der Heronsball (Fig. 130) besteht aus einem mit Luft und

Wasser gefüllten Gefässe A, in welches, luftdicht eingekittet, eine offene Röhre a b reicht. Vergrössert man die Expansivkraft, sei es durch Verdichtung der Luft, sei es durch Erwärmung um eine Grösse $p = h \cdot s$ über den anfänglichen Luftdruck $P = H \cdot s$ hinaus, so kann das Wasser theoretisch bis auf eine Höhe

$$h = \frac{p}{s}$$

über den Wasserspiegel c steigen.

Unterhält man die grössere Dichtigkeit der Luft, durch Zuführung neuer aus einem Behälter B (Fig. 131), aus dem sie durch einen Wasserdruck $d e = h$ verdrängt wird, so erhält man den Heronsbrunnen, dessen theoretische Springhöhe, ohne Rücksicht auf die Reibungen, gleich h ist.

3) Das Mariottische Gefäss. — So nennt man Gefässe, die ihrer Entleerung ungeachtet eine constante Abflussgeschwindigkeit bewahren. Die eine Art (Fig. 132) besteht aus einem grossen Wassergefässe A mit luftdicht eingekitteter offener Röhre a b. Beginnt der Abfluss durch die Oeffnung d, so verdünnt sich die obere Luft des Gefässes, der Luftdruck presst in der Röhre das Wasser bis herab und die Luft in Blasen hinein. So lange diess fort dauert, erhält sich der Abfluss gleich, trotz des Sinkens des Wasserstandes c. Denn die ganze Niveauschicht von b (100) erleidet den Luftdruck wie die Abflussöffnung von Aussen her und das Wasser fliesst also einzig vermöge des Wasserdruckes h der Säule b d.

Man kehrt die Anordnung wohl auch um (Fig. 133), lässt den Luftdruck auf die Wasserfläche eines Behälters B wirken und benutzt als Wasservorrath eine umgekehrte mit Wasser gefüllte Glocke A, in welcher die Luft durch Oeffnungen in b eindringt. Den Abfluss bewirkt wieder die drückende Säule $b d = h$.

163. Wasserpumpen. — Die gebräuchlichsten Mittel, Wasser aus der Tiefe zu heben und in die Höhe zu schaffen, sind die Pumpen, deren Spiel auf dem Wechsel einer saugenden und einer pressenden Wirkung beruht, jene vom atmosphärischen Drucke, diese von einer mechanischen Kraft veranlasst.

1) Die Saugpumpe besteht aus einem Cylinder oder Stiefel A (Fig. 134), in dem sich der Kolben auf und nieder bewegt, dem Saugrohr B, das zum Wasser C hinabreicht, und zwei Ventilen. Das Saugventil a, oben an der Saugröhre, öffnet sich, wenn der Kolben steigt und das vom äussern Luftdruck getriebene Wasser in den Cylinder tritt; das Druckventil b, in einer Oeffnung des Kolbens befindlich, wenn dieser herabbewegt wird und das Wasser aus dem untern in den obern Theil des Cylinders treibt, wo die Abflussröhre sich befindet.

Bezeichnet h' die Höhe b c von der Abflussöffnung zum Kolben, h diejenige b c vom Kolben zum untern Wasserstand, P endlich den Luftdruck, alle diese Grössen für die Flächeneinheit gerechnet, so erleidet der Kolben auf seiner Fläche A beim Heraufziehen, von oben her einen Druck $(P + h' s) A$, von unten her einen solchen $(P - h s) A$ und verlangt also eine Kraft

$p = (P + h' s) A - (P - h s) A = (h + h') s \cdot A$
gleich dem Gewichte der ganzen vom untern Wasserstande zur obern Oeffnung reichenden Wassersäule.

Bei jeder Bewegung wird eine Menge (Volumen) Wasser zum Abfluss gebracht, gleich dem Inhalte

$$Q = A \cdot L$$

des Stiefels, wenn L die Länge der Kolbenbahn ist. — Natürlich darf der Kolben, zumal wenn auf die Hindernisse noch Rücksicht genommen wird, die Höhe von 10,3 Meter über dem untern Wasserstande nicht erreichen.

2) Die Druckpumpe wirkt besonders vermöge der Kraft, die den Kolben herabdrückt. Der letztere nämlich ist massiv und treibt das Wasser durch eine eigene mit dem Druckventil versehene Oeffnung in die Steigröhre, deren Höhe an keine Grenze gebunden ist. Bezeichnet H die Höhe der obern Abflussöffnung über der untern Kolbenfläche, so ist offenbar eine herabdrückende Kraft erforderlich, grösser als

$$p = H \cdot A \cdot s$$

Die jedesmal von einer Kolbenbewegung gelieferte Wassermenge ist wieder

$$Q = A \cdot L$$

Oft werden die Druckpumpen doppelwirkend eingerichtet (Fig. 135), indem man den obern, für den wasserdichten Durchgang der Kolbenstange mit einer Stopfbüchse versehenen Theil A des Cylinders, gleich wie den untern Theil B, als besondere Pumpe benutzt. Jeder Theil hat seine besondere Saug- und Druckröhre a, b und c, d nebst zugehörenden Ventilen und beide treiben das Wasser abwechselnd in den Windkessel C, der die stossweise Wirkung in eine andauernde umzuwandeln bestimmt ist. Aus dem Windkessel nämlich, einem grossen Heronsball, wird das Wasser nicht von der direkten Wirkung des Kolbendruckes, sondern durch die langsame Entladung der Expansivkraft in das Steigrohr e weitergetrieben. Nach diesen Grundsätzen sind die Feuerspritzen konstruirt und es könnte daher die theoretische Steighöhe des Wassers, von der die wirkliche allerdings der vielen Reibungen wegen wohl um die Hälfte abweicht, aus der Compression der Luft im Windkessel mit Leichtigkeit gefolgert werden.

164. Die Luftpumpe. — Den Gedanken, die Luft durch ähnliche Mittel, wie die vorbeschriebenen aus einem Behälter wegzusaugen, oder umgekehrt in ihm zu verdichten, hat zuerst Otto von Guericke (1651) verwirklicht und noch jetzt sind die Luftpumpen der Hauptsache nach seinen Vorschlägen gemäss konstruirt.

Jede verdünnende Luftpumpe besteht: 1) aus einem Recipienten A (Fig. 136), gewöhnlich eine unten genau abgeschliffene Glasglocke, die auf den ebenen Teller B genau passt; 2) aus Einer oder zwei abwechselnd wirkenden Pumpen C, deren Kolben mittelst Kurbel und Zahnstangen geführt werden; 3) aus der vom Teller zu den Stiefeln gehenden Verbindungsrohre; endlich 4) aus den Theilen, welche beim Heben des Kolbens die Luft des Recipienten in den Stiefel gelangen lassen und beim Senken, den Rückweg schliessend, sie in die äussere Luft entfernen.

Seien V und v , der Kubikinhalt des Recipienten, mit Inbegriff der Verbindungsröhre, und des Stiefels. Da durch jede Hebung des Kolbens die Luft sich von V auf $V + v$ ausdehnt, so vermindert sich der anfängliche Druck, dem Mariottischen Gesetze (154) zufolge, auf

$$b_1 = b \frac{V}{V + v}$$

Nach demselben Verhältnisse vermindert sich b_1 auf b_2 durch die zweite b_2 auf b_3 durch dritte Kolbenbewegung und man erhält allgemein nach n Bewegungen

$$b_n = b \left(\frac{V}{V + v} \right)^n$$

als Gesetz, nach welchem die Verdünnung erfolgt. Sie ist, wie an dem auf der Verbindungsröhre angebrachten verkürzten Barometer erkannt wird, um so grösser, je grösser das Volumen des Stiefels v , je kleiner dasjenige des Recipienten V und je mehr Bewegungen n der Kolben gemacht hat. Wie man sieht, ist ein vollkommenes Vacuum, wie dasjenige des Barometers, mit der Luftpumpe nicht möglich; man betrachtet bereits eine Luftpumpe als gut wenn sie den Druck auf 1 Millim. oder auf $\frac{1}{760}$ des anfänglichen her-

abbringt und ihn zu halten vermag.

Die verschiedenen Arten von Luftpumpen unterscheiden sich durch die Art wie die Verbindungen des Stiefels, einerseits mit dem Recipienten, anderseits mit der Luft hergestellt und unterbrochen wird. In der Ventilluftpumpe ist gewöhnlich ein conisches Saugventil a am Boden des Stiefels, ein leichtes Druckventil b an der untern Fläche des durchbohrten Kolbens; in den Hahnluftpumpen ersetzt ein einziger Hahn, der von Hand oder mittelst eines Mechanismus gestellt wird und sich unten am Stiefel befindet, beide Ventile. Er hat zwei Bohrungen (Fig. 137), von welchen die eine α durchgeht und Stiefel und Recipienten verbindet, die andere β , nach Drehung um 90° , den Recipienten abschliesst und der Luft des Stiefels den Weg nach Aussen öffnet.

165. Grenze der Wirksamkeit. — Jede Luftpumpe wirkt nur bis auf einen bestimmten Grad der Verdünnung, was von drei Ursachen herrühren kann:

1) Von dem unvollkommenen Verschluss der Fugen, vornehmlich an den beweglichen Theilen, wie Glocke und Teller, Ventile und Hähne. Je grösser die Verdünnung, desto mehr Luft dringt auf diesem Wege ein, bis zuletzt so viel eindringt als jede Kolbenbewegung wegschafft, was man am Schwanken des Manometers erkennt. Genaue Arbeit der Maschine und Anwendungen fettiger Substanzen sind die einzigen Mittel gegen diesen Fehler.

2) Von dem Spiele des Saugventils. Mittelst der Cutbertson'schen Stange (Fig. 136) macht man dasselbe unabhängig von der Expansivkraft der Luft des Recipienten und abhängig von der Bewegung des Kolbens, was bei Hahnluftpumpen an sich schon der Fall ist.

3) Von dem schädlichen Raume, dem kleinen Raume nämlich,

der unten im Stiefel, bis zum Ventil oder Hahn übrigbleibt, wenn der Kolben seine tiefste Lage hat. Es kommt eine Grenze, wo die ganze verdünnte Luft des Stiefels v , zusammengepresst in den schädlichen Raum σ , mehr nicht als 1 Atmosphäre Druck gewinnt, daher weder das Druckventil öffnen, noch durch den offenen Hahn wegströmen kann. Bezeichnet b den atmosphärischen Druck, so wird die Grenze sein

$$\beta = \frac{\sigma}{v} \cdot b$$

Durch Anwendung des Grassmann'schen oder des noch gewöhnlicheren Babinet'schen Hahnes wird diese Grenze noch weiter getrieben. Wenn bei gewöhnlicher Benutzung die Maschine nicht mehr wirkt, so gestattet der Hahn, durch Umstellung, den schädlichen Raum des einen Stiefels, welcher letztere allein mit dem Recipienten in Verbindung tritt, statt in die äussere Luft, in den verdünnten Raum des andern zu entladen, die Stiefel, statt neben, nacheinander wirken zu lassen. Giebt der erste Stiefel die Verdünnung $\frac{\sigma}{v} \cdot b$, so wirkt der

zweite nach dem Verhältnisse $\frac{\sigma'}{v}$ und man hat theoretisch

$$\beta = \frac{\sigma \sigma'}{v^2} \cdot b$$

Der Babinet'sche Hahn lässt an den Pumpen von Delenil 4 Stellungen zu (Fig. 137), je nachdem die im verticalen Durchschnitt A bezeichneten Punkte 1, 2, F, R nach oben gedreht werden.

Stellung B. Gewöhnliche Benutzung; beide Stiefel in Verbindung mit dem Recipienten.

Stellung C. Babinet'sche Wirkung; zum Stiefel b , einerseits in Verbindung mit dem Recip., anderseits mit Stiefel a .

Stellung D. Recip. abgeschlossen; beide Stiefel mit der äussern Luft in Verbindung.

Stellung E. Stiefel und Recipienten in Verbindung, können mittelst des Stiftes α nach der äussern Luft geöffnet oder von ihr abgeschlossen werden.

166. Benutzung der Luftpumpe. — Sie dient zu Versuchen in grosser Zahl über den atmosphärischen Druck, die Expansivkraft und andere Erscheinungen, in denen die Luft eine Rolle spielt. Eine Aufzählung dieser so einfachen Versuche ist hier genügend.

1) Versuche über den atmosphärischen Druck:

Festhalten der Glocke am Teller; — Zersprengen einer Blase; — Steigen des Quecksilbers in einer Röhre, die oben unter die Glocke endet; — Magdeburgerhalbkugeln (Fig. 138)

2) Versuche über die Aenderungen der Expansivkraft:

Aufblähen einer Blase; — Barometer-Gefäss unter der Glocke; — Verkürztes Barometer; — Baroscop (Fig. 139), Leichterwerden der Körper in der Luft; — Aufhörender Abfluss des Hebers; — Springen des Heronsballes.

3) Versuche über den Luftwiderstand:

Fallröhre; — Flugrädchen (Fig. 140).

4) Versuche über Porosität und Absorption:

Quecksilberregen durch Holz; — Luftblasen aus Holz unter Wasser; — Absorbirte Luft aus Wasser; — aus Bier.

5) Versuche über den Sauerstoff der Luft:

Aufhören der Verbrennung; — Pulverentzündung; — Sterben der Thiere.

Für physicalische Untersuchungen wird die Luftpumpe mittelst Bleiröhren oder mittelst Gummielastium-Röhren, die innen durch eine widerstehende Drahtschraube aus einander gehalten werden, mit den zu entleerenden Recipienten in Verbindung gesetzt. Oft wendet man Nebenteller auf besonderm Fusse an, die für sich abzuschliessen sind. — Die Verbindung metallener Stücke geschieht in den Apparaten von Régnault besonders durch einen conischen Verschluss (Fig. 141 A) a und durch einen conischen Kragen b, welcher von einem hohlen Zaume c gefasst und gepresst wird. Ein conischer Verschluss (B) mit entgegengesetzten Gewinden der beiden Stücke, von einer doppelten Schraubemutter angezogen, gibt gleichfalls einen vorzüglichen Verschluss.

167. Die Compressionspumpe — wirkt entgegengesetzt von der verdünnenden Luftpumpe, indem sie äussere Luft oder das Gas eines Behälters beim Heben des Kolbens saugt und beim Senken in den Recipienten treibt. Statt Glocken, die nur schwer durch Zäume und Schrauben zu einem genauen Verschlusse zu bringen sind, wendet man zu Recipienten lieber ganze, starke Ballons A (Fig. 142) an, welche oben mittelst Hahn oder mittelst eines conischen Federventils (Windbüchsenventils) verschliessbar sind. Der Cylinder der Pumpe B, dem man zur Erleichterung der Arbeit einen kleinen Durchmesser gibt, wird entweder an den Recipienten angeschraubt oder durch eine Röhre mit ihm in Verbindung gesetzt. Er enthält einen massiven Kolben und steht ferner in Verbindung, sei es durch ein Saugventil mit dem Gasometer, sei es durch eine oben befindliche Oeffnung mit der äussern Luft.

Bezeichnet b den anfänglichen Druck des Recipienten und wird aus dem Gasometer Luft von gleicher Beschaffenheit und gleichem Drucke b geschöpft, so wird in den Recipienten V , nach n Bewegungen des Kolbens, eine Luftmenge $V + n v$ vom anfänglichen Druck b comprimirt worden sein. Aus dem Mariottischen Gesetze folgt

$$\frac{b_n}{b} = \frac{V + n v}{V} = 1 + n \frac{v}{V}$$

Auch hier wächst die Wirkung mit der Kleinheit des Recipienten, der Grösse des Stiefels und der Zahl Kolbenbewegungen. Der zur Bewegung des Kolbens erforderliche Druck wird, die Reibungen abgerechnet, sein

$$P = A \cdot b \cdot s$$

Wenn s das specifische Gewicht der barometrischen oder manometrischen Flüssigkeit ist.

168. Windbüchse und Feuegewehr. — In der Windbüchse dient die comprimirt Luft als Triebkraft der Kugel. Der aus starkem Eisenblech bestehende Kolben A (Fig. 143) bildet den Recipienten und ist

vom Druckventile a verschlossen. Nachdem derselbe mit Hülfe der Pumpe geladen worden, schraubt man an die Stelle der letztern, den die Kugel enthaltenden Lauf B an. Wirkt man nun auf den Drücker, so springt ein Stift b gegen das Ventil, öffnet dasselbe auf einen Augenblick und gestattet der Luft, die Kugel zu treiben.

Die Wirkung der Windbüchse kann, wie schon die starkgekrümmte Bahn der Kugel und die Unsicherheit des Schusses beweisen, derjenigen des Feueergewehrs nicht gleich kommen. Das bestätigt auch eine oberflächliche Rechnung. Die Kraft der Windbüchse, wird die Pumpe von Hand getrieben, kann 20—25 Atmosph. nicht wohl übersteigen. Im Feueergewehr wirkt gleichfalls comprimirt Luft, diejenige nämlich, welche aus der Verbrennung des Pulvers sich entwickelt und anfangs in dem kleinen Raume des letztern eingeschlossen ist. Das gewöhnliche Pulver, aus 13,3 Theilen Kohle, 74,9 Salpeter und 11,8 Schwefel bestehend, enthält, ohne Zuzug von Luft, alle zur Verbrennung nöthigen Bestandtheile und entwickelt aus 1 Vol., im Normalzustande gemessen, 222 Vol. Kohlensäure, 74 Vol. Stickstoff und eine veränderliche Menge Schwefel haltender Gase, jedenfalls also 296 Vol., die in dem ursprünglichen Volumen zusammengedrängt, 296 Atmosph. darstellen. Bringt man noch die wohl 10000⁰ betragende Hitze in Anschlag, so stiege der Druck auf 1380 Atm. So bedeutend ist allerdings die Kraft lange nicht, weil 1) die Verbrennung nicht momentan, sondern successiv erfolgt, so dass die spätern Gastheile ein viel grösseres Volumen zur Ausbreitung finden, weil 2) die Kugel mit grosser Geschwindigkeit weicht und ein Theil der Kraft auf das Nachströmen des Gases verwendet wird, endlich weil 3) die Reibung der Kugel, der Widerstand der äussern Luft und das Entweichen von Gas durch die Zündöffnung und neben der Kugel einen bedeutenden Kraftverlust zur Folge haben. Nichtsdestoweniger bleibt eine weit grössere Kraft als in der Windbüchse übrig.

Bei der Berechnung der Geschwindigkeit der Kugeln hält man sich mehr an empirische als an theoretische Formeln, da geringfügige Umstände, wie die Feuchtigkeit, das Korn, das Einstampfen, auf die Verbrennung des Pulvers und damit auf die Bewegung der Kugel einwirken. Immerhin ist für jedes Gewehr eine gewisse Ladung die vortheilhafteste, diejenige, deren Verbrennung eben vollendet ist, wenn die Kugel den Lauf verlässt. Eine zu langsame Verbrennung hat ein Herauswerfen unverbrannten Pulvers zur Folge, eine plötzliche Explosion wirkt mehr erschütternd als treibend und setzt das Gewehr in Gefahr. In mehrfacher Hinsicht vortheilhaft ist ein genaues Anschliessen der Kugel, wie man es bei Büchsen herstellt (69); nicht nur hindert man einen bedeutenden Gasverlust, sondern verschafft zugleich der Kugel eine regelmässiger Bewegung und da sie langsamer ihre Geschwindigkeit gewinnt, eine längere und stärkere Einwirkung des Gases.

169. Gebläse. — Die meisten Gebläse sind gleichfalls Pumpen, welche einerseits Luft saugen, sie anderseits in die Windkammer, dem Stellvertreter des Windkessels (163), treiben und vermöge der erhöhten Expansivkraft mit constanter Geschwindigkeit ausströmen lassen. Die gewöhnlichsten Gebläse sind die folgenden:

1) Der Blasebalg (Fig. 144) besteht aus zwei mit Holzboden und Lederwänden versehenen Kammern A und B. Erweitert man A, so wird durch das Saugventil a, ein einfacher beiderseits befestigter Lederstreifen, Luft aufgenommen. Verkleinert man A, so wird diese Luft durch das Druckventil b in die Windkammer B getrieben, von wo sie durch die Röhre c ausströmt.

2) Das Cylindergebläse ist nach dem Grundsatz der doppelwirkenden Druckpumpe (163) construiert, nur leichter und in grossen Dimensionen. Jeder Cylinderraum hat seine beiden Ventile, das eine von Aussen Luft schöpfend, das andere sie nach der Windkammer ableitend. Auch die Röhre der Zu- und Ableitung erhalten entsprechende Dimensionen. Da es sich nur um einen geringen Druck in der Windkammer handelt, einige Centim. Wasser, so bedarf es der Grösse unerachtet keiner sehr bedeutenden Kraft, die Pumpe zu treiben.

3) Im Wasserkastengebläse bewegt sich ein oben geschlossener unten offener Cylinder oder Kasten A (Fig. 145) auf und nieder und taucht in einer Wasserkufe B, in welche über den Wasserstand hinaus eine Saug- und Druckröhre a und b, jede mit ihrem Ventile versehen, führen. Der Cylinder dient hier als Kolben und das Wasser als Liederung.

Cap. 4. Die Atmosphäre.

170. Struktur der Atmosphäre. — Die Lufthülle der Erde strebt in ähnlicher Weise wie eine flüssige Masse nach einem Zustande des Gleichgewichtes, unter dem Einflusse der Schwere und der Fliehkraft, zu welchen die Expansivkraft hinzukommt. Der auf das Barometer wirkende Druck an irgend einer Stelle rührt von dem Gewichte der ganzen Luftsäule her, die über dieser Stelle ruht und nimmt von der Erde nach oben hin um das Gewicht der Luftschichten ab, die man unter sich lässt.

Sei s das Gewicht der Cubikeinheit Luft an irgend einer Stelle, wenn der Druck, absolut gemessen, p ist. Soll der Druck von da an um δp abnehmen, so muss man um

$$\delta h = - \frac{\delta p}{s}$$

in die Höhe gehen, also um so mehr, je kleiner das specifische Gewicht oder der Druck ist. An der Erde, für den Normalzustand der Luft, entspricht einem Sinken des Barometers von 1 Mm. Quecksilber, da 1 Cub. Millim. Luft 10517mal leichter als ein gleiches Vol. Quecksilber ist (160), eine Erhebung von eben so vielen Millim. oder 10,517 Meter.

Nun bezeichne s_0 das specifische Gewicht der Luft bei 45° der Breite, unter dem absoluten Drucke p_0 des Normalzustandes, wenn g_0 die Stärke der Schwere ist. Für den Druck p und die Temperatur t hätte man an gleichem Orte das specifische Gewicht (159)

$$s_0 \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \gamma t}$$

Wenn aber die Schwere von g_0 auf g ändert, so wird das specifische Gewicht entsprechend sein

$$s = s_0 \frac{g}{g_0} \cdot \frac{p}{p_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha t}$$

folglich
$$\delta h = - \frac{1}{s_0} \cdot \frac{g_0}{g} \cdot \frac{p_0}{p} (1 + \gamma t) \delta p.$$

Betrachtet man δh als die Dicke einer, zwischen zwei Niveauflächen von constantem Druck p und $p - \delta p$ liegenden Niveauschicht (100), so sieht man, dass die Dicke der Niveauschichten nach dem Pole kleiner wird, als am Aequator, weil 1) die Schwere g grösser (78), 2) die Temperatur t kleiner wird. Nach der Höhe gleichen sich Schwere und Temperatur mehr aus und die Niveauschichten werden gleichartiger. — Es scheint übrigens ein eigentliches Gleichgewicht, auch abgesehen von der veränderlichen Sonnenwärme, in der Atmosphäre überhaupt nicht möglich, indem unter Berücksichtigung der Wärmeunterschiede der verschiedenen Zonen, keine Niveauflächen sich bestimmen lassen, zu denen die Resultirende der Kräfte senkrecht ständen (100). In Folge dessen befindet sich der untere Theil der Lufthülle, in welchem die Abweichungen grösser sind, in einer kreisenden Bewegung, welche die Luftmassen der heissen und kalten Gegenden beständig austauscht.

171. Grenze und Gestalt der Atmosphäre. — Die Fragen über die Höhe, die Gestalt, den Grenzzustand der Atmosphäre sind jeder unmittelbaren Prüfung entzogen und können daher nur unter gewissen Voraussetzungen beantwortet werden. Wäre die Luftsäule in ihrer ganzen Höhe gleich dicht, im Normalzustande z. B., so wäre ihre Höhe die 10517fachen der Barometersäule oder nur 7994,9 Met. Berücksichtigt man hingegen die Abnahme der Dichte mit dem Druck, bei constant angenommener Temperatur, so erscheint die Atmosphäre als unbegrenzt; doch schon in einer Höhe von 50000 Met. wäre die Dichte auf $\frac{1}{500}$, derjenigen einer guten Luftpumpe herabgesunken.

Dass indess nicht bloss eine relative, sondern eine absolute Grenze der Atmosphäre bestehen müsse, folgert Laplace aus dem Dasein der Fliehkraft, welche unter dem Aequator in einer Entfernung von 6,6 Erdradien die Schwere aufhebt, daher die Lufttheile von der Erde entfernt.

Die wirkliche Grenze scheint aber bedeutend näher zu liegen, indem es wahrscheinlich ist, dass die Zunahme der Kälte und Abnahme der Dichte auf einen Zustand führen, wo die Expansivkraft erlöscht, oder der Schwere der Lufttheilchen gleich wird. J. C. Schmidt, von den freilich sehr hypothetischen Voraussetzungen ausgehend, dass die Gesetze von Mariotte und Gay-Lussac bis zu jenem Grenzzustande gültig seien und die Temperatur von der Erde aus immer gleich abnehme, findet 58021 Met. für die Höhe unter dem Aequator, 43804 für diejenige des Poles oder gegen $\frac{1}{110}$ und $\frac{1}{145}$ der entsprechenden Erdradien. Das Luftsphäroid wäre bedeutend flacher, als das feste Erdsphäroid und hätte eine Abplattung von $\frac{1}{157}$ statt $\frac{1}{299}$.

1) Bezeichnen r' , f' , g' Radius, Fliehkraft und Schwere für den Aequator am Meere, so werden beide Kräfte in der Entfernung r vom Centrum

$$f = f' \frac{r}{r'}, \text{ und } g = g' \frac{r'^2}{r^2}$$

Ihre Gleichheit gibt, da $g' = 288,4 f'$ (84)

$$\frac{r}{r'} = \left(\frac{g'}{f'} \right)^{\frac{1}{3}} = 6,607$$

2) Die Expansivkraft b (als Quecksilbersäule) berechnet sich aus dem specifischen Gewichte s und demjenigen des Normalzustandes aus

$$b = 760 \cdot \frac{s}{s_0} (1 + \gamma t)$$

b wird $= 0$, wenn $t = -\frac{1}{\gamma} = -273^\circ \text{ C}$, da (158) $\gamma = 0,00367$

Muss man um Δh Met steigen, damit das Thermometer um 1° sinke und ist die Temperatur an der Erde t , so würde sich die Grenze finden, wenn das Thermometer um $t + 273^\circ$ gesunken ist, also in der Höhe

$$h = (t + 273) \Delta h$$

Nun setzt Schmidt

am Aequator	$t = +25^\circ$	$\Delta h = 194,9^m$	also	$h = 58021 \text{ Met.}$
am Pol	$= -0,8$	$161,4$	»	43884 »

172. Die Schwankungen des Barometers. — Wie die beständigen Schwankungen des Barometers darthun, ist der Luftdruck mannigfachen Aenderungen unterworfen, welche mit Bewegungen der Atmosphäre zusammenhängen. Für jeden Ort indess lässt sich ein mittlerer Luftdruck bestimmen, um welchen die sämtlichen Abweichungen nach der einen und andern Seite sich aufheben. Stellt man die Barometerhöhen b als Ordinaten dar, die Zeiten t als Abscissen, so ist der mittlere Stand während einer gewissen Zeit T , derjenige b' , der mit der Abscissenlänge eine gleiche Fläche bildet, wie alle einzelnen Flächenelemente $b \delta t$ zusammen. Also ist

$$b' = \frac{S(b \delta t)}{T}$$

Die Schwankungen selbst sind theils periodische, von dem täglichen oder jährlichen Lauf der Sonne mittelbar abhängig, theils unregelmässige, die, scheinbar an keine Zeit gebunden, von weiterliegenden Ursachen herbeigeführt werden. Im mittlern Europa besteht die tägliche Schwankung im allgemeinen in einem zweimaligen Steigen von 4 bis 10 ungefähr und einem zweimaligen Sinken von 10 bis 4, wobei die Oscillation des Tages viel grösser als die des Nachts, überdiess im Sommer grösser und ausgedehnter als im Winter erscheint. Es hängt diese Schwankung von den aufsteigenden und niedersteigenden Bewegungen her, welche die Sonne durch ihre erwärmende und ausdehnende Wirkung in der untern Luftmasse hervorruft. Eine andere, weniger constante Schwankung, zeigt sich in den monatlichen Mitteln während des Jahres und hat ihren Grund in den in jeder Gegend vorherrschenden Winden der einzelnen Jahreszeiten.

Während die periodischen Schwankungen höchstens einzelne Millim. umfassen, zeigen sich unregelmässige Schwankungen von 30 Millim. Umfang, die offenbar mit den Winden in Verbindung stehen. Nördliche

und nordöstliche Winde bringen trockne, kalte, daher schwere Luft, die südlichen umgekehrt warme, feuchte, leichtere. Die ersten machen daher das Barometer steigen, die zweiten dasselbe sinken. Da der eine Wind in der Regel zugleich schöne, der andere schlechte Witterung bringt, so kann das Barometer oftmals als Wetterglas dienen; doch werden die Anzeigen zur Zeit veränderlicher Witterung, wenn verschiedene Winde übereinander wehen und sich bekämpfen, weniger sicher. — Eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes gehört aber in die Meteorologie.

173. Barometrische Höhenmessung. — Da der Stand des Barometers mit der Erhebung über dem Boden gesetzmässig abnimmt, so wird es möglich, den Höhenunterschied zweier Orte, nach dem Unterschiede der Quecksilbersäulen zu beurtheilen.

1) Sei in der Höhe h der Druck $p = b S$, wo b in Met. den Barometerstand und S das specifische Gewicht des Quecksilbers bezeichnet. Eine Schicht δh entspricht eine Druckabnahme

$$-\delta p = s \cdot \delta h$$

wo s das specifische Gewicht der Luft bei der Temperatur t und dem Druck b ist (159)

$$s = s_0 \frac{b}{0,76} \cdot \frac{1}{1 + \gamma t}$$

daraus denn

$$\delta h = -0,76 (1 + \gamma t) \frac{S}{s_0} \cdot \frac{\delta b}{b}$$

und wenn man, die Temperatur constant angenommen, nach Formel III die Summe vom untern Stande b , entsprechend $h = 0$, zum obern b' entsprechend $h = H$ nimmt.

$$H = m \cdot 0,76 \cdot \frac{S}{s_0} (1 + \gamma t) \lg \frac{b}{b'} = 18404,9 (1 + \gamma t) \lg \frac{b}{b'}$$

nachdem man den Modul, der gemeinen Logarithmen $m = 2,302585$, ferner $S = 10517,0 \cdot s_0$ (160) eingeführt hat.

2) Eigentlich ändert t mit der Höhe; da man jedoch das Gesetz nicht kennt, begnügt man sich für t die Mitteltemperatur $\frac{1}{2} (t + t')$ der beiden Stationen anzunehmen. γ ist 0,003665.

Die Barometersäulen b, b' , sind auf 0 zu reduzieren (153) oder dafür zu setzen $b (1 - \beta T)$, $b' (1 - \beta T')$, wo β der Unterschied der Quecksilber- und Skalenausdehnung ist, für Messingskale 0,00016151 und T, T' die Quecksilbertemperaturen oben und unten. Genähert hat man dann

$$\lg \frac{b (1 - \beta T)}{b' (1 - \beta T')} = \lg \frac{b}{b'} + \frac{\beta}{m} (T' - T).$$

wo $\frac{\beta}{m} = 0,00007014$

Will man auch die Aenderungen der Schwere mit der geographischen Breite φ und der Höhe H berücksichtigen, so hätte man (96) für s_0 zu setzen

$$s_0 (1 - 0,002552 \cos 2 \varphi) (1 - 0,00000314 H)$$

Daher vollständig

$$H = 18404,9 (1 + 0,003665 \frac{t + t'}{2}) [\lg \frac{b}{b'} + 0,00007014 (T' - T)] (1 + 0,002552 \cos 2 \varphi) \times (1 + 0,00000314 H)$$

3) Für die Benutzung hat man die Formel vereinfacht, die Berechnungen durch Tafeln erleichtert und, da die Temperaturabnahme und, wegen der Feuchtigkeit, das specifische Gewicht der Luft einiger Unsicherheit unterliegen, auch die Zahlcoefficienten durch Vergleichung mit der Beobachtung etwas verändert.

Die Oltmann'sche Formel zur Rechnung ohne Logarithmen für Meter und Grade Celsius, ist als erste Annäherung

$$H' = 18336 \left[\lg \frac{b}{b'} + \lg \left(1 - \frac{T - T'}{5550} \right) \right] \left(1 + 2 \frac{t + t'}{1000} \right)$$

als zweite

$$H = H' (1 + 0,002837 \cos 2 \varphi) \left[1 + \frac{\lg \frac{b}{b'} + \lg \left(1 - \frac{T - T'}{5580} \right)}{326,6320} \right]$$

Eine erste Tafel gibt aus den Barometerständen b, b' in Millim., die zu subtrahirenden Grössen $18336 \cdot \lg b = a$, und $18336 \cdot \lg b' = a'$.

Eine zweite Tafel aus der Differenz $T - T'$ die negative Correktion $18336 \lg \left(1 - \frac{T - T'}{5550} \right) = -c$ die mit $T - T'$ Zeichen ändert

Zu der so erhaltenen Grösse $a - a' - c$ addirt man ihr Produkt mit $\frac{2}{1000}$ von $t + t'$ und erhält so H'

Eine dritte Tafel gibt aus H' und φ die Breiten correction d .

Eine vierte endlich aus H' diejenige e für Schwerenabnahme mit der Höhe. Dann ist

$$H = H' + d + e$$

4) Die Gaussische Formel zur Rechnung mit Logarithmen, für Meter und Reaumur'sche Grade liefert genähert

$$\lg H' = \lg \left[\lg b - \frac{T}{1000} - \lg b' - \frac{T'}{1000} \right] + 1,66234 + \lg (400 + t + t') + 0,0000025 (t + t')$$

und als genauen Werth

$$\lg H = \lg H' + 0,00124 \cos 2 \varphi + 0,000000222 H'$$

Die Rechnung wird mit 5 Decimalen geführt.

Das erste Glied von $\lg H'$ berechnet man unmittelbar, indem man von jedem $\lg b, \frac{T}{1000}$ von den letzten Decimalen abzieht. Die 3 folgenden Glieder mit Hülfe einer ersten Tafel, deren Argument $t + t'$, Summe der Lufttemperatur, ist.

Das von der Breite abhängige Glied in $\lg H$ wird von einer zweiten Tafel in Einheiten der fünften Decimalstelle gegeben.

Endlich das von H' abhängige von einer dritten Tafel aus dem Argument $\lg H'$.

174. Das Luftballon. — Das einzige Mittel, die freie Luft grösserer Höhen zu erreichen, ist das von Montgolfier (1783) zuerst im Grossen angewandte Luftballon (Aerostat). Gemäss den Gesetzen des Schwimmens (104) muss ein Körper, um zu steigen, leichter sein als die Luft, die er verdrängt. Mit festen Körpern ist diess nur möglich, wenn man sie zu einer weiten Hülle gestaltet, deren innerer Raum mit einer leichtern Gasart als die äussere Luft angefüllt wird. Montgolfier wandte hierfür erwärmte Luft, Charles den viel leichtern Wasserstoff an.

Bezeichnet V das Volumen des Ballons in Cub.Met., s' das specifische Gewicht der innern, s der äussern Luft, P endlich das Gewicht aller festen Theile, Ballon und angehängte Körper, so muss

$$P + V \cdot s' < V s \text{ oder } P < V(s - s')$$

Die Montgolfieren sind unten offen, mit einer Gluthpfanne versehen, die Temperatur der Luft mag auf 100^0 , die Ausdehnung daher auf $\frac{1}{3}$ steigen. Man hätte $s' = \frac{3}{4} s$. — Bei den Charlieren

(Fig. 146) kann für den unreinen Wasserstoff gesetzt werden $s' = \frac{1}{7}s$.

Da nur 1 Cub.M. Luft 1,3 kil. wägt (160) so erhält man für das Vol., das zum Schweben auf 1 kil. zu rechnen ist, und umgekehrt für die Tragkraft von 1 Cub.Met.

	Auf 1 Cub.Met.	Anf 1 kil.
Montgolfieren	0,325 kil.	3,077 Cub.Met.
Charlieren	1,114	0,897.

In höhere Luftschichten gelangend strebt das Ballon sich auszu dehnen, wesshalb es von Anfang nur theilweise gefüllt werden darf. Wegen des Einflusses von P gelangt es zuletzt in eine Luftschicht, wo es schweben bleibt. Die Bewegung nach oben und unten hat der Luftschiffer ziemlich in seiner Gewalt, indem er entweder mitgenommenen Ballast (z. B. Sand) auswirft oder Wasserstoff mittelst eines Ventils ausströmen lässt. Was aber bisher alle Erwartungen hinsichtlich einer nützlichen Verwendung der Ballons vereitelte, ist die Unmöglichkeit, den Lauf derselben von dem Spiele des Windes unabhängig zu machen. Die Anwendung von grossen Rudern und Segeln blieb, neben der Grösse des Ballons selbst, bisher stets unbefriedigend. So erklärt sich, dass mit Ausnahme der für wissenschaftliche Zwecke sehr wichtig gewordenen Luftreisen von Gay-Lussac und Biot (1804) die meisten übrigen Luftfahrten Sache der Schaulust geblieben sind.

Erste Luftfahrt von Pilâtre de Rozier 1783, — verunglückte 1784 auf der Ueberfahrt über den Canal, welche Ein Jahr später von Blanchard und Jefferies wirklich ausgeführt wurde. — Robert durchflog 50 Stunden in 2 St. 42 Min. — Gefahren Crosbie's auf der Fahrt von Dublin nach England, des Grafen Zambuccari auf dem Adriatischen Meere. — Neuere Fahrten von Reichard und Gray.

2. Bewegungserscheinungen.

Cap. 5. Der Abfluss der Gase.

175. Allgemeine Bemerkungen. — Die Bewegungserscheinungen der Gase folgen ähnlichen Gesetzen wie diejenigen der Flüssigkeiten, mit der neuen Verwicklung jedoch, dass Volumen und Dichte der Theilchen während der Bewegung sich ändern können. Eine genaue Rechnung, nach den richtigen Grundsätzen, welche Dan. Bernoulli zuerst aufgestellt hat, lässt sich noch seltener durchführen und meist nur unter vereinfachenden Annahmen, deren Unzulänglichkeit für die Praxis mit Hülfe von Erfahrungscoefficienten unschädlich gemacht wird. Auch hier haben besonders die Fälle Wichtigkeit, wo die Bewegung eine beharrende geworden ist, d. h. wo alle Theilchen, welche nacheinander durch eine Stelle gehen, auch später vollkommen die nämlichen Bewegungszustände durchlaufen. Wie dort Flüssigkeitsfaden lassen sich hier bleibende Luft- oder Gasfaden unterscheiden.

Das allgemeine Gesetz (116), dass bei beständig gewordener Bewegung durch jeden Querschnitt des Gefässes in gleicher Zeit, eine gleiche Flüssigkeitsmenge fliessen muss, hat auch für Gase Gültigkeit, da eine Anhäufung oder Entleerung der zwi-

schen beiden Querschnitten befindlichen Menge, nothwendig Aenderungen der Dichte, des Druckes und der Bewegung zur Folge hätte. Doch muss hier das Gesetz, nicht auf das Volumen, sondern auf die Masse oder das Gewicht des Gases angewandt werden. Man erhält also

$$U \cdot S \cdot A = u \cdot s \cdot a \text{ oder } U \cdot P \cdot A = u \cdot p \cdot a \quad (1)$$

da specifisches Gewicht und Druck einander proportional sind.

In zwei Querschnitten A, a , verhalten sich die mittlern Geschwindigkeiten U, u , wie die Produkte aus Querschnitt und specifischem Gewicht oder Druck.

176. Bewegung eines Luftfadens. — Die Bewegung eines Luftfadens, bei beständig gleichem Abfluss kann auf gleiche Weise bestimmt werden, wie es bei einem Wasserfaden geschehen (117). Sind ähnlicher Weise wie dort, ω, p, u, d Querschnitt, Druck, Geschwindigkeit und Dichte an einer Stelle c (Fig. 147) und vernachlässigt man den Einfluss der Schwere g , so erhält man die Bedingung

$$d u \delta u = - \delta p$$

Hier aber ist d eine veränderliche Grösse, abhängig vom Drucke p und der Temperatur t , nämlich (159)

$$d = d_0 \frac{p}{p_0} \frac{1}{1 + \gamma t} = k p$$

wo k der Abkürzung willen für den Faktor von p gesetzt ist.

Die Gleichung wird dann

$$k u \delta u = - \frac{\delta p}{p} \quad (1)$$

und ausgedehnt auf ein Stück des Fadens von p', u' bis p, u zufolge Formel II und III

$$\frac{k}{2} (u^2 - u'^2) = m \lg \frac{p'}{p} \quad (2)$$

$m = 2,3025851$ bezeichnet den Modul der gemeinen Logarithmen.

Die letzte Gleichung drückt die Beziehung aus zwischen dem Drucke und der Geschwindigkeit an zwei Stellen eines nämlichen Luftfadens, bei beharrender Bewegung.

177. Abfluss aus kleiner Oeffnung. — Der vorige Ausdruck (2) lässt sich unmittelbar auf das Ausströmen des Gases durch eine kleine Oeffnung aus einem weiten Behälter anwenden, der Fall, der am häufigsten vorkommt. U' bezeichne die sehr geringe Geschwindigkeit im Behälter, dessen Querschnitt A und dessen Druck $P = B S$ sei, gemessen durch die Höhe B der manometrischen Flüssigkeit, deren specifisches Gewicht S ist. Es bezeichne ferner a den Querschnitt der Oeffnung, U die Geschwindigkeit, $b S$ den Druck in denselben. Bei beständigem Abfluss kann man setzen (175)

$$U' = U \frac{a b}{A B}$$

Die Gleichung (2) (176) wird dann

$$\frac{k}{2} \left(1 - \frac{a^2 b^2}{A^2 B^2}\right) U^2 = m \lg \left(\frac{B}{b}\right)$$

woraus folgt

$$U = \sqrt{\left\{ 2 \frac{m}{k} \frac{1}{1 - \frac{A^2 B^2}{a^2 b^2}} \lg \frac{B}{b} \right\}} \quad (1)$$

Für eine sehr kleine Oeffnung, wenn a gegen A vernachlässigt wird, erhält man, nach Einführung von k

$$U = \sqrt{\left\{ 2 \frac{m}{k} \cdot \lg \frac{B}{b} \right\}} = \sqrt{\left\{ 2 g m b_0 \frac{S}{s_0} (1 + \gamma t) \lg \left(\frac{B}{b} \right) \right\}} \quad (2)$$

Das in 1 Sec. abfliessende Gasvolumen, unter dem Drucke b der Oeffnung gemessen, wird sein $a \cdot U$, unter dem Drucke B des Behälters gemessen

$$V = a \cdot U \frac{b}{B} \quad (3)$$

Das entsprechende Gasgewicht endlich folgt durch Multiplication mit dem specifischen Gewichte

$$s_0 \frac{b}{b_0} \cdot \frac{1}{1 + \gamma t}$$

der Luft in der Oeffnung, und ist

$$Q = a \cdot U \cdot s_0 \frac{b}{b_0} \frac{1}{1 + \gamma t} = a b \sqrt{\left\{ 2 g m \frac{s_0 S}{b_0} \lg \left(\frac{B}{b} \right) \frac{1}{1 + \gamma t} \right\}} \quad (4)$$

Aus (2) und (4) ergibt sich:

1) dass die Geschwindigkeiten U , U' für zwei Gase, die unter gleichem Druck ausfliessen, sich verkehrt, die Gasgewichte Q , Q' aber sich direkt wie die Wurzeln aus dem specifischen Gewichte oder der Dichtigkeit verhalten.

$$U : U' = Q' : Q = \sqrt{s_0'} : \sqrt{s_0} \quad (5)$$

2) dass durch Erwärmung des geschlossenen Behälters, wegen Vermehrung der Expansivkraft, die Geschwindigkeit sich direkt, das ausströmende Gewicht verkehrt wie $\sqrt{1 + \gamma t}$ verhält:

$$U : U' = Q' : Q = \sqrt{1 + \gamma t} : \sqrt{1 + \gamma t'} \quad (6)$$

178. Benutzung der Formeln. — Berechnet man in den Ausdrücken (2) und (4) der vorigen Nummer den numerischen Faktor für atmosphärische Luft, unter Annahme des Meters und Kilogramms, aus den Werthen $g = 9,806$ Met., $m = 2,3026$, $b_0 = 0,76$ Met., $s_0 = 1,2927$ Kil.; S für Quecksilber $= 13596$ Kil., so erhält man

$$U = 600,805 \sqrt{\left\{ \lg \left(\frac{B}{b} \right) (1 + \gamma t) \right\}}$$

und

$$Q = 1021,92 a \cdot b' \sqrt{\left\{ \lg \left(\frac{B}{b} \right) (1 + \gamma t) \right\}} \quad (1)$$

Ungeachtet des sehr grossen Coefficienten wird Q nicht gross, weil a , in Quadratmetern ausgedrückt, natürlich sehr klein ist.

Die Benutzung dieser Formeln setzt die Kenntniss des Druckes b in der Oeffnung voraus. Mit Navier nimmt man für b gewöhnlich

den äussern Druck, obgleich es nach Holzmänn's Bemerkung naturgemässer wäre, den mittlern Druck $\frac{B + b'}{2}$, zwischen dem innern B und äussern b' anzunehmen. Bezeichnet nun $\beta = B - b$ den an einem offenen Manometer (156) gemessenen innern Ueberdruck, der meist nur klein ist, setzt dann genähert

$$\lg\left(\frac{B}{b}\right) = \lg\left(1 + \frac{\beta}{b}\right) = \frac{1}{m} \frac{\beta}{b}$$

so werden die Formeln einfacher, für Meter berechnet

$$U = 395,93 \sqrt{\frac{\beta}{b} (1 + \gamma t)} \quad (2)$$

$$Q = 673,45 a b \sqrt{\frac{\beta}{b} (1 + \gamma t)}$$

Ausser der atmosphärischen Luft sind die folgenden Luftarten die einzigen, auf welche in der Praxis solche Rechnungen eine Anwendung finden.

	$s_0 : s_0'$	Coeff. v. U	Coeff. v. Q
Wasserdampf	0,622	502,02	531,13
Leuchtgas	0,4—0,6	626,02—511,14	425,93—521,65
Halbverbrannte Luft	1,09	380,10	703,10

179. Beobachtungen. — Die Versuche über den Abfluss wurden mit Gasometern angestellt, in denen entweder eine eingesenkte, mit bestimmter Belastung drückende Glocke das Gas immer gleich heraustrieb, oder in welchen ein beständiger Zu- und Abfluss von Wasser unter gleichen Druck des Gases hergestellt wurde. Der Apparat von Weissbach besteht in einem Blechbehälter A (Fig. 148), der, gemäss dem zweiten Verfahren, vom Wasserabflussapparate Fig. 89 (119) her durch die Oeffnung a Wasser erhält und dasselbe durch die Oeffnung b abgibt. Durch Stellung der Hähne für Zu- und Abfluss richtet man sich so ein, dass ein kleines Wassermanometer c, während des Ausströmens des Gases aus der Oeffnung d, stets auf dem gleichen Punkte bleibt. Die Luftmenge wird sodann aus der Zeit bestimmt, die nothwendig ist, damit das Wasser des Abflussapparates von einer Spitze zur andern sinke, so wie aus dem gleichzeitig aus dem Luftbehälter abgeflossenen Wasser.

Vergleicht man die theoretische Abflussmenge mit den Versuchen von D'Aubuisson und Weissbach, bei nicht grossem Manometerdruck angestellt, so zeigen sich ähnliche Unterschiede, je nach der Gestalt des Oeffnungsrandes, wie beim Wasser (120). Durch Anwendung von sichtbarem Rauch erkennt man in der That eine ganz ähnliche Zusammenziehung des Luftstrales, herrührend von den ungleichen Richtungen der Luftfaden in der Oeffnung. Daher die Nothwendigkeit, die theoretische Abflussmenge mit einem Erfahrungscoefficienten zu multiplizieren, der nach Weissbach folgenden Werth hat

Oeffnung mit umgebogenem Rande	0,947
mit conischem Ansatzrohr	0,883
mit cylindrischem Ansatzrohr	0,839
in dünner Wand	0,671

Werthe, welche auffallend wenig von denen bei Flüssigkeiten abweichen (120).

Ueber die Veränderung dieses Coefficienten mit dem Drucke fehlt es an Beobachtungen. Die Versuche von St. Venant, mit grösserem Manometerdruck angestellt, scheinen mit den Formeln besser zu stimmen, wenn man den Druck in der Oeffnung, nicht dem äussern, sondern dem Mittel des äussern und innern gleich setzt.

180. Abfluss durch Leitungen. — Bei Gebläsen, bei der Gasbeleuchtung u. s. f. fliesst das Gas durch oft lange Leitungen und erleidet dann ganz ähnliche von den Wänden ausgehende Verzögerungen wie das Wasser (125). Ein Theil des manometrischen Ueberdruckes zwischen Behälter und Abflussöffnung $B - b = \beta$ geht an den Hindernissen verloren, so dass der auf die Geschwindigkeit fallende Druck

$B' S = \frac{U^2}{2g} \cdot s$ (S als specifisches Gewicht der manometrischen Flüssigkeit genommen) bedeutend kleiner erscheint. Die Erfahrung hat gelehrt, dass man den Verlust $B' S$ auch hier proportional annehmen könne 1) der Länge L der Leitung, 2) ihrem innern Umfange, 3) umgekehrt dem Querschnitte A , 4) dem specifischen Gewicht und endlich 5) dem Quadrate der Geschwindigkeit U . Man hätte also

$$B' S = \alpha \frac{CL}{A} \cdot s \cdot U^2 \quad (1)$$

wo nach Weissbach und andern Beobachtern $\alpha = 0,0003058$ zu setzen ist.

Die Bedingung des Abflusses wäre nun

$$(\beta - B') S = B' S = \frac{U^2}{2g} \cdot s$$

also nach Einführung von $B' S$

$$U = \sqrt{\left\{ 2g \frac{S}{s} \cdot \frac{\beta}{1 + \alpha \frac{CL}{A}} \right\}} \quad (2)$$

wo α , zur Abkürzung, für $2g\alpha = 0,005997$ gesetzt ist.

Da $s = s_0 \frac{b}{b_0} \frac{1}{1 + \gamma t}$ und für atmosphärische Luft und Metermaass
(178) $\sqrt{(2g \frac{b_0 S}{s_0})} = 395,93$, so folgt genähert

$$U = 395,93 \sqrt{\left\{ \frac{\beta}{b} \cdot \frac{1 + \gamma t}{1 + \alpha \frac{CL}{A}} \right\}} \quad (3)$$

Das in 1 Sec. abfliessende Luftgewicht wird sein

$$Q = 673,45 \cdot A \cdot b \sqrt{\left\{ \frac{\beta}{b} \cdot \frac{1 + \gamma t}{1 + \alpha \frac{CL}{A}} \right\}} \quad (4)$$

endlich das Abflussvolumen unter dem äussern Drucke b und unter dem Drucke B des Behälters

$$V = A \cdot U, \text{ und } V' = V \frac{b}{B} \quad (5)$$

181. Abfluss durch die Schwere. — Ein Strömen der Luft entsteht allemal, wenn in einer ansteigenden oben und unten offenen Röhre Luft von anderm specifischen Gewichte als die äussere enthalten ist. Bei Ventilations- und Kaminröhren rührt das ungleiche specifische Gewicht von einer Ungleichheit der Temperatur, im letzten Falle auch von einer etwas abweichenden Beschaffenheit der Luft her. Sei (Fig. 149) $a b = H$ die Höhe einer solchen vertical angenommenen Röhre; sei s das specifische Gewicht der innern, s' der äussern Luft. Während am obern Ende der Druck aussen und innen der gleiche ist, wirkt am untern Ende ein Ueberdruck $H(s' - s)$ den man für βS in den Ausdruck (2) von (180) zu setzen hat. So erhält man

$$U = \sqrt{\left\{ 2 g H \frac{s' - s}{s} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \frac{CL}{A}} \right\}} \quad (1)$$

oder wenn t die äussere und T die innere Temperatur, Mittel derjenigen am Anfang und Ende der Röhre, bezeichnen

$$U = \sqrt{\left\{ 2 g H \cdot \left(\frac{s'_0}{s_0} \cdot \frac{1 + \gamma T}{1 + \gamma t} - 1 \right) \cdot \frac{1}{1 + \alpha \frac{CL}{A}} \right\}}$$

Ist die innere Luft, gleich der äussern atmosphärischen Luft, also $s_0 = s'_0$ so folgt einfacher (2)

$$U = \sqrt{\left\{ 2 g H \cdot \frac{\gamma (T - t)}{1 + \gamma t} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \frac{CL}{A}} \right\}} = 0,268 \sqrt{\left\{ H \cdot \frac{T - t}{1 + \gamma t} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \frac{CL}{A}} \right\}}$$

alles in Metern ausgedrückt.

Die Geschwindigkeit des Zuges wächst also 1) mit der Wurzel aus der Kaminhöhe H , 2) aus der Temperaturdifferenz $T - t$, und nimmt ab 3) mit der äussern Temperatur und 4) mit der Längenerstreckung L der Röhre. Diese letztere bcd, die Hindernisse bestimmend, ist bei winkelig oder schiefgeführten Leitungen wesentlich verschieden von der den Druck bestimmenden verticalen Höhe H .

Das in 1 Sec. ausströmende Luftgewicht wird durch Multiplication mit $s = s_0 \frac{A}{1 + \gamma T}$ erhalten, wo $s_0 = 1,2928$ Kil. (160), und ist unter Vernachlässigung der kleinen Grösse γt neben 1.

$$Q = 0,3465 \cdot A \sqrt{\left\{ H \cdot \frac{T - t}{(1 + \gamma T)^2} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \frac{CL}{A}} \right\}} \quad (3)$$

Aus zahlreichen Versuchen, in denen die Zeit gemessen wurde, welche unten in das Rohr eingeführter Rauch bedurfte, um am obern

Ende zu erscheinen, bestimmt Péclet den Widerstandscoefficienten $\alpha = 0,049$, wenn die Röhre innen rauh oder berusst ist.

182. Fortsetzung. — Da in dem Ausdruck von Q Zähler und Nenner auf andere Weise mit T wachsen, so erreicht Q ein Maximum, der Zug ist der stärkste, für eine gewisse Temperatur $T = \frac{1}{\gamma} - 2t$ oder nahe für 273^0 .

Bei Kaminröhren kann die Luft der Röhre als halbverbrannte betrachtet werden, als solche nämlich, deren Sauerstoff zur Hälfte etwa von schwererer Kohlensäure ersetzt ist. Setzt man mit Péclet $s_0 = 1,09 s'_0$, so werden die Coefficienten von U und Q etwas abweichend 0,256 und 0,3076.

Bei Kaminen ist der Canal der Luft im Grunde sehr unregelmässig, denn es gehören zu demselben die bedeutenden Erweiterungen des Feuer- und Aschenraumes; — der Rost mit dem Brennstoffe, die Schieber u. s. f. bilden hingegen Verengungen desselben. Die Vergleichung mit einer Gasleitung bleibt daher eine sehr ungenügende.

Eine Verengung am obern Ende vermindert natürlich die Geschwindigkeit in der Röhre, damit auch das Hinderniss derselben, die Geschwindigkeit der Oeffnung wächst und der Zug wird dadurch unabhängiger vom äussern Winde. Eine Verengung auf $\frac{1}{2}$ des Röhrenquerschnitts genügt schon, die Geschwindigkeit nahe auf ihr Maximum zu bringen, das heisst auf den Werth den sie ohne Rücksicht auf die Hindernisse der Röhre erreichen könnte.

Von geringerem Einfluss erweisen sich Verengungen an dem untern Ende. Die Erfahrung lehrt, dass durch Umstände, die noch nicht genau ermittelt sind, die Geschwindigkeit in der Röhre sich wenig verändert; diejenige in solchen zwischen der äussern Luft und dem Feuerraum liegenden Verengungen wächst daher stärker, als in solchen am obern Ende, und übersteigt diejenige der Röhre ohne Hinderniss. Bekannt ist der als Gebläse wirkende heftige Zug, der durch kleine Oeffnungen einer Ofenthür entsteht.

183. Die Winde. — Was in der seitwärts abgeschlossenen Kaminröhre vor sich geht, wiederholt sich in der freien Luft. Ueber jedem heissen Körper, über jeder Flamme steigt die leichtere warme Luft empor, getrieben von der äussern schwerern, welche von unten und den Seiten herzuströmt. Im Schatten eines Baumes oder einer Wolke sinkt umgekehrt die kältere Luft herab und dem sich nahenden Beobachter weht Kühlung entgegen.

In grösserem Maassstabe entstehen wirbelartige Luftströmungen aus dem Gegensatze von Land und Wasser, von nördlich und südlich gelegenen Thalhängen, von verschieden beschaffenen Bodenstrecken, weil solche Gegensätze stets eine auf die überliegende Luftsäule einwirkende ungleiche Erwärmung zur Folge haben. An der Erde strömt immer die Luft von der kältern zur wärmern Gegend, in der Höhe im umgekehrten Sinne.

Aber nicht bloss Localwinde, selbst die Windverhältnisse der

Erde im Grossen, gehen aus Druckveränderungen hervor, die ursprünglich der ungleichen Erwärmung der verschiedenen Zonen der Erde beizumessen sind. Der Gegensatz der tropischen und Polarländer veranlasst einen mächtigen Luftaustausch, der die nördliche und schwerere Luft der kältern Gegenden, der Erdoberfläche entlang, dem Aequator zuführt, in der Höhe dagegen wärmere Luft nach den Polarländern treibt. Ohne Drehung der Erde würden diese beiden Hauptströmungen rein nördliche und südliche sein; allein die gegen den Aequator strömende Luft, da sie in Zonen von grösserer Rotationsgeschwindigkeit gelangt, bleibt neben der Erde mehr und mehr zurück und erscheint dem Beobachter als Ostwind. Es ist diess der von Halley zuerst erklärte Passat, der in einem Gürtel zu beiden Seiten des Aequators das ganze Jahr in gleichem Sinne weht und der Schifffahrt den sichersten Anhaltspunkt gewährt. Mehr nach der gemässigten Zone hin werden die Windverhältnisse verwickelter, sei es in Folge der Land- und Wasservertheilung, sei es wegen des vielfachen Wechsels und des Verdrängens der beiden nordöstlichen und südwestlichen Hauptströmungen; — doch gehört die weitere Ausführung dieses Gegenstandes nicht in die reine Physik. Es genügt hier den Zusammenhang der allgemeineren Windverhältnisse mit den auch im Kleinen wirkenden Ursachen nachgewiesen zu haben.

Cap. 6. Erscheinungen des dynamischen Druckes.

184. Der negative Druck. Wie bei Flüssigkeiten (122) kann beim Strömen der Gase, und zwar wegen der veränderlichen Dichte noch auffallender, ein negativer Druck entstehen, kleiner als der äussere atmosphärische, so dass durch eine kleine an einer solchen Stelle angebrachte Oeffnung nicht nur kein Gas ausfliesst, sondern umgekehrt äussere Luft aufgesaugt wird. Die Beziehung (176) zwischen dem Druck p' , p und der Geschwindigkeit u' , u einer frühern und spätern Stelle eines Luftfadens zeigt, dass wo die Geschwindigkeit grösser, der Druck kleiner wird, wiewohl nach einem andern Gesetze als bei Flüssigkeiten.

Zufolge der Bedingung für den beharrenden Abfluss (175) hat man aber $u' = u \frac{p a}{p' a'}$; bezieht man ferner a , u , p auf die Abflussöffnung und schreibt für u , p demzufolge U , b S — wo S das specifische Gewicht der manometrischen Flüssigkeit ist, so erhält man

$$\frac{k}{2} U^2 \left(1 - \frac{b^2 a^2}{b'^2 a'^2}\right) = m \lg \frac{b'}{b} \quad (1)$$

Für negativen Druck muss in $b' = b - \beta$, β positiv sein. Nimmt man alle Aenderungen als allmählig und gering an, so kann man genähert setzen

$$\frac{b^2}{b'^2} = 1 + 2 \frac{\beta}{b} \text{ und } m \lg \frac{b'}{b} = m \lg \left(1 - \frac{\beta}{b}\right) = - \frac{\beta}{b}$$

Eingeführt ergibt sich

$$\frac{\beta}{b} = \frac{1}{2} k U^2 \frac{a^2 - a'^2}{a'^2 - k U^2 a^2} \quad (2)$$

Nun ist $k = \frac{s_0}{g \cdot b_0 \cdot S}$ (für $t = 0$) eine sehr kleine Grösse, für Metermaass nur 0,00001013. β wird also positiv, der Druck negativ, wenn $a' < a$, allemal also wenn der berücksichtigte Querschnitt kleiner als die Oeffnung ist. Natürlich kann die Druckverminderung nicht im Sinne der Bewegung, sondern nur seitlings von derselben beobachtet werden.

185. Versuche. — Fig. 150 stellt einfache Apparate dar, um den negativen Druck nachzuweisen. An dem ersteren A öffnet sich eine Abflussröhre a in einer ebenen Wand $b b'$, welcher gegenüber die bewegliche Scheibe $c c'$ nahe genug sich befindet. Hier ist der ringförmige Zwischenraum am Rande der Scheibe als Abflussöffnung zu betrachten, so dass an der ganzen innern Fläche der Scheibe (und der Wand), die dem Stoss ausgesetzte Mittelstelle abgerechnet, der Druck kleiner wird als ausserhalb. Statt weggetrieben zu werden, wird die Scheibe angezogen und schliesst momentan die Oeffnung, doch nur momentan, da der statische Druck sie wieder wegtreibt. — In der zweiten Vorrichtung B öffnet sich die eine engere Röhre $a a'$ in eine weitere $b b'$. Nahe der Einmündung befindet sich seitwärts ein kleines Wassermanometer c , dessen Steigen nach Innen beim Blasen den mit der Geschwindigkeit wachsenden negativen Druck anzeigt. Hierbei theilt der ganze hinterliegende geschlossene Raum b' die Verminderung des Druckes.

Nach ähnlichen Grundsätzen erklärt sich das Zusammensinken einer Papierdüte, durch welche stark geblasen wird, die saugende Wirkung eines Kaminzuges an oder gerade jenseits einer Verengung, die Unwirksamkeit der Sicherheitsventile an Dampfkesseln, wenn sie mit breiter Fläche auf dem Rande der Dampföffnung aufliegen, u. s. f.

186. Die Reaction der Gase. — Auch beim Ausfluss der Gase entsteht, wegen der allseitigen Wirkung der Expansivkraft, dem Abflusse entgegen, eine Reaction, welche den Behälter, wenn er beweglich ist, rückwärts treibt. Bezeichnet a U d die in 1 Sec. durch die Oeffnung a mit der Geschwindigkeit U und der Dichtigkeit d ausfliessende Luftmasse, so wird in gleicher Zeit rückwärts die Bewegungsmenge (133)

$$Q = a U^2 \cdot d$$

mitgetheilt. Wegen Kleinheit der Dichte $d = \frac{s}{g}$ ist bei Gasen diese Kraft in der Regel sehr klein; sie kann dennoch bei grossen Geschwindigkeiten oder starkem Druck im Behälter erheblich werden.

Einen Fall dieser Art bietet die Aeolipile (Fig. 151) dar. A ist ein um eine verticale Axe $a a$ bewegliches Gefäss, in welchem durch Hitze eine grosse Menge Dampf entwickelt wird, welche durch seitwärts gerichtete Röhren b ausströmt. Bei hinlänglicher Erhitzung ent-

steht eine Reaction, welche dem Rädchen eine grosse Rotationsgeschwindigkeit mitzutheilen vermag.

187. Reaction der Pulvergase. — Noch stärker wirkt die Reaction bei der reichlichen und heftigen Gasentwicklung aus der Verbrennung des Schiesspulvers (168). Verbrennt aus einer Patrone, deren Querschnitt A , in Einer Sec. eine Länge l und ist S das specifische Gewicht des Pulversatzes, so ist $A l S$ das abfliessende Gasgewicht und die Stärke der Reaction

$$Q = A \cdot l \cdot \frac{S}{g} \cdot U^2$$

U ist freilich unbekannt, jedenfalls aber nach der Geschwindigkeit einer abgeschossenen Kugel zu urtheilen, ungemein gross.

Die Reaction der Pulvergase offenbart sich im Rückstoss der Gewehre; sie wirkt als bewegende Kraft aller Feuerwerkstücke, als Triebkraft der Kriegsraketen, welche letztern bei einem Gewichte von 10 Kil. und mehr auf die Entfernung einer Kanonenkugel reichen können.

Die Bahn einer geraden Rakete unterscheidet sich wesentlich von der parabolischen Wurflinie (68), weil 1) die Triebkraft, nicht anfangs nur, sondern so lange die Verbrennung dauert, beständig wirkt; 2) weil die Masse der Rakete in Folge der Verbrennung immer kleiner wird. Dieser letztere Umstand, in Verbindung mit dem der Ausströmung und der Bewegung entgegenwirkenden Luftwiderstande, erschweren die genaue Berechnung der Bewegung, die sich um so mehr einer geradlinigen und gleichförmigen nähert, als die Patrone schwerer ist und die Verbrennung gleichmässiger vor sich geht. Eine winklig gebogene Gestalt der Patrone hat eine eckige Bahn zur Folge, wie sie beim Wurfe und andern stetigen Bewegungen nicht entstehen kann. Daraus, dass bei Feuerkugeln bisweilen eckige Bahnen beobachtet wurden, schliesst man, übereinstimmend mit andern Thatsachen, dass manche derselben von einer starken Gasentwicklung begleitet sein müssen.

Bei Kriegsraketen hat man der Bewegung dadurch etwas mehr Sicherheit zu geben gesucht, dass man der Eisenpatrone, wie der Büchsenkugel (69), eine drehende Bewegung um ihre Längsaxe mittheilt. In den Tangentialraketen nämlich fliessen die Gase durch Oeffnungen eines eisernen Deckels aus, welche nach der Richtung von Schraubenlinien schief gebohrt sind und eine Reaction in tangentialer Richtung erzeugen.

188. Der Widerstand der Luft. — Allen Bewegungen, die in ihr vor sich gehen, setzt die Luft einen oft erheblichen Widerstand entgegen, wie beispielsweise bereits bei Gelegenheit der Wurf- und Pendelbewegung (69. 76) erläutert wurde. Obgleich diese Erscheinung das Ziel vieler Untersuchungen war, kennt man dieselbe nur oberflächlich und vermag die zusammenwirkenden Ursachen nicht gehörig zu sondern. Auf den Widerstand, den ein bewegter Körper von Seiten der ruhenden Luft erleidet, kann nämlich Einfluss haben: 1) der Gewichtsverlust, den der Körper in der Luft erfährt, 2) die Mitbewegung einer gewissen wechselnden Luftmenge, die der Körper mit sich

reisst, 3) die Ablenkung der Theilchen, die auf Curven ausweichend, einen Druck aus der Fliehkraft entwickeln, 4) die Druckdifferenz der Vorder- und Rückseite, endlich 5) die Reibung der Luft an der Oberfläche des Körpers.

Ohne näher auf diese einzelnen Umstände einzutreten, pflegt man mit Newton den Widerstand gewöhnlich proportional anzunehmen: 1) dem Querschnitte A des Körpers (senkrecht der Bewegungsrichtung), oder der Menge neben einander verdrängter Theile, 2) dem Quadrate der Geschwindigkeit U des Körpers, d. h. der Zahl der in 1 Sec. hinter einander verdrängter Theile und der Geschwindigkeit, mit der sie weichen müssen, 3) dem specifischen Gewichte des Gases, nämlich der Masse die verdrängt wird, endlich 4) einem Coefficienten k , der den Einfluss der Gestalt des Körpers, das heisst die Ablenkungsweise und die übrigen unberücksichtigten Umstände in sich schliesst. Man erhält so

$$Q = k \cdot s \cdot A \cdot U^2.$$

ein Ausdruck, der demjenigen bei Flüssigkeiten nachgebildet ist (139).

189. Erfahrungen. — Nur auf indirektem Wege, mittelst der Störungen, welche theoretisch bekannte Bewegungen erleiden, hat man die Richtigkeit des vorigen Ausdruckes zu prüfen gesucht. Namentlich wurde die Pendelbewegung, wegen ihrer Regelmässigkeit und Dauer, so wie um der Wichtigkeit ihrer Anwendungen willen, für diesen Zweck in Anspruch genommen.

Wenn die Bewegung höchst langsam vor sich geht, wird dem Gewichtsverlust einfach Rechnung getragen, indem man statt der ganzen Schwere g den Werth $g \left(1 - \frac{s}{S}\right)$ einführt, wo s das specifische Gewicht des Gases, S dasjenige des Körpers ist; allein die Versuche Bessels zeigen, dass in Folge einer stärkeren Mitbewegung der Luft die Schwächung der Schwere grösser und nach Poisson bei Kugeln und langen Faden, bis auf $\frac{3}{2} \frac{s}{S}$ steigen kann.

Den Erfahrungen Borda's zufolge geht bei sehr kleinen Elongationen die Abnahme der Schwingungsbogen nahe nach einem constanten Verhältnisse vor sich, so dass der n te Bogen α_n aus dem ersten α mittelst eines Ausdruckes

$$\alpha_n = \gamma^n \alpha$$

berechnet werden kann, wo γ für jeden Körper eine Constante wäre. Wie Poisson gezeigt, folgt dieses Gesetz aus einem Widerstande, den man mit der ersten Potenz von U proportional annimmt, welche Annahme daher bei sehr langsamen Bewegungen die naturgemässe scheint.

Je grösser die Schwingungsbogen und Geschwindigkeiten, desto mehr nähert man sich dem quadratischen Gesetze; denn aus diesem erklärt sich, dass der Isochronismus, der Abnahme der Bogen ungeachtet, sich genähert erhalten kann (76). Es scheint daher richtiger den Widerstand durch eine Formel, sowohl die erste als zweite Potenz von U enthaltend, oder noch richtiger, durch eine Reihe

$Q = k \cdot s \cdot A (U + \beta U^2 + \gamma U^3 + \dots)$
 auszudrücken, von welcher, je nach den Umständen, das erste oder zweite Glied mehr hervortritt.

Ueber den Einfluss der Grössen k und A fehlt es an Thatsachen. Bei gleichem Querschnitte A , war k bei einer Kugel nahe $\frac{1}{2}$ so gross als bei einem eben abgeschnittenen Cylinder, was schon Newton angenommen hat.

190. Wirkungen der Fliehkraft. — Wir wollen endlich die Wirkung der Fliehkraft auf eine rotirende Luftmasse betrachten; bei einer Flüssigkeit offenbart sie sich durch Gestaltänderungen der Oberfläche (100), bei einem Gase durch Aenderungen des Druckes und der Dichte.

Man denke sich eine in einer Trommel A (Fig. 152) eingeschlossene Luftmasse durch ein Flügelrad B in constante Drehung versetzt. In einer Entfernung r von der Axe sei $p \omega$ der Druck auf die kleine Fläche ω . Die Fliehkraft, bei einer Winkelgeschwindigkeit w auf alle Theilchen mit einer Stärke $f = r w^2$ (82) radial nach aussen wirkend, bringt an der Peripherie eine Verdichtung, im Centrum eine Verdünnung der Luft hervor. Von r um δr fortschreitend, wird die Zunahme des Druckes $\omega \delta p$ von der Fliehkraft des Theilchens herrühren, das $\omega \cdot s \cdot \delta r$ zum Gewicht hat. Nach Weglassung des gemeinsamen ω erhält man also

$$\delta p = \frac{s}{g} w^2 r \delta r$$

oder wenn man $s = s_0 \frac{p}{p_0} \frac{1}{1 + \gamma t} = k p$ einführt

$$\frac{\delta p}{p} = \frac{k w^2}{g} r \delta r \quad (1)$$

Nimmt man nach Formel II und III die Summe beider Glieder vom Centrum, wo $r = 0$, $p = P'$ bis zur Peripherie, wo $r = R$, $p = P$, so folgt

$$m \lg \frac{P}{P'} = \frac{k w^2}{2 g} R^2 \quad (2)$$

Der Druck von Peripherie und Centrum (oder auch die Dichte) hat also ein ganz bestimmtes Verhältniss, abhängig von der Winkelgeschwindigkeit w und dem Radius R und mit beiden wachsend. Durch eine Oeffnung an der ersten Stelle wird Luft herausgepresst, durch eine solche an der zweiten aufgesaugt.

Solche Vorrichtungen werden immer häufiger benutzt. Im Centrifugalgebläse (Fig. 153) aus einer Trommel A mit peripherisch angebrachter Windröhre B bestehend, wird vorzugsweise die pressende Wirkung angewandt. Es hat vor allen Pumpengebläsen (169) den Vorzug der Einfachheit, der Kleinheit und vor Allem einer gleichmässigen Wirkung. Im Ventilator, bestimmt mittelst eines in die Mitte einmündenden Schlauches c einen Zug zu erzeugen, um z. B. die verdorbene Luft eines Raumes zu erneuern, dient vorzugsweise die sau-

gende Wirkung. Man hat in neuerer Zeit sogar, nicht ganz ohne Erfolg, sowohl verdünnende als verdichtende Luftpumpe nach dem gleichen Grundsatz zu construiren versucht.

Verdünnungen durch Fliehkraft zeigen sich endlich bei Wirbeln in freier Luft, die unter ähnlichen Bedingungen wie die Wasserwirbel (130. 131), namentlich an der Grenze entgegengesetzter Windströme entstehen. Bei grosser Geschwindigkeit offenbart sich unten und oben eine saugende Wirkung; die von unten und aussen einströmende Luft vermag leichte Gegenstände zu heben und fortzutragen und über einer Wasserfläche erhebt sich das wirbelnde Wasser, wie man es bei der wunderbaren Erscheinung der Tromben beobachtet.

Abschnitt III.**Wirkungen der Cohäsionskräfte.****Vorbemerkungen.**

191. Molecularkräfte. — Nachdem gezeigt worden, wie sehr verschieden die aus der Schwere und den äussern Kräften hervorgehenden Erscheinungen sich je nach dem festen, flüssigen und luftförmigen Zustande der Körper gestalten, ist es an der Zeit, auf die Kräfte einzutreten, welche die Aggregatsformen selbst begründen. Von der auf alle Entfernung hin wirkenden Gravitation (92) unterscheiden sich diese, die Molecularkräfte (38), dadurch, dass sie bei einem zusammenhängenden Körper zwar eine bedeutende Stärke erreichen können, nach der Trennung der Theile aber, für jede messbare Entfernung, nahe verschwinden. Da diese Kräfte zwischen den unendlich kleinen Theilchen auf unmessbare Entfernung hin thätig sind, so entgeht ihre einfache Wirkung der Beobachtung und man hat immer nur ein zusammengesetztes Resultat zahlloser einzelner Wirkungen vor Augen.

Ein Körper im natürlichen Zustande widersteht sowohl einer Ausziehung als einer Zusammendrückung; jenes setzt das Dasein einer Anziehung, dieses einer Abstossung zwischen den Theilchen voraus, während im natürlichen Zustande keine von beiden Wirkungen vorwaltet. In der That spricht alles dafür, dass zwischen den Theilchen, mittelbar oder unmittelbar, zwei verschiedenartige Kräfte wirksam sind, eine anziehende und eine abstossende, welche beide, analog wie die Gravitation, doch nach unbekannten Gesetzen, mit der Entfernung abnehmen, so rasch aber, dass sie in messbarer Entfernung nahe erlöschen. Da, von der Entfernung ihrer Gleichheit ausgehend, bei Ausdehnung die Anziehung, bei Compression die Abstossung vorherrschend wird, so muss die Abstossung rascher ändern als die Anziehung. Man stelle graphisch durch die Ordinaten der Curve $A A'$ (Fig. 154) die Anziehung für verschiedene als Abscissen auf $O X$ abgemessene Entfernungen zweier Theilchen dar; ebenso sei $B B'$ die Curve der Abstossung, so bezeichnet der Durchschnittspunkt a die Entfernung $O b$ der Gleichheit oder des natürlichen Zustandes, während diesseits die Abstossung, jenseits die Anziehung überwiegt und bei Entfernungen über $O c$ alle merklichen Kräfte verschwunden sind.

Denkt man sich um ein ganz im Innern eines Körpers befindliches Theilchen zwei Kugelflächen gelegt, die eine mit der Entfernung $O b$ der Kräftegleichheit, die andere mit der Entfernung $O c$ der Kräftegrenze als Radius, so werden alle innerhalb der ersten liegenden Theilchen auf dasjenige im Centrum abstossend, alle zwischen beiden enthaltenen anziehend, endlich die aussen an beiden gelegenen gar nicht einwirken. Wären die Theilchen ringsherum auf entgegengesetzten Rich-

tungen identisch vertheilt, so würden die anziehenden und die abstossenden Kräfte, jedes Systems allein schon sich aufheben; wo nicht, kann das Gleichgewicht nur aus dem Zusammenwirken der einen und andern hervorgehen. Für oberflächliche Theilchen, die nur einseitig Wirkungen erleiden, ist ein Zusammenwirken, selbst wenn äussere Kräfte zu Hülfe kommen, immer nothwendig; deshalb wird im Allgemeinen der Gleichgewichtszustand der Begrenzung ein etwas anderer als im Innern sein.

192. Die Aggregatformen. — Beide Kräfte, gleich wie sie einem verschiedenen Gesetze der Entfernung folgen, scheinen überhaupt von wesentlich verschiedener Natur zu sein. Nach Analogie mit der Schwere und der chemischen Affinität betrachtet man die Anziehung oder die Cohäsionskraft als eine bleibende Eigenschaft der Theilchen, die immer gleich hervortritt, sobald die nämlichen Theilchen wieder in gleiche Stellungen und Entfernungen gegen einander gelangen. Anders verhält es sich mit der Abstossung. Da die Wärme die Körper ausdehnt, so nimmt dieselbe mit dieser zu und vermag dann bei grösserer Entfernung der Anziehung das Gleichgewicht zu halten; Erkältung umgekehrt vermindert sie auf den Grad, den die Anziehung bei kleinerer Entfernung verlangt. Also die Wärme, eine Ursache, welche vom Körper unabhängig, ihm, gleich einer Bewegungsmenge, gegeben und genommen werden kann, bestimmt wesentlich die Abstossung und rückt die Curve B nach B' hinaus. Aus der Wechselwirkung der beiden verschiedenartigen Kräfte geht die Aggregatform hervor (21).

Der feste Zustand entspricht einer Entfernung O b (Fig. 154) der Theilchen, bei welcher aus allen kleinen Entfernungs- und Stellungsänderungen starke gegenwirkende Kräfte entstehen, welche das Gleichgewicht herzustellen streben. Letzteres ist daher nach allen Seiten stabil, und die Entfernung O b weit unterhalb der Grenzentfernung O c. — Durch Mittheilung von Wärme geht die Curve der Abstossung nach B' der Durchschnittspunkt a rückt heraus nach a', wo die Kräfte schwächer sind. Gegen Compression entwickelt sich bedeutende Abstossung; bei Ausziehung dagegen gelangt man bald an die Grenze der Kraftwirkung. Stabilität ist noch mit Rücksicht auf Entfernungsänderung vorhanden, mit Rücksicht auf Stellungsänderung hingegen weit weniger; daher die geringe Zusammendrückbarkeit und die leichte Verschiebbarkeit des flüssigen Zustandes, der durch Aufnahme von Wärme, durch Schmelzung, aus dem festen entsteht. — Im luftförmigen Zustande endlich ist die Curve durch Aufnahme von noch mehr Wärme so weit nach B'' verschoben, dass sie diejenige der Anziehung A nicht mehr schneidet. Die Abstossung waltet ausschliesslich als Expansivkraft vor und gestattet, ohne Hülfe äussern Druckes, kein Gleichgewicht.

Cohäsionskraft und Wärmeabstossung bedingen hiernach vorzugsweise und gemeinsam die Molecularerscheinungen; indessen treten in den einen derselben mehr die Eigenthümlichkeiten der einen Kraft, in den andern mehr die der andern hervor. Wir betrachten zuerst die Cohäsionserscheinungen und versparen diejenigen, welche mit den Aenderungen der Wärmeabstossung zusammenhängen, auf den folgenden Abschnitt der Wärme.

A. Gleichgewichtserscheinungen.

1. Feste Körper.

193. Cohäsionserscheinungen der festen Körper. — Bei den festen Körpern zeigen die Cohäsionserscheinungen die grösste Schärfe und Mannigfaltigkeit, weil die Wärme zurücktritt, die von der Natur und Eigenthümlichkeit der Theilchen abhängige Cohäsionskraft aber mit dem grössten Werthe in die Erscheinungen eingeht. Man unterscheidet gewöhnlich :

1) Die Erscheinungen der Elasticität oder Federkraft — wenn durch äussere Kräfte Gestaltänderungen hervorgerufen werden, welche nachher durch Wirkung der Molecularkräfte wieder verschwinden;

2) diejenigen der Ductilität oder Geschmeidigkeit; — wenn die Gestaltänderung, weil zu stark, nicht wieder verschwindet, und die Theilchen, theilweise wenigstens, in ein neues stabiles Gleichgewicht übergehen;

3) Die Erscheinungen der Cohäsion oder Festigkeit, — wenn eine noch stärkere äussere Einwirkung die Molecularkräfte ganz überwindet und Trennung bewirkt;

4) Endlich die Erscheinungen der Krystallisation — in welchen früher unzusammenhängende Theilchen, durch das Spiel der Cohäsionskräfte, zu einem festen Körper verbunden werden.

Cap. 1. Elasticität der Stäbe.

194. Allgemeine Sätze. — Alle festen Körper verhalten sich gegen hinlänglich schwache Einwirkungen als vollkommen elastisch, als Beweis, dass sich ihre Theile für einen gewissen Umfang der Veränderungen, in stabilem Gleichgewichte befinden. Bei weich-elastischen Körpern, wie Leder, Gummi elasticum genügen schwache Kräfte, um grosse Veränderungen der Gestalt hervorzubringen, in hart-elastischen, wie Glas und Stahl, widersetzt sich eine bedeutende Kraft einer schon geringen Aenderung. Ueberhaupt entsteht bei Fortdauer der äusseren Kraft eine solche Aenderung der Gestalt, dass zwischen der äussern und der resultirenden elastischen Kraft Gleichgewicht besteht; die eine also der andern gleich ist.

So lange man von der Elasticitätsgrenze, d. h. von dem Punkte, wo bleibende Umformungen beginnen, fern bleibt und die Aenderungen klein genug sind, bewähren sich, genähert wenigstens, die folgenden beiden von Hook erkannten Gesetze.

1) Die Gestaltänderung ist mit der äussern Kraft proportional, oder in andern Worten, die elastische Kraft ist es mit der Gestaltänderung;

2) Die Veränderung erfolgt gleich leicht im einen und im entgegengesetzten Sinne, z. B. durch eine ziehende und drückende, eine rechts oder links drehende Kraft, entwickelt sich ein gleich grosser elastischer Widerstand.

Die meisten praktischen Rechnungen über die Elasticität stützen sich auf diese beiden einfachen Gesetze doch dürfen sie für nicht mehr als eine erste Annäherung gelten, da Wertheim erwiesen hat, dass eine scharfe Elasticitätsgrenze im Grunde gar nicht besteht, und bei vielen Körpern schon durch schwache Einwirkungen, anfangs freilich unmerkliche bleibende Aenderungen beginnen.

Am einfachsten und sichersten begründet sind die Elasticitätsgesetze der stab- oder drahtförmigen Körper. Sie beziehen sich auf die drei Fälle, wo die Elasticität 1) durch Zug oder Druck, 2) durch Biegung und 3) durch Drehung geweckt wird.

195. Elasticität des Zuges. — Wird ein mit dem einen Ende befestigter Stab, dessen Länge L ist, durch ein Gewicht P gezogen, das keine bleibenden Aenderungen hervorbringt, so verlängert er sich um eine kleine Grösse λ , die bei verschiedenen Dimensionen und verschiedener Substanz eine andere sein wird. Nach dem allgemeinen Gesetze (194) ist λ 1) mit P proportional, ferner 2), da die Ausdehnung alle Theile der Länge in gleicher Weise ergreift, mit L , endlich 3), da P sich auf den ganzen Querschnitt A vertheilt, umgekehrt mit A . Man kann also setzen

$$\lambda = \varepsilon \cdot \frac{PL}{A} \text{ oder } P = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\lambda A}{L}$$

Der Elasticitäts-Coeffic. ε bezeichnet also das Verlängerungsverhältniss $\frac{\lambda}{L}$ wenn ein Stab vom Querschnitte $A = 1$, mit der Ge-

wichtseinheit $P = 1$ belastet wird; der umgekehrte Coeffic. $\frac{1}{\varepsilon}$ das Gewicht P , das nöthig wäre, den Stab um seine eigene Länge $\lambda = L$ zu verlängern, vorausgesetzt, das einfache Gesetz der Ausdehnung fände so weit seine Anwendung. Ist ε für eine Substanz bekannt, so gestatten die obigen Ausdrücke von den 4 Grössen: Belastung, Länge, Querschnitt, Verlängerung eine aus den 3 andern zu bestimmen. Beobachtet man alle 4 Grössen, so führen sie auf

$$\varepsilon = \frac{\lambda \cdot A}{L \cdot P}$$

Manche Physiker nennen Coeffic. der Elasticität, oder Modulus der Elast. die Grösse $\frac{1}{\varepsilon}$.

196. Versuche. — Gravesande, und später andere Physiker, prüften die elastische Verlängerung der Drähte, indem sie den Draht zwischen zwei festen Punkten a, b (Fig. 155) horizontal festklemmten, in der Mitte c für die Belastung eine Schale d anbrachten, deren Schwere durch das Gewichtchen e ausgeglichen war, und dann die Senkung η aus der Bewegung des an der Rolle f befestigten Zeigers bestimmten. Sei L die ursprüngliche Länge, die unter der Belastung Q zu L' werde, wobei man die Senkung η beobachte, so folgt aus der Figur

$$L' = 2 \sqrt{\left(\frac{1}{4} L^2 + \eta^2\right)}, \quad \lambda = L' - L, \quad P = \frac{1}{2} Q \frac{L'}{\eta}$$

folglich nach Einführung in ε .

$$\varepsilon = 2 \frac{A}{Q} \eta \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L'} \right), \text{ in erster Annäherung } = \frac{A}{Q} \cdot \frac{\eta^3}{L^3}$$

Ausser aus der Reibung der Rolle, geht bei diesem Verfahren eine Ungenauigkeit daraus hervor, dass der Draht in der Mitte keinen scharfen Winkel, sondern eine Krümmung bildet, was auf die Bestimmung von η , von L' und von P einen Einfluss ausübt. Desshalb ist Wertheim, dem man die zahlreichsten und genauesten Bestimmungen zu danken hat, wieder zu dem einfachsten und direktesten Verfahren zurückgekehrt. Der Draht A wird oben in a (Fig. 156) festgeklemmt und unten mit einem Kasten B zur Aufnahme von Wasser oder von Gewichten beschwert. Man misst mittelst des Cathetometers die Entfernung zweier auf dem Drahte angebrachten Marken α , β und die Veränderung λ , welche sie unter verschiedenen Belastungen P zeigt. Alle Grössen werden so direkt gemessen, mit Ausnahme des Querschnittes A , den man aus dem Gewichte, dem specifischen Gewichte und der Länge berechnet.

197. Der Coefficient der Metalle. — Ihrer vielen Anwendungen wegen wurden die Metalle der Gegenstand zahlloser Untersuchungen. Vor allen aber zeichnen sich diejenigen Wertheim's durch ihre Genauigkeit, ihre Vollständigkeit und die Rücksicht auf chemische Reinheit aus. Die folgende Tabelle gibt für Drähte von 1 Quadr. Millim. Querschnitt einige Hauptresultate derselben, nämlich 1) die Dichte des Metalles bei 15°, 2) die Werthe von ε und $\frac{1}{\varepsilon}$, auf Kil. bezogen, und zwar im angelassenen, d. h. im möglichst homogenen Zustande, 3) die Werthe von $\frac{1}{\varepsilon}$ für 1000 und 2000, 4) dieselben für frisch gezogenen Draht, der durch den Drahtzug eine oberflächliche Verdichtung erhielt.

	angelassen		gezogen,			
	D	ε	$\frac{1}{\varepsilon}$	$\frac{1}{\varepsilon}$	$\frac{1}{\varepsilon}$	$\frac{1}{\varepsilon}$
			15°	1000	2000	
Blei	11,232	0.00057904	1727	1630	—	1803
Gold	18,035	17905	5585	5408	5482	8131
Silber	10,304	14004	7141	7274	6374	7357
Zink	7,060	—	—	—	—	8734
Palladium	11,225	10216	9789	—	—	11759
Kupfer	8,936	09507	10519	9827	7862	12449
Platin	21,083	6444	15518	14178	12964	17044
Stahldraht (engl.)	7,622	5788	17278	21292	19278	18809
Gussstahl	7,919	5112	19561	19014	17926	19549
Eisen (Berry)	7,757	4809	20794	21877	17700	20869

Die stärkste Elasticität haben Eisen und Stahl, eine gegen 11mal grössere als das Blei. Bei allen Metallen wächst sie durch den Draht-

zug, doch nur sehr wenig beim Eisen und Stahl; beim Kupfer dagegen um $\frac{1}{5}$, beim Gold sogar um $\frac{2}{5}$. Erwärmung vermindert in der Regel die Elasticität; bei Eisen, Stahl und Silber indess zeigt sich anfangs eine Vermehrung und erst bei 200° (bei Stahldraht auch da nicht) eine deutliche Verminderung. Uebrigens ändert sich der Coefficient durch jede mechanische oder chemische Veränderung des Metalles.

Von Metalllegirungen verdienen folgende erwähnt zu werden:

	D	$\frac{1}{\epsilon}$		D	$\frac{1}{\epsilon}$
Messing (Zc Cu ₂)	8,606	8543	Neusilber (Zc ₄ Cu ₁₈ Ni ₅)	8,541	10788
Tombac (Zc Cu ₂)	8,655	9277	Packfong (Zc ₅ Cu ₆ Ni ₃)	8,436	11500

Der Coeffic. der Legirungen war nahe das aus den Coeffic. der Bestandtheile berechnete Mittel, mochte die Verbindung von einer Contraction oder Dilatation (Vermehrung oder Verminderung des specifischen Gewichtes) begleitet sein.

198. Andere Substanzen. — Wertheim und Chevandier fanden auf einem andern Wege als die einfache Verlängerung für Hölzer, mit 20 Procent Feuchtigkeit genommen und nach den drei Hauptrichtungen des Stammes geschnitten, folgende Werthe von $\frac{1}{\epsilon}$

	D	long.	radial	tangent.
Pappel	0,477	517,2	73,3	38,9
Fichte (P. sylv.)	0,559	564,1	97,7	28,6
Eiche (Q. robur)	0,872	921,3	188,7	129,8
Buche	0,823	980,4	269,7	159,3
Birke	0,812	997,2	81,1	155,2
Ahorn	0,674	1021,4	157,1	72,7
Erle	0,601	1108,1	98,3	59,4
Tanne	0,493	1113,2	94,5	34,1
Esche	0,697	1121,4	111,3	102,0
Ulme	0,723	1165,3	122,6	63,4
Acacia	0,717	1261,9	—	—

Eine Beziehung zwischen Dichte und Elasticität ist hier so wenig erkennbar, als bei den Metallen. Dagegen übertrifft die elastische Kraft ($\frac{1}{\epsilon}$) in der Richtung der Fasern oft 10 mal diejenige senkrecht zu denselben; am kleinsten wird sie nach der tangentialen Richtung. Einen sehr grossen Einfluss übt die Feuchtigkeit des Holzes aus. Ihre Entfernung bewirkt eine transversale Contraction, eine Vermehrung der Dichtigkeit und der elastischen Kraft. Für 1 Procent Feuchtigkeit wächst letztere um 0,005 bis 0,01.

Für Glas erhielten Wertheim und Chevandier folgende Werthe:

	D	$\frac{1}{\epsilon}$
Spiegelglas (v. Cirey)	2,455	7015
Fensterglas (v. St. Quirin)	2,517	7917
Krystallglas (Valery)	2,446	6890
» (bleihaltig)	3,320	5477

Wir führen endlich noch folgende von Frankenheim als die richtigsten angenommenen Bestimmungen einiger andern Substanzen an.

	$\frac{1}{\epsilon}$		$\frac{1}{\epsilon}$
Gyps	360	Coconseide	861
Eis	541	Knochen	1635
Fischbein	603	Kalkstein	1887
Sandstein	631	Marmor	2609
		Schiefer	11035

199. Elasticität der Biegung. — Die Biegung eines Stabes ist eine zusammengesetztere Erscheinung als der einfache Zug. Man denke sich einen rechtwinklicht-prismatischen Stab AB (Fig. 157 A), dessen Länge, Breite und in der Ebene der Biegung gemessene Dicke L, B, H seien, mit dem Ende a festgeklemmt, mit dem andern, freien, b durch ein Gewicht P belastet. Das freie Ende senkt sich um λ , wobei sich der Stab durch Verlängerung der obern und Verkürzung der untern Fasern (18) biegt. Entwickeln sich gemäss dem zweiten Hauptgesetze (194) bei Ausdehnung und Compression gleiche Kräfte, so liegt in der Mitte eine Faser von unveränderter Länge L und in jedem Querschnitte c entwickeln sich elastische Kräfte, deren auf Herstellung der Gestalt einwirkendes Moment demjenigen $P \cdot y$ aus dem Gewichte und der Entfernung $b'c = y$ gleich ist. Da diess letzere Moment von b nach a zunimmt, so vergrössert sich entsprechend auch die Biegung.

Das Moment der Elasticität besteht aus der Summe der Momente aller Spannungen der einzelnen Fasern. Ein prismatisches Längentheilchen δx des Stabes nehme durch die Biegung die Gestalt eines Keiles vom Winkel φ (Fig. 158) an, welcher Winkel zugleich auch derjenige der um δx aus einander liegenden Tangenten sein wird. Eine Faser, in der Entfernung ϱ von der mittlern und vom Querschnitt $B \delta \varrho$ verlängert ihre ursprüngliche Länge δx um die kleine Grösse $\varrho \cdot \varphi$; das Moment ihrer Elasticität wird daher sein

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{B \varrho^2 \delta \varrho \varphi}{\delta x}$$

Die Summe aller solchen Grössen für die ganze Dicke H muss $P \cdot y$ gleich sein. Da aber $S(\varrho^2 \delta \varrho)$ nach Formel II von $\varrho = -\frac{H}{2}$

bis $+\frac{H}{2} = \frac{H^3}{12}$ ist, so hat man

$$\frac{1}{12 \cdot \epsilon} \cdot \frac{B H^3 \cdot \varphi}{\delta x} = P \cdot y \quad (1)$$

Nun ist aus dem Winkel φ der beiden Tangenten und dem entsprechenden Theilchen $\delta \lambda$ der Senkung, genähert $\delta \lambda = y \cdot \varphi$; folglich da auch y und $bc = x$, auf der mittlern Faser gemessen, wenig abweichen

$$\frac{1}{12 \cdot \epsilon} \cdot B H^3 \cdot \delta \lambda = -P \cdot x^2 \delta x$$

wo das $-$ Zeichen angibt, dass der Theil $\delta \lambda$ der Senkung auf eine Verminderung $-\delta x$ der Länge x fällt.

Ausgedehnt auf die ganze Stablänge, d. h. von $\lambda = 0$ bis λ und von $x = L$ bis 0 erhält man

$$\frac{1}{4 \cdot \epsilon} \cdot B H^3 \lambda = P L^3 \quad \text{oder} \quad \lambda = 4 \epsilon \frac{P L^3}{B H^3} \quad (2)$$

In erster Annäherung, d. h. bei sehr schwacher Biegung, ist also die Senkung direkt proportional 1) der Belastung P , 2) dem Cubus der Länge L ; verkehrt proportional, 3) der Breite B und 4) dem Cubus der Dicke H . Länge und Dicke haben hiernach, beide in entgegengesetztem Sinne wirkend, weit grössern Einfluss als die Breite. Je nachdem man einen rechteckigen Stab im Sinne von H oder von B biegt, widersteht er im Verhältnisse $H^2 : B^2$.

200. Abweichende Fälle. — 1) Für einen nicht rechtwinklichten Querschnitt hat man allgemein einen Ausdruck von der Form

$$\lambda = 4 \epsilon \frac{P \cdot L^3}{Q} \quad (1)$$

wo Q eine von den Dimensionen und der Gestalt des Querschnittes abhängige Grösse ist, welche folgende Werthe erhält:

Rechteck. Breite B , Dicke H	$Q = B H^3$
Quadrat. Seite B	B^4
Kreis. Radius R	$3 \pi R^4$
Röhre. Aeusserer Rad. R , innerer R'	$3 \pi (R^4 - R'^4)$

2) Wird der Stab auf andere Weise gehalten, so entsteht statt 4 ein anderer Zahlcoefficient und man kann allgemein setzen

$$\lambda = k \cdot \epsilon \cdot \frac{P L^3}{Q}$$

Wird z. B. der Stab an den Enden a, b , einfach gestützt, in der Mitte c belastet (Fig. 157 B), so entsteht offenbar eine gleiche Biegung als wäre c festgeklemmt, und als würden am Ende der Längen $\frac{L}{2}$

Kräfte $\frac{P}{2}$ aufwärts wirken, welche Grössen man für L und P in (1) einzuführen hat. — Bei beidseitiger Festklemmung des Stabes in a und b (Fig. 157 C) hätte man statt P und L ähnlichermassen $\frac{P}{2}$ und $\frac{L}{4}$

zu setzen, würde dann aber $\frac{\lambda}{2}$ erhalten. Man erhält so

Ein Ende fest, eines frei	$k = 4$
Beide gestützt	$\frac{1}{4}$
Beide festgeklemmt	$\frac{1}{16}$

Die Senkung in den drei Fällen bei gleicher Belastung verhält sich wie $1 : \frac{1}{16} : \frac{1}{64}$; der Widerstand bei gleicher Senkung umgekehrt.

201. Elastische Federn. — Stäbe, deren Elasticität man benutzt, heissen Federn. Kurze und dicke Federn sind steif und hart, lange

und dünne, mit Schrauben- oder Spiralgestalt z. B., sanft und weich, Ausser den bekannten Anwendungen der Federn zur Dämpfung der Stösse (Wagensuspensionen, Kissen etc.) und als Wurfmittel (in der Ballistik der Alten, dem Bogen, der Armbrust) lassen sich die folgenden hervorheben:

1) Als Uhrfedern. Spiralfedern ersetzen in den kleinen Uhren sowohl die bewegende Kraft des Gewichtes (80) als die regulirende des Pendels. Die starke Hauptfeder A (Fig. 159) befindet sich in dem Gehäuse B, mit ihrem einen Ende an der festen Axe a, mit ihrem andern b an dem beweglichen Gehäuse befestigt. Letzteres wird durch die Kette c mit der Schnecke C verbunden. Beim Aufziehen windet sich die Kette von dem Gehäuse auf immer kleinere Windungen der Schnecke auf; sie dreht das Gehäuse und spannt die Feder, welche nachher mit abnehmender Kraft das Gehäuse zurückbewegt. Der gleichförmige Gang wird nun durch zweierlei erhalten, dadurch 1) dass man das Moment der abnehmenden Federkraft durch Vergrösserung des Hebelarmes mittelst der Schnecke gleich erhält, 2) dass man die Beschleunigung mit Hülfe der Unruhe hindert, — eine zweite zarte Spiralfeder, die in drehenden Schwingungen sich öffnet und schliesst und mittelst der Hemmung in ähnlicher Weise in die Bewegung eingreift, wie das Pendel bei grössern Uhren (80).

2) Als Federwagen. Wo es weniger auf Genauigkeit als auf schnelle Wägung und Bequemlichkeit ankommt, wendet man vielfach Federwagen an. In der Wage mit Winkelfeder (Fig. 160 A) wirkt die Last P zur Näherung der beiden Schenkel a und b und man liest ihren Betrag auf einem eingetheilten Bogen mit verschiebbarem Index c. In derjenigen mit Schraubenfeder (Fig. 160 B) hängt die Last am Gehäuse a; der hervorragende an der Feder befestigte Stab b wird oben gehalten und trägt die Eintheilung.

3) Die Dynamometer dienen zur Messung grösserer Kräfte irgend einer Art. Dasjenige von Régnier, besonders zur Messung der Muskelkraft benutzt, besteht aus einer lang-elliptischen Feder A (Fig. 161), welche durch Näherung der Theile a a' auf einen kleinen Stab b und damit auf den Zeiger c verschiebend wirkt. Von den zwei auf der Platte B gezeichneten Eintheilungen ist die eine für kleinere Kräfte, (z. B. der Hände), die andere für grössere (Rücken und Schenkelkraft), welche man ziehend in d, d' wirken lässt, bestimmt.

4) Der dynamometrische Apparat von Perreaux lässt mittelst seiner starken Feder A (Fig. 162) die Stärke der zwischen den Schlitten a a' befestigten angebrachten Bänder, Seile, Drähte u. s. f. bestimmen. Wenn der Schlitten a' durch Kurbel und Schraube bewegt wird, spannt sich der Stoff B und zugleich die mit a zusammenhängende Feder bc, wodurch ein Zeiger d gedreht wird. Damit nun die plötzliche Rückwirkung der Elasticität im Moment wo der Stoff zerreisst, nicht eine nachtheilige Erschütterung auf Zeiger und Feder ausübe, ist die Einrichtung getroffen, dass die rückkehrende Feder ihre Arbeit an der Inertie eines kleinen massiven Schwungrades C erschöpft.

Man construirt die Eintheilung der Federwagen und Dynamometer durch Versuche mit bekannten Belastungen, weil die Aenderungen be-

deutend über die Grenzen der Proportionalität zur Kraft hinausgehen und man überhaupt der vollkommenen Regelmässigkeit der Wirkungen nie gewiss ist. Dennoch zeigen sie sich nach längerer Benutzung unrichtig, indem die Federkraft, oft und stark in Anspruch genommen, allmählig abnimmt.

202. Elasticität der Drehung. — Sie wird in einem Stabe hervorgerufen, wenn man ihn mit dem einen Ende a (Fig. 163) festhält und mit dem andern b durch eine Kraft P um seine Axe dreht. Jede Längslinie verwandelt sich hierbei in eine Schraubenlinie, indem jeder Querschnitt gegen den frühern um eine kleine Grösse gedreht wird, welche, wie leicht ersichtlich, durch die ganze Länge die gleiche bleibt.

Man denke sich der Einfachheit willen einen runden Stab von der Länge $a b = L$ und dem Radius R , und theile denselben in cylindrische Hüllen, deren eine den Radius ρ und die Dicke $\delta \rho$ habe. Zwischen zwei Querschnitten, die nach der Länge um δy absteigen, wird eine Kraft entwickelt, welche der Menge verschobener Querschnittstheile $2 \pi \rho \delta \rho$ und der kleinen Verschiebung $\rho \delta \varphi$ (194) proportional ist, aber um so kleiner, je grösser für ein gleiches $\rho \delta \varphi$, δy ist. Diese Kraft kann daher dargestellt werden durch

$$\frac{2 \pi}{\tau} \rho^2 \delta \rho \frac{\delta \varphi}{\delta y} = \frac{2 \pi}{\tau} \rho^2 \delta \rho \cdot \frac{\varphi}{L} \quad (1)$$

da die Verschiebungen der Querschnitte nach der ganzen Länge des Stabes gleich sind, also $\frac{\delta \varphi}{\delta y}$ durch $\frac{\varphi}{L}$ ersetzt werden kann. τ bezeichnet den von der Natur des Körpers abhängigen Coefficienten der Torsionselasticität, der mit dem der einfachen Ausdehnung zugehörenden Elasticitätscoefficienten ϵ nicht verwechselt werden darf.

Durch Multiplication mit ρ erhält man das Moment dieser Kraft. Und die Summe aller solchen Momente für den ganzen Querschnitt, d. h. von $\rho = 0$, bis $\rho = R$ (nach Formel II), muss dem Momente $P \cdot l$, der am Ende mittelst des Armes l zur Drehung einwirkenden Kraft gleich sein. Daraus die Bedingung

$$P \cdot l = \frac{\pi}{2 \tau} \cdot \frac{R^4}{L} \cdot \varphi, \text{ oder } \varphi = \frac{2 \tau}{\pi} \cdot \frac{l L}{R^4} \cdot P \quad (2)$$

Das Moment der Kraft P ist also 1) dem Drehungswinkel φ , 2) der vierten Potenz der Dicke $2 R$ direkt, 3) der Stablänge L verkehrt proportional und hängt endlich vom Coefficienten τ ab.

Will man φ in Graden angeben, so muss man dafür $\frac{\pi}{180} \cdot \varphi$ setzen.

Der Coeff. im Ausdrücke von $P l$ wird dann $\frac{\pi^2}{360} = 0,027416$.

Die Proportionalität von Kraft und Winkel bildet das Princip der von Coulomb zur Messung schwacher Kräfte benutzten Drehwage, von der später die Rede sein wird. Bei feinen Drähten bewährt sich dasselbe bis auf mehrere ganze Umdrehungen.

Cap. 2. Andere Fälle der Elasticität.

203. Seitenelasticität. — Genau betrachtet, sind die im Vorigen erklärten Erscheinungen der Elasticität nicht ganz so einfach als angenommen wurde, sondern stets von weniger auffallenden Aenderungen im Querschnitte begleitet. Das Gleichgewicht der kleinsten Theilchen kann unmöglich in einem Sinne eine Veränderung erfahren, ohne dass die Aenderung auch auf die Seitentheilchen zurückwirke. Wie man an einem Streifen von Gummi elasticum augenfällig erkennt, erleidet der Durchmesser durch Ausziehung eine Verkleinerung, durch Compression eine Vergrösserung; damit zugleich ändern sich Volumen und Dichte.

Bezeichnen L, R, V, D Länge, Radius, Volumen und Dichte eines Drahtes, λ, ρ, v, δ die gleichzeitigen Veränderungen der Einheit dieser Grössen (z. B. unter der Belastung $P = 1$), also $\lambda L, \rho R, v V, \delta D$ die ganzen Aenderungen, so bestehen zwischen diesen Grössen folgende Beziehungen:

$V \cdot D = V(1 + v) D(1 + \delta)$ und $\pi R^2 (1 + v) = \pi R^2 (1 + \rho)^2 L(1 + \lambda)$ (1) welche ausdrücken, dass die Masse die gleiche geblieben und das neue Volumen aus den neuen Dimensionen hervorgegangen ist.

Für sehr kleine Aenderungen, deren Produkte zu vernachlässigen sind, werden sie

$$\delta = -v \quad \text{und} \quad v = \lambda + 2\rho \quad (2)$$

Nun findet Poisson auf dem Wege der Theorie $v = \frac{1}{2} \lambda$, woraus folgt

$$\rho = -\frac{1}{4} \lambda, \quad \delta = -\frac{1}{2} \lambda \quad (3)$$

Das Verhältniss der Volumenvergrösserung und Dichtigkeitsverminderung wäre $\frac{1}{2}$, das der Dickenverminderung $\frac{1}{4}$ von demjenigen der Längenvergrösserung.

Versuche von Cagniard-Latour mit einem 2 Met. langen Stabe, der durch eine Wasserröhre ging und unten belastet wurde, liessen aus den Veränderungen des Wasserstandes die Volumenänderung, wie es schien der obigen Regel gemäss, bestimmen. Allein die genauern Versuche von Wertheim führen auf ein anderes Resultat. Die Messung der Dicke gezogener Stäbe von Gummi elasticum mittelst eines Fühlhebels führten auf gleiche Weise, wie die Bestimmung des innern Volumens gezogener Messing- und Glasröhren, dessen Aenderungen man an dem Wasserstande einer feinen Capillarröhre beobachtete, — auf das abweichende Verhältniss $v = \frac{1}{3} \lambda$, welches gibt

$$\rho = -\frac{1}{3} \lambda \quad \text{und} \quad \delta = -\frac{1}{3} \lambda$$

Durchmesser, Volumen und Dichte würden sich hiernach im gleichen Verhältnisse ändern, in einem 3 mal kleinern als die Länge.

Uebrigens ist nicht entschieden, was jedoch die Wertheim'schen

Versuche wahrscheinlich machen, dass ein für alle Substanzen ganz gleiches Aenderungsverhältniss besteht.

Lamé findet durch eine sehr umfassende Theorie, dass das Verhältniss von ν und λ von zwei andern Constanten α , β abhängt, über deren Verhältniss bei verschiedenen Substanzen man à priori nichts weiss. Man hätte dann:

$$\lambda = \frac{\alpha + \beta}{\beta(3\alpha + 2\beta)}, \quad \rho = -\frac{\alpha}{2\beta(3\alpha + 2\beta)}, \quad \nu = -\frac{1}{3\alpha + 2\beta}$$

 λ wäre zugleich der früher durch ε bezeichnete Elasticitätscoefficient; während der Torsionscoefficient τ (202) den Werth $\frac{1}{\beta}$ hätte.

204. Flächenelasticität. — Die Elasticität dünner Flächen kann auch wieder durch Zug nach ihrer Ebene, durch Biegung senkrecht zu derselben, endlich durch Drehung um einen Punkt desselben entwickelt werden; es fehlt aber an genauen Messungen darüber. Nichtsdestoweniger wird die Flächenelasticität zu verschiedenen Instrumenten benutzt.

1) Das Aneroidbarometer besteht aus einer oder mehreren flachen, geschlossenen Metallbüchsen Λ (Fig. 164) mit dünnen elastischen Ober- und Unterflächen a , a' . Der innere Raum ist verdünnt, daher biegen sich die elastischen Flächen unter dem Luftdrucke um eine Grösse einwärts, welche diesem Drucke nahe proportional ist. Die kleinen Aenderungen, welche die Aenderungen des Luftdruckes bewirken, werden durch Uebersetzungen auf einen Zeiger b übergetragen und auf einer Eintheilung abgelesen. Der Umstand, dass man von einer sehr kleinen Grösse auf eine grössere zurückschliesst, dass Reibungen entgegenwirken, dass endlich die Temperatur einen grossen Einfluss ausübt, stehen der Genauigkeit des sonst bequemen Instrumentes entgegen.

2) Die Manometer von Bourdon. — Eine 1 Centim. weite Röhre aus ganz dünnem Kupferblech ist zuerst platt gedrückt, dann zu einem Ringe gebogen, $a b$ (Fig. 165). Das eine feste Ende a wird mit dem Dampfkessel oder dem Gasbehälter mit comprimierter Luft in Verbindung gesetzt; während das andere geschlossene b frei ist. Der innere Druck wirkt nun um die Krümmung des Bogens zu öffnen und diese Aenderung, vergrössert auf einen Zeiger c , der um d sich dreht, übergetragen, dient zur Messung des Druckes. Die Graduation wird auch hier durch directe Vergleichung mit einem Luftmanometer (156) empirisch gebildet.

205. Massenelasticität. — In keinem Falle äussert sich die Elasticität auf einfachere Weise als bei einem von allen Seiten gleichgedrückten (oder gezogenen) homogenen Körper, bei einem solchen z. B., der von allen Seiten dem Drucke einer Flüssigkeit ausgesetzt ist (104). Während an gezogenen Stäben die Veränderung sich nach verschiedener Richtung ungleich äussert (203), erfahren unter allseitig gleichem Druck alle Dimensionen des Körpers verhältnissmässig eine gleiche Aenderung, so dass die neue Gestalt, obwohl kleiner, der ursprünglichen ähnlich bleibt.

— Bezeichnet man mit σ S und ν V die Aenderung eines Durchmessers S und des Volumens V unter dem Druck $P = 1$ Kil. auf jede Quadrat-einheit (1 Qu.Millim.) der Oberfläche, so hat man

$$\nu = 3 \sigma \quad (1)$$

σ ist der Coeffic. der Längenänderung, den man gewöhnlich gleich dem halben Coeffic. der Elasticität annimmt oder $\sigma = \frac{\epsilon}{2}$. Die Theorie von Lamé führt indess auf die wahrscheinlich richtigern Werthe.

$$\sigma = -\frac{1}{3\alpha + 2\beta}, \quad \nu = -\frac{3}{3\alpha + 2\beta} \quad (2)$$

wo α, β die in (203) erwähnten Constanten sind, mit denen alle elastischen Erscheinungen zusammenhängen. Bis jetzt fehlt es an entscheidenden Versuchen zur Bestätigung dieser Beziehungen und der in (203) gegebenen.

206. Elasticität beim Stoss. — Beim Stoss der Körper, d. h. bei den Bewegungsänderungen, welche aus dem plötzlichen Zusammen-treffen bewegter Körper hervorgehen, spielt die Elasticität eine so wichtige Rolle, dass wir die ganze Erscheinung auf den gegenwärtigen Abschnitt verschoben haben.

Wir denken uns den einfachsten Fall zweier Kugeln, deren Massen M, m (Fig. 166) sind und die sich auf einer gleichen Linie im gleichen Sinne mit den verschiedenen Geschwindigkeiten U, u fortbewegen, so indess, dass die erste Kugel, weil $U > u$, die zweite erreicht und stösst. Man fragt nun, wie die Bewegungen 1) bei ganz unelastischen, 2) bei vollkommen und 3) endlich bei theilweise elastischen Kugeln verändert werden.

1) Seien die Kugeln ganz unelastisch. So wie die Berührung von M beginnt, wirkt sie durch Druck auf m , es entsteht eine Abplattung und gleichzeitig geht ein Theil der Bewegungsmenge der stossenden auf die gestossene Kugel über. Dadurch nähern sich die ungleichen Geschwindigkeiten U und u und der Stoss ist vollendet, wenn beide auf einen gleichen Werth v gelangt sind, denn jetzt bewegen sich die abgeplattet bleibenden Kugeln ohne weiteren Druck hinter einander fort.

Da die abgegebene der gewonnenen Bewegungsmenge gleich sein muss, so erhält man

$$m(v - u) = M(U - v) \text{ woraus } v = \frac{M U + m u}{M + m} \quad (1)$$

Die Endgeschwindigkeit ganz unelastischer Kugeln ist für beide gleich und gleich der Summe der Bewegungsmengen, dividirt durch die Summe der Massen.

2) Sind die Kugeln elastisch, so folgt auf die erste Periode des Stosses, in der die Abplattung entsteht, eine zweite, in welcher die Elasticität, von der Abplattungsfläche nach beiden Seiten wirkend, der stossenden Kugel einen neuen Antheil Bewegung raubt, der gestossenen einen gleichen mittheilt. Während der ersten Zeit des Stosses wurden die Geschwindigkeiten $U - v$ und $v - u$ verloren und gewonnen, wäh-

rend der zweiten sei die neue Veränderung im gleichen Sinn $k(U - v)$ und $k(v - u)$, wo k ein von der Natur der Elasticität des Körpers abhängiger Bruch sein wird. Die Anfangsgeschwindigkeit wird im Ganzen sich umgewandelt haben in

$$\begin{aligned} U' &= U - (1 + k)(U - v) = (1 + k)v - kU \\ u' &= u + (1 + k)(v - u) = (1 + k)v - ku \end{aligned} \quad (2)$$

Diese Ausdrücke umfassen den Fall der unelastischen Kugeln, wenn $k = 0$ gesetzt wird, was

$$U' = u' = v \quad (3)$$

gibt. Aber auch denjenigen der vollkommen elastischen, wenn $k = 1$ angenommen wird, oder die zweite Periode gleiche Geschwindigkeiten wie die erste in Anspruch nimmt. Dann ist

$$U' = 2v - U, \quad u' = 2v - u \quad (4)$$

Das Merkmal unelastischer Körper ist nach dem Stoss vereinigt zu bleiben; dasjenige elastischer, sich nach dem Stosse zu trennen, und zwar mit um so verschiedenartigeren Geschwindigkeiten, als die Elasticität vollkommener ist.

207. Einzelne Fälle. — 1) Sind die Kugeln gleich gross, $M = m$, so hat man

$$v = \frac{U + u}{2} \text{ ferner } U' = u, \quad u' = U \quad (1)$$

Die Endgeschwindigkeit unelastischer Kugeln ist der halben Summe oder Differenz der anfänglichen Geschwindigkeiten gleich, je nachdem die Kugeln gleich oder entgegengesetzt gehen. Ganz elastische Kugeln hingegen wechseln nach Grösse und Richtung ihre ursprünglichen Geschwindigkeiten aus.

2) Ist die eine Kugel, z. B. die gestossene, sehr gross gegen die stossende, m gross neben M , so erhält man genähert

$$v = u, \text{ und } U' = 2u - U, \quad u' = u \quad (2)$$

Die Gestossene ändert ihre Geschwindigkeit nicht, die Stossende springt mit einer relativen Geschwindigkeit $U - u$ zurück.

3) Ist allgemein die gestossene Kugel ruhend, also $u = 0$, so folgt daraus

$$v = \frac{M}{M + m} \cdot U, \text{ und } U' = \frac{M - m}{M + m} \cdot U, \quad u' = \frac{2M}{M + m} \cdot U \quad (3)$$

Die Endgeschwindigkeiten haben ein bestimmtes nur von den Massen abhängiges Verhältniss, und verhalten sich wie die Differenz beider Massen und die doppelte stossende Masse zur Summe der Massen. — Wäre überdiess m sehr gross, so hätte man

$$U' = -U$$

Die kleine Kugel springt von der ruhenden sehr grossen oder von einer elastischen Platte, mit der anfänglichen Geschwindigkeit zurück.

4) Folgen sich eine Reihe gleicher Kugeln, n an Zahl, und trifft die erste mit der Geschwindigkeit U , die übrigen $n - 1$, so entsteht bei Mangel an aller Elasticität, eine gemeinsame Geschwindigkeit

$$u' = \frac{1}{n} \cdot U$$

Ist hingegen die Elasticität vollkommen, so wandert der Stoss, freilich in unmessbarer Zeit, von einer Kugel zur andern, indem jede frühere Kugel zur Ruhe gelangt und die folgende die Bewegung gewinnt, bis die letzte allein mit der Geschwindigkeit der ersten abspringt.

$$u' = U$$

Zwei Kugeln stossend, machen zwei abspringen, drei hinwieder drei, überhaupt immer eine gleiche Zahl, weil, genau genommen, eine gleiche Zahl Stösse auf einander folgen.

Wachsen die Kugeln und stösst die kleinste, so vermindert sich die Geschwindigkeit bis zur letzten, alle springen zurück und gehen zugleich aus einander. Nehmen die Massen ab und stösst die grösste, so wächst die Geschwindigkeit und alle gehen, sich vorwärts bewegend, aus einander.

208. Der schiefe Stoss. — Der Druck eines Körpers auf einen andern folgt, abgesehen von der Reibung, immer der Normale, oder der Senkrechten zu der Berührungs-, beim Stoss zu der Abplattungsebene. Kugeln, die sich auf der Linie ihrer Mittelpunkte bewegen, wirken daher mit ihrer ganzen Menge Bewegung beim Stosse ein. Anders verhält es sich beim schiefen Stoss (Fig. 167), wenn nämlich die Richtungen der ursprünglichen Bewegungen mit der Normale einen Winkel bilden. Von der gleichen Seite an gemessen, seien Φ, φ die Winkel der ursprünglichen Bewegungen der Massen M, m mit der Normale. Zum Stosse werden einzig die Geschwindigkeiten $U \cos \Phi$ und $u \cos \varphi$ beitragen; wogegen die Tangentialbewegungen $U \sin \Phi, u \sin \varphi$ eine blosse Verschiebung längs der Abplattungsfläche bewirken.

Man erhält also

$$v = \frac{MU \cos \Phi + mu \cos \varphi}{M + m} \quad (1)$$

Die Endgeschwindigkeiten werden sich zusammensetzen aus normalen U', u' und tangentialen U'', u'' , welche sind

$$\begin{aligned} U' &= (1 + k)v - kU \cos \Phi & U'' &= U \sin \Phi \\ u' &= (1 + k)v - ku \cos \varphi & u'' &= u \sin \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

Heben wir zwei einzelne Fälle hervor, beide bei ganz elastischen Kugeln, für welche $k = 1$

1) Wenn $m = M$ und zugleich $u = 0$, so erhält man

$$v = \frac{1}{2} U \cos \Phi \quad \left\{ \begin{array}{l} U' = 0, \quad U'' = U \sin \Phi \\ u' = U \cos \Phi, \quad u'' = 0 \end{array} \right. \quad (3)$$

Die gleichen Kugeln, welches ihre Richtungen sein mögen, springen rechtwinklicht aus einander, die stossende parallel, die gestossene senkrecht zur Abplattungsfläche. Nach diesem Gesetze berechnet man die Wirkung des Stosses beim Billardspiel.

2) Wäre m sehr gross gegen M , der Fall einer elastischen ebenen Fläche, zugleich wieder $u = 0$, so folgt

$$v = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} U' = -U \cos \Phi, \quad U'' = U \sin \Phi \\ u' = 0 \quad \quad \quad u'' = 0 \end{array} \right.$$

Die stossende Kugel springt von der ebenen Fläche mit gleicher Geschwindigkeit und unter dem gleichen Winkel zurück.

Man prüft diess letztere Gesetz genähert mittelst einer kleinen verticalen Marmorwand a (Fig. 168), gegen welche eine rollende Elfenbeinkugel b aus einem kleinen Laufe c mittelst einer Schraubenfeder getrieben wird. Der Lauf lässt sich auf den Radien eines getheilten Kreises, dessen Centrum dem Centrum der Kugel im Augenblicke des Contactes nahe entspricht, versetzen und man beobachtet jedesmal die Richtung der Zurückwerfung b d.

209. Der wirkliche Stoss. — Die Gesetze des Stosses unelastischer Körper bestätigen sich ziemlich gut mit Kugeln von weichem Thon, weniger gut mit solchen von Blei, bei denen die Trennung beim Stoss das Dasein einiger Elasticität beweist; diejenigen ganz elastischen Körper mit Kugeln von Elfenbein, Marmor, am besten mit solchen von Stahl.

Die Ursachen, welche Abweichungen von den einfachen Gesetzen bewirken, sind die folgenden:

1) Die unvollkommene Elasticität, deren Einfluss mit dem Coefficienten k zusammenhängt, dessen Werth nothwendig zwischen 0 und 1 liegt. Es fehlt bisher gänzlich an experimentalen Bestimmungen desselben.

2) Die Gestalt des Körpers. — Wie gesagt wirkt der Stoss nach der Richtung der Normalen zur Abplattungsfläche. Geht die Normale durch den Schwerpunkt, wie z. B. bei Kugeln, der centrale Stoss, so entsteht eine einfache Translationsbewegung; geht sie neben demselben vorbei, der excentrische Stoss, so tritt der allgemeinere Fall einer aus Translation und Rotation zusammengesetzten Bewegung ein, von dem (89) die Rede war.

3) Die Reibung. Beim schiefen Stoss haben die Kugeln Bewegung längs der Abplattungsfläche (208), daher entwickelt sich eine Reibung, welche ganz unabhängig von der Excentricität des Stosses, den Körpern eine Rotation, und zwar beiden im entgegengesetzten Sinn verleihen kann.

4) Die Grösse des Körpers. Der Stoss ergreift im ersten Moment nur die getroffenen Theilchen der Oberfläche, allein diese wirken sofort auf die nächsten und so auf die ganze Masse. Wenn diese Mittheilung auch für unsere Beobachtung unmessbar schnell vor sich geht, so bedarf sie, streng genommen, doch einer gewissen Zeit. Ist der Körper etwas gross, so haben die nähern und entferntern Theilchen verschiedene Bewegungen und ein Theil des Stosses, statt den Körper als Ganzes zu bewegen, äussert sich in innern Spannungen und Verdichtungen, mit einem Worte in Erschütterungen.

Stösse im Gange der Maschinen sind nicht nur nachtheilig, weil sie jede genaue Kraftwirkung hindern und die Theile oberflächlich abnutzen, sondern weil ein Theil der Kraft für die nützlichen Zwecke verloren geht und durch Erschütterungen das innere Gefüge lockert.

Cap. 3. Die Ductilität.

210. Die Ductilität im Allgemeinen. — Wenn ein Körper durch äussere Kräfte bleibend verändert wird, so sind seine Theilchen, theilweise wenigstens, über die Grenze ihrer Stabilität hinaus in neue, wiederum mehr oder weniger stabile Stellungen gedrängt worden. Es besteht die Veränderung aus einem bleibenden und einem vorübergehenden Antheil, der zur Elasticität der neuen Gestalt gehört. Dauert die Kraft fort, so gelangt entweder der Körper zu einem neuen Gleichgewichte der Theilchen mit grösserem elastischem Widerstande, oder die Veränderung schreitet fort bis zum Bruch.

Der Spielraum der Ductilität oder Geschmeidigkeit, zwischen der Grenze der anscheinend vollkommenen Elasticität (194) und dem Bruch, erweist sich bei verschiedenen Körpern höchst verschieden. Bei plastischen Körpern, beim Thon, beim Blei, beim weichen Eisen sehr gross, verschwindet er nahe ganz bei den spröden Körpern wie Glas und harter Stahl. Gewöhnlich sind die weichen Körper ductil, die harten spröde; doch sind diese Eigenschaften nicht nothwendig verbunden.

Da man nicht weiss, wie die Theilchen im Innern eines Körpers sich umstellen, so kennt man auch die Gesetze der Ductilität nicht und muss sich auf eine Reihe unvollkommen verbundener Thatsachen beschränken. Das Verhalten des einen Körpers weicht bedeutend von dem des andern ab; selbst der gleiche Körper verhält sich wesentlich verschieden je nach der Behandlung. In letzter Beziehung unterscheidet man drei Hauptarten der Umgestaltung: 1) das Hämmern — starker Druck in Einer Richtung, der die Theilchen in dieser Richtung direkt, in radialer mittelbar zusammendrängt, peripherisch aber sie dehnt; 2) das Walzen — Druck in einer Richtung auf einer Linie, Zug in senkrechter Richtung; 3) das Ziehen zu Draht, — Druck rings herum, Dehnung in einem Sinne.

Nach der Leichtigkeit oder Vollkommenheit ihrer Umgestaltung ordnen sich die Metalle nach Prechtl ungefähr wie folgt.

Hämmern:

Blei
Zinn
Gold
Zink
Silber
Kupfer
Platin
Eisen

Walzen:

Gold
Silber
Kupfer
Zinn
Blei
Zink
Platin
Eisen

Ziehen:

Platin
Silber
Eisen
Kupfer
Gold
Zink
Zinn
Blei

Beispiele starker Ausbreitung: Rollblei, Staniol (Zinn), Rauschgold (Messing), der ächte und unächte Gold- und Silberschaum (Zinn, Zink). — Feine Eisen,

Kupfer, Platindrähte. — Gold als Goldschaum hat eine Dicke von $\frac{1}{3800}$ Millim.

als Vergoldung von $\frac{1}{11300}$ Millim. — Platin als Faden von $\frac{1}{20000}$ Millim.

211. Ductilität des Zuges. — Die Behandlung im Drahtzug ändert die Dichtigkeit des Metalles, doch nicht bei allen Metallen im gleichen

Sinn. Je nachdem die Wirkung des Zuges oder des Seitendruckes vorherrscht, erscheint das Metall weniger dicht oder dichter. Anlassen oder Erhitzen des veränderten Drahtes führt die Dichtigkeit bei manchen Metallen wieder auf diejenige vor der Behandlung zurück.

So fand Wertheim

	gegossen	gehämmert und gezogen	gezogen und angelassen
Blei	11,215	11,169	11,232
Zinn	7,285	7,313	7,290
Silber	10,366	10,369	10,304
Gold	19,407	18,514	18,035
Palladium	—	11,359	11,225
Platin	—	21,166	20,753
Kupfer	8,729	8,933	8,936
Eisen (Berry)	—	7,748	7,757
Gussstahl	—	7,717	7,719

Werden Drähte und Stäbe mit wachsenden Belastungen angezogen, so entsteht, wie gesagt, eine bleibende und eine vorübergehende Aenderung. Die gemessene Veränderung, während die Last wirkt, ist die Summe beider, diejenige nach ihrer Wegnahme ist die bleibende. Stellt man die wachsenden Lasten P (Fig. 169) als horizontale Abscissen, die entstehenden ganzen und hinwieder die bleibenden Aenderungen (Verhältniss der Verlängerung zur Länge) als Ordinaten, so erhält man zwei Curven Oab und $Oa'b'$, die Ordinaten der letztern bezeichnen den Antheil der Ductilität, die Ordinatendifferenzen denjenigen der Elasticität. Nach den Wertheim'schen Versuchen und den umfassenden von Hodgkinson mit Eisenstäben, laufen anfangs beide Curven gerade fort, wobei die bleibenden Aenderungen äusserst klein bleiben; dann aber tritt für beide eine erhebliche Biegung ein und sie nähern sich zwei andern, stärker ansteigenden langsam convergirenden Graden, bis die Nähe des Bruches sich durch eine neue Biegung der Curve der bleibenden Aenderung nach der Verticalen und durch ein Zusammenreffen mit der andern ankündigt. Zwischen den Punkten O und A waltet die Elasticität, zwischen A und B die Ductilität vor.

Beim Eisen z. B., bei einem Stabe von 1 Quadr. Millim. Querschnitt Länge, entspricht A nach Hodgkinson ungefähr 15 kil.; die bleibende Aenderung steigt nicht auf mehr als 0,00001. Von 18,74 kil. an beginnt die zweite Stufe der Aenderungen und erstreckt sich bis zur zweiten Biegung, die mit $OB = 35,61$ kil. und einer Aenderung von 0,03282 Millim. eintritt.

Ueber den Spielraum der Ductilität nach unten und oben gibt Wertheim folgende Zahlen: P ist das Gewicht in Kil., das an einem Stab von 1 Quadr. Millim. eine bleibende Verlängerung von 0,00005 erzeugt, welche Grösse, allerdings willkürlich, als Grenze der Elasticität betrachtet wird; λ hinwieder bezeichnet die grösste Verlängerung, welche dem Bruche vorausgeht:

	gezogen		angelassen.	
	P	λ	P	λ
Blei	0,25	0,000243	0,20	0,000614
Zinn	0,45	430	0,20	430
Gold	13,5	0008	3,00	046

	gezogen		angelassen	
	P k	λ	P	λ
Silber	11,25	0,0000045	2,55	0,000168
Zink	0,75	505	1,00	270
Palladium	18,0	0002	< 5,0	205
Kupfer	12,0	003	< 3,0	220
Platin	26,0	0009	< 14,5	0023
Eisen	32,5	026	< 5	109
Gussstahl	55,60	003	< 5	011
Stahl Draht	43,75	0006	15	0044

Die Vergleichung der beiden Zahlreihen beweist, welcher bedeutenden Einfluss alle Umstände ausüben, welche die innere Struktur des Metalles verändern. Uebrigens stellt sich der neue Gleichgewichtszustand, zumal bei weichen Metallen für starke Belastungen, nicht sogleich als ein stabiler ein, sondern es können langsame Aenderungen eintreten, die erst nach längerer Zeit zum Bruche führen.

212. Einfluss der Wärme. — Durch Wärme entfernen sich die Theilchen von einander, die das Gleichgewicht bestimmenden Kräfte werden kleiner und der Körper verhält sich als weicher und geschmeidiger. Bekannt sind diese Veränderungen, zum Theil vielleicht eine Folge der zusammengesetzten Natur der Substanzen, bei manchen Stoffen organischen Ursprungs, wie Harz, Pech, Wachs, Siegelack. In diesem Uebergangszustande zur Schmelzung befindet sich das Glas, wenn es geblasen und geformt wird.

Die wichtigsten Metalle: Platin, Gold, Silber, Kupfer, Zinn, Blei, Eisen lassen sich kalt und warm bearbeiten, doch macht die Wärme sie weicher und geschmeidiger, was vornehmlich für die Bearbeitung des Eisens zu Statten kömmt. Arsenik, Antimon, Wismuth sind immer so wenig ductil, dass man sie zerstoßen und zerreiben kann. Zink, kalt springend, lässt sich bei 150° bedeutend leicht walzen und behält auch nachher von dieser Fähigkeit; über 200° verliert sich diese Eigenschaft. Zugleich mit der Geschmeidigkeit bewirkt die Erwärmung oft eine Schwächung des Metalls, durch welche der Vortheil jener aufgewogen wird. So beim Kupfer und manchen Messingsorten.

213. Das Härten der Metalle. — Härte und Sprödigkeit theilt man den Metallen schon durch die Bearbeitung, namentlich durch den Drahtzug, mit, was vermuthlich mit einer Zusammendrängung der Theile zusammenhängt. Bei Eisen, Kupfer, Stahl u. s. f. ist der von der Bearbeitung herrührende Unterschied zwischen dem frischen und ausgeglühten Metalle sehr erheblich.

Eine andere Art der Härtung wird durch das Erhitzen und plötzliche Abkühlen, z. B. durch Eintauchen in kaltes Wasser, Oel, Quecksilber hervorgebracht; während umgekehrt ein langsames Erkalten Erweichung zur Folge hat. Doch sind verschiedene Metalle in dieser Beziehung sehr ungleich empfänglich. Die Veränderungen des Kupfers, durch den Drahtzug bedeutend, sind beim Abkühlen sehr gering; ge-

wisse Messingsorten, zu welchen das Tamtam der Chinesen gehört, erweisen sich sogar bei schnellem Abkühlen ductiler als bei langsamem.

Auf kein Metall übt das Härten durch Abkühlen einen grössern Einfluss aus als auf den Stahl, keines ist so verschiedener Härtingsgrade, vom Weichen bis zum Glashärten, fähig und eignet sich daher so vorzüglich zu den mannigfachsten Werkzeugen. Der durch Abkühlen aus der Glühhitze glashart gewordene Stahl kann durch stärkeres oder schwächeres Wiedererwärmen und langsames Erkalten, durch Anlassen, wieder mehr oder weniger erweicht werden. Hierbei beurtheilt man den Hitzgrad nach den Oxydationsfarben des Anlaufens, welche sich durch steigende Hitze in der Ordnung: gelb, roth, grün, blau, schwarzblau, Wassergrau entwickeln; die erste Farbe entspricht der geringsten, die letzte der grössten Erweichung. Werkzeuge zur Bearbeitung verschiedener Körper erhalten ungefähr folgende Farben

Glas, harter Stahl	grau
Weicher Stahl, Eisen	gelb
Kupfer, Messing, Erz	roth
Zinn, Blei, harte Hölzer	grün
Weiche Hölzer	blau
Uhrfedern	schwarz

Durch den Gebrauch erweichen sich die Instrumente, in Folge der aus der Reibung entstehenden Erwärmung, daher Grabstichel, Uhrmacherwerkzeuge immer wieder gehärtet werden müssen. Uebrigens bleibt die Beurtheilung der Erweichung nach dem Anlassen sehr unsicher, da andauernde schwache Hitze die gleiche Färbung bewirkt, wie kurzdauernde starke.

214. Erklärung der Härtung. — Die auffallenden Gegensätze in der Härte und Sprödigkeit des Stahles stehen mit ungewöhnlichen Veränderungen in dem Gleichgewichte der Theilchen in Verbindung. An den gewaltsamen Verkrümmungen und Zerreissungen, welche lange oder nicht homogene Stäbe beim Härten erleiden, erkennt man das Dasein gewaltsamer Spannungen im Innern. Durch Abkühlen des erhitzten Stückes wird nämlich die Oberfläche kalt und fest, während das Innere noch heiss und ausgedehnt ist; erkaltet nachher der Kern, so findet er in der als Gewölbe widerstehenden Hülle ein Hinderniss gegen die natürliche Zusammenziehung. So gelangen die äussern Theilchen in einen Zustand gewaltsamer Pressung, die inneren gewaltsamer Spannung, der als Sprödigkeit sich offenbart. In Uebereinstimmung damit findet man das Volumen des Stahlstückes nach der Härtung in der Regel vergrössert, die Hülle dichter und härter, den Kern leichter und weicher. Das Verhältniss der dichten Hülle zum lockerern Kerne ändert mit der Grösse der Stücke, der Natur des Stahles und der Art des Härtens. Stahlsorten von geringer Volumensänderung sind vorzüglich wichtig, wenn es sich, wie bei Prägestempeln, um genaue Erhaltung der mitgetheilten Form handelt.

Dieselbe Erklärung passt auf die Sprödigkeit des Glases. Ohne eigentliche Ductilität zu haben, verräth dasselbe gegen kleine Stösse, gegen Tonschütterungen, gegen locale Erhitzung sehr verschiedene

Stufen der Sprödigkeit. Schnell gekühlt (Batavische Tropfen, Bologneserfläschchen) äusserst spröde, wird es durch langsames Abkühlen, wodurch sich alle Theile gehörig stellen können, fähig, bedeutende Erschütterungen und Temperaturunterschiede auszuhalten.

215. Andere Umstände. — Mit Unterschieden des innern Gefüges hängen stets auch Aenderungen der Ductilität zusammen: ein stark krystallinisch körniger Bruch deutet auf Sprödigkeit, ein matter und faseriger auf Ductilität. So zeigt sich das feinkörnige Eisen meist geschmeidiger als das grobkörnige, am zähesten und geschmeidigsten das durch die Bearbeitung fadig gewordene Stabeisen. Die ganz spröden Metalle, Wismuth, Antimon u. s. f. sind zugleich ausgezeichnet krystallinische; während die ganz amorphen, Kalium und Natrium, bedeutend ductil sind.

Den grössten Einfluss auf das Korn und die Ductilität haben chemische Beimengungen. Manche Legirungen aus ductilen Metallen verhalten sich als spröde; so manche Messingsorten, Glocken und Kanonenmetall (Kupfer und Zinn), Spiegelmetall (Kupfer, Zink und Nickel). Gold legirt man mit Kupfer oder Silber, um ihm Härte zu geben. Ueberhaupt erweist sich das Gold als höchst empfindlich für geringe Beimengungen, $\frac{1}{900}$ Arsenik, $\frac{1}{1900}$ Wismuth oder Blei hindern das gute Ausschlagen zu Schaum. Gewisse Messingsorten aus Zink und Kupfer büssen durch $\frac{1}{2000}$ Eisen merklich von ihrer Geschmeidigkeit ein.

Die zahlreichen Abweichungen in den Eigenschaften verschiedener Eisensorten haben grossentheils ihren Grund in absichtlichen oder zufälligen Beimengungen. 1 bis 2 % Kohle machen das Eisen zu gewöhnlichem Stahl, 2 bis 3 zu brüchigem Stahl, 4 bis 5 zu weissem hartem, 7 bis 9 zu schwarzem brüchigem Roheisen. Mangan, Kiesel, Silber, Platin in kleinen Mengen geben gleichfalls dem Eisen stahlartige Eigenschaften. Die Fehler des Rothbruches und Kaltbruches, d. h. die Untauglichkeit zum Schmieden in der Hitze und Kälte, rühren von einem Gehalt an Schwefel und Phosphor her, von den Gesteinen entlehnt, welche die Erze begleiteten.

Cap. 4. Cohäsion oder Festigkeit.

216. Vorbemerkungen. — Wenn durch die Einwirkung zu starker äusserer Kräfte die Theilchen an einzelnen Stellen auf Entfernungen gelangen, wo die Cohäsionskräfte nicht mehr genügen, so trennt sich der Körper, wobei sich die auseinandergehenden Theile entweder von einander weg oder an einander hin bewegen. Die grösste Kraft, welcher der Körper noch widersteht, oder die kleinste, unter deren Einwirkung er bricht, bezeichnet die Stärke, Festigkeit oder Cohäsion desselben. Man kennt auch diese Vorgänge, denen meist bedeutende Deformationen vorausgehen, nur wenig und hält sich bei den mannigfachen Benutzungen der Festigkeit an Versuche, welche unter ähnlichen

Umständen wie bei den Anwendungen und mit ähnlichen, meist wenig homogenen Stoffen angestellt wurden. Die Coefficienten der verschiedenen Arten der Festigkeit haben sich bisher auch nicht, wie diejenigen der Elasticität auf einander zurückführen lassen. Man unterscheidet vorzüglich 5 Arten der Festigkeit:

- 1) gegen Zerreißen — absolute Festigkeit;
- 2) gegen Zerdrücken — rückwirkende Festigkeit;
- 3) gegen Bruch durch Biegen — relative Festigkeit;
- 4) gegen Zerdrehung — Festigkeit der Torsion.

Wenige der bisherigen Bestimmungen können auf wissenschaftlichen Werth Anspruch machen; in den Anwendungen bedarf man indess weniger der genauen Grössen als der äussersten Werthe, deren die benutzten Stoffe etwa fähig sind.

217. Absolute Festigkeit. — Die Festigkeit gegen Zug wurde einfach geprüft, indem man oben gehaltene Stäbe allmählig bis zum Zerreißen belastete. Da alle Theilchen der Länge, abgesehen von dem Gewichte des Stabes selbst, gleich ausgezogen werden, so ist der Bruch von der Länge unabhängig und wird einzig durch zufällige Ungleichheiten und die zufällige Schwäche einzelner Stellen bestimmt. Obgleich meist dem Bruche an der Bruchstelle eine starke Verdünnung vorausgeht, zeigt sich doch die Festigkeit so ziemlich dem Querschnitte proportional und man hat

$$P = \alpha A.$$

wo der Coeffic. der Festigkeit α das auf die Quadrateinheit des Querschnittes (1 Quadr. Millim.) kommende Gewicht in Kil. darstellt.

218. Versuche mit Metallen. — Die folgende Tabelle gibt nach Frankenheim die grössten und kleinsten Werthe von α , welche aus den sehr zahlreichen Messungen für die gewöhnlichen Metalle abgeleitet wurden.

	Max.	Min.		Max.	Min.
Blei	2,012	1,674	Platin	41,544	22,529
Zinn	4,309	2,584	Kupfer	53,252	16,380
Gusseisen	13,021	—	Stabeisen (weich)	85,879	31,520
Zink	16,328	—	Eisendraht	131,092	34,310
Gold	36,376	14,230	Stahldraht	121,429	61,283
Silber	41,544	18,044	Stabeisen (hart)	128,663	68,104

Für reine Metalle erhielt Wertheim, im gegossenen, gezogenen und angelassenen Zustande und für langsame oder schnelle Belastung, folgende Werthe von α .

	gegossen		gezogen		angelassen	
	langs.	plötzl.	langs.	plötzl.	langs.	plötzl.
Blei	1,25	2,21	2,07	2,36	1,80	2,04
Zinn	3,40	4,16	2,45	2,97	1,70	3,60
Zink	—	—	12,80	15,77	—	14,40
Gold	—	—	27,00	27,50	10,08	11,05
Silber	—	—	29,00	29,60	16,02	16,40
Platin	—	—	34,10	35,00	23,50	26,75
Kupfer	—	—	40,30	41,00	30,54	31,62
Eisen	—	—	61,10	63,80	46,88	50,25
Gussstahl	—	—	—	83,80	65,70	—
Stahldraht	—	—	70,00	92,50	40,00	53,90

Es folgt hieraus: 1) Die Festigkeit verschiedener Metalle steht in keiner einfachen Beziehung zur Dichte. Zinn und Eisen z. B. haben die Dichten 7,313 und 7,748, dagegen die Festigkeiten 2,45 und 61,10.

2) Die Festigkeit des gleichen Metalles wächst durch die Bearbeitung. Die Metalle sind in der Regel gegossen am schwächsten (und sprödesten), gehämmert und gewalzt oft zweimal stärker, am stärksten gezogen. Eisen erscheint um so zäher und stärker, je mehr das krystallinische Korn neben dem fadigen Bruch zurücktritt.

Nach Soufflot hätte man

Grobes Korn	17,961
Mittlers »	23,676
Feines »	35,023
Halbfadig	62,275
Starkfadig	90,013

Oft liegt ein grosser Theil der Festigkeit an einer Appretur der Oberfläche, wie namentlich bei gezogenen weichen Metallen, bei Bleiröhren etc.

3) Anlassen vermindert die Festigkeit, durch Aufhebung der Verdichtungen und der Appretur; das Metall wird ductiler, dehnt sich mehr aus, aber reisst unter kleinerer Kraft. Drähte, besonders dünne, verlieren bis auf $\frac{1}{3}$ und mehr von ihrer Stärke.

4) Gegen kurzdauernde Belastung ist der Widerstand grösser als gegen langdauernde; es beginnen nämlich anfangs kaum merkbare, aber wachsende Aenderungen (211), die, oft nach Tagen oder Wochen erst, mit dem Bruche enden.

Aus den zahlreichen Wertheim'schen Versuchen mit Legirungen mögen die folgenden genügen.

Darcet's Met. ($\text{Pb}_2 \text{Bi}_3 \text{Sn}_2$)	1,74	Similor (Zc Cu_5)	51,90
Letternmet. ($\text{Pb}_2 \text{Sb}$)	1,87	Messing (Zc Cu_2)	60,22
Schnellloth (Pb Sn)	2,46	Neusilber ($\text{Zc}_4 \text{Cu}_{18} \text{Ni}_2$)	61,88
Tombac (Zc Cu_2)	32,5	Packfong ($\text{Zc}_2 \text{Cu}_5 \text{Ni}_3$)	68,10

219. Versuche mit organischen Stoffen. — Die Versuche von Wertheim und Chevandier ergaben für verschiedene Hölzer, nach den 3 Hauptrichtungen, bei 20 % Feuchtigkeit.

	Dichte	Richtung.		
		longit.	radial.	tangent.
Pappel	0,477	1,97	0,146	0,214
Fichte (<i>P. sylvestr.</i>)	0,559	2,48	0,256	0,196
Buche	0,823	3,57	0,885	0,752
Ahorn	0,674	3,58	0,716	0,371
Tanne	0,493	4,18	0,220	0,297
Birke	0,812	4,30	0,823	1,063
Erle	0,601	4,54	0,329	0,175
Eiche (<i>Q. pedunc.</i>)	0,808	6,49	0,582	0,406
Esche	0,697	6,78	0,218	0,408
Espe	0,602	7,20	0,171	0,414
Acacia	0,717	7,93	—	1,231

Die meist angenommene Zunahme der Festigkeit mit der Dichtigkeit des Holzes erleidet vielerlei Ausnahmen. So auch zeigten die einen Hölzer (Tanne, Esche, Ulme, Ahorn, Espe, Erle) eine wachsende Festigkeit von der Axe nach dem Umfange; alte Eichen,

Birken und Buchen hingegen eine Abnahme derselben. In dieser Beziehung, wie mit Hinsicht auf die Cohäsion in verschiedenen Höhen des Baumes, treten keine allgemeinen Gesetze hervor. Dagegen steigt die Festigkeit radial und tangential, ähnlich der Elasticität (198), nur auf 0,163 und 0,159 von derjenigen im Sinne der Fasern. Sie nimmt endlich mit dem Alter, mit dem Austrocknen, mit dem schnellen Wachsthum ab.

Für organische Fasern gibt Frankenheim folgende Zusammenstellung:

	Durchm.	α		Durchm.	α
Pferdehaar	0,26 Mm.	9,644	Spinnfaden	0,0025	18,809
Menschenhaar	0,10	11,595	Hanffaden	0,26	25,949
Wollfaden	0,50	13,951	Coconfaden	0,0013	27,500

Die Zurückführung der Stärke auf diejenige α der Querschnittseinheit lässt sich indess nur bei denjenigen Substanzen rechtfertigen, welche, wie die Cocon und Spinnfaden, einer wahren organischen Struktur entbehren. Selbst bei diesen steigt aber die Festigkeit nahe auf diejenige der mittlern Metalle.

Bei Seilen rechnet man 4—5 Kil. auf das Quadr. Millim. Die nämlichen Fasern, gedreht, erweisen sich etwas schwächer als parallel benutzt, weil die Drehung bereits eine Anspannung bewirkt; dasselbe gilt von den Schnüren, die ein Seil zusammensetzen. Alles was dann das organischen Gefüge angreift, das Netzen, Theeren, Bleichen, Färben u. s. w. wirkt gleichfalls nachtheilig auf die Stärke der Fasern.

220. Die rückwirkende Festigkeit. — Sie wurde geprüft, indem man prismatische Stücke auf ihrer obern Fläche gleichmässig und bis zum Zerdrücken presste. Die Zerdrückung ist aber keine direkte Wirkung des Druckes, sondern eine Folge der Verschiebung und peripherischen Auseinandertreibung der Theilchen. Auch hier indess hat man, der Erfahrung nach genähert

$$P = \alpha' \cdot A.$$

Die Festigkeit erscheint der Oberfläche oder dem Querschnitt proportional,

Namentlich bei Bausteinen, welche z. B. in den Grundmauern hoher Gebäude oder als Theile flacher Gewölbe einen oft ungeheuren Druck auszuhalten haben, wurde die rückwirkende Festigkeit vielfach untersucht; doch haben diese Bestimmungen wegen der Ungleichartigkeit der Massen, meist keine grosse Zuverlässigkeit. Die folgenden Werthe von α' sind zur Vergleichung mit den frühern auf die gleiche Fläche von 1 Quadr. Millim. zurückgeführt.

	α'		α'
Porphy	24,782 Kil.	Kalkstein (weich)	1,046
Granit (Aberdeen)	17,310	Sandstein (fest)	1,804
» (Cornwall)	10,076	» (weich)	0,884
Marmor (Flandern)	10,407	» (sehr weich)	0,232
» (Genua)	8,575	Backstein (gut)	1,720
Kalkstein (dicht, schwarz)	14,034	» (schwach)	0,686
» (erdig hart)	3,064		

Porphy und Granit sind die festesten Bausteine. Bei gleicher Tragfläche soll der Würfel mehr tragen als die Platte und die Säule, weil

dort kleine Ungleichheiten des Kornes, hier des Druckes einen grossen Einfluss gewinnen. Harte und spröde Steine springen, gleich wie Glas, in Splitter oder verwandeln sich in Pulver; erdige und körnige Massen werden entweder zermalmt oder theilen sich, wenn sehr homogen, in conische und pyramidale Stücke von oft sehr regelmässiger Gestalt.

221. Weitere Thatsachen. — Die Festigkeit des gemeinen Mörtels steigt auf nicht mehr als 0,4—0,5 Kil.; man darf ihn daher nicht als tragende, sondern nur als Ausfüllungsmasse zur Vertheilung des Druckes benutzen. Nach Rondelet erhöht die gute Bearbeitung die Stärke desselben von 1 auf 1,3. Eine andere Zunahme zeigt der Mörtel im Laufe der Zeit, vermuthlich durch eine langsame chemische Umwandlung des Kalkes in kohlensauen und kieselsauen Kalk. Rondelet beobachtete in 15 Jahren bei gemeinem Mörtel, bei Cement, bei weisser und grauer Puozzolane eine Zunahme der Festigkeit im Verhältniss von 1 : 1,125; 1,250; 1,286 und 1,333. Vielleicht hat die Stärke mancher antiker Mörtel, und mancher in der Natur gebildeter Steine in solchen langsamen innern Verschmelzungsprozessen ihren Grund.

Von Metallen dient namentlich das Gusseisen zum Tragen, und übertrifft, wegen geringerer Sprödigkeit, sogar die festesten Steine. x' steigt bis auf 100 und 116 Kil. Nach Hodgkinson verhält sich die absolute zur rückwirkenden Festigkeit beim Gusseisen im Mittel wie 1 : 5,637. Dabei ist die äussere Kruste der Gussstücke weit dichter, krystallinisch und fester als das Innere.

Wir führen endlich noch folgende Angaben, gleichfalls von Hodgkinson über Hölzer im trocknen Zustande an.

	x'		x'
Pappel	3,601	Weisstanne	5,125
Birke	4,499	Esche	6,580
Rothtanne	4,628	Ruche	6,580
Fichte	4,772	Eiche (engl.)	7,068
Erle	4,891	Teaka	8,504
Nussbaum	5,079		

Würfel und kurze Prismen comprimiren sich um $\frac{1}{3}$, bevor sie zermalmt und in Fasern zersplittert werden; längere brechen durch Biegen, nach der schwächern Seite hin.

222. Relative Festigkeit. — Der Bruch eines homogenen Stabes beim Biegen kann, je nachdem die Zerreiſsung oder die Zerdrückung leichter eintritt, auf der convexen gespannten oder auf der concaven comprimierten Seite beginnen und zwar immer mit den am stärksten in Anspruch genommenen äussersten Fasern des Querschnittes. Indess kommt die Zerdrückung weniger in Betracht, weil die Theilchen vom Drucke selbst zusammengehalten werden, während mit dem Zerreiſsen der Körper aus einander geht. Hat die äusserste Faser nachgegeben, so zerreiſsen auch die innern, die mit geringern Momenten widerstehen (199).

Sei, als einfachster Fall, $a b$ (Fig. 157) ein mit dem Ende a festgeklemmter, am Ende b mit dem Gewicht P belasteter Stab, dessen Länge, Breite und Dicke wie in (199) L, B, H seien. Der Querschnitt c ,

in welchem der Bruch erfolgt, dreht sich gegen den frühern so weit um den Punkt der unveränderten Faser, bis die äusserste Faser auf ihre ganze Cohäsion gespannt wird. Der Einfachheit willen betrachte man den Widerstand der einzelnen Fasern gegen Ausdehnung und Compression, wie bei der Elasticität (194), als gleich und als proportional ihrer Ausdehnung oder ihrer Entfernung von der unveränderten mittlern Faser. Bezeichnet κ'' die Festigkeit der äussersten Faser, in der Entfernung $\frac{1}{2} H$, so widersteht die Faser, deren Querschnitt $B \delta \varrho$ und Entfernung ϱ (Fig. 158) von der mittlern mit der Kraft und dem Momente.

$$\frac{2 \kappa'' B}{H} \varrho \cdot \delta \varrho \text{ und } \frac{2 \kappa'' B}{H} \varrho^2 \delta \varrho$$

Die doppelte Summe (für beide Hälften) von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \frac{1}{2} H$ genommen, muss dem Momente $P \cdot y$ der bréchenden Kraft gleich sein; also nach Formel II

$$\frac{1}{6} \cdot \kappa'' B H^2 = P \cdot y \text{ oder } P = \frac{\kappa'' B H^2}{6 \cdot y}$$

Der Widerstand gegen den Bruch verhält sich 1) wie die Breite B , 2) wie das Quadrat der Dicke H , 3) umgekehrt wie die Entfernung y . Folglich erfolgt der Bruch da, wo $y = L$ den grössten Werth hat, an der Wurzel des Stabes, wo auch die Krümmung die grösste ist.

223. Weitere Folgerungen. — 1) Allgemeiner, für irgend einen andern Querschnitt hätte man

$$P = \kappa'' \frac{Q}{L}$$

wo Q eine vom Querschnitt abhängige Grösse ist, nämlich

Rechteck. Breite B , Höhe H

$$Q = \frac{1}{6} B H^2$$

Quadrat. Seite B

$$\frac{1}{6} B^3$$

Kreis. Radius R

$$\frac{\pi}{4} R^3$$

2) Wird der Stab auf andere Weise gehalten, so hat man noch allgemeiner

$$P = k \kappa'' \frac{Q}{L}$$

wo k den Werth erhält

einerseits fest, anderseits frei (Fig. 157 A) $k = 1$

beiderseits aufliegend (Fig. 157 B) 4

beiderseits festgeklemmt (Fig. 157 C) 8 .

3) Soll der Stab in allen Punkten gleiche Festigkeit zeigen, so muss, für den zu Grunde gelegten ersten Fall, die Bedingung erfüllt sein

$$\frac{B H^2}{y} = \text{Const.}$$

Entweder muss man die Breite B proportional der Entfernung y vom Ende b oder die Dicke H proportional mit $\sqrt{y}$ wachsen lassen, welches letztere eine Parabel bezeichnet, deren Scheitel sich am freien Ende befindet, und deren Axe der Länge L folgt.

4) Die beste Massenvertheilung, wo sie, wie bei Gusseisenstücken, willkürlich ist, entspricht, nach der Länge hin, der Gestalt von gleicher Festigkeit, im Querschnitte, einer Verlegung möglichst vieler Theile in möglichst grosse Entfernung von der mittlern Faser. Man erreicht diess mittelst der beiden Formen des hohlen und des doppelt T förmigen Balkens.

224. Coefficient der relativen Festigkeit. — Bestimmt man α'' aus Versuchen über den Bruch durch Biegung, indem man P, B, H, L misst und

$$\alpha'' = \frac{6 \cdot P \cdot L}{B H^2}$$

berechnet, so erhält man etwas andere Werthe als für α beim Zerreißen durch Zug, weil 1) die Widerstände gegen Compression und Zug, da es sich nicht mehr um ganz kleine Aenderungen handelt (199), nicht mehr gleich sind, und 2) auch die Proportionalität des Widerstandes mit der Entfernung von der unveränderten Faser, die nicht mehr in der Mitte liegt, besonders nach der Grenze des Bruches hin, nicht genau ist.

Für Hölzer erhielt z. B. Barlow, folgende auf Millim. und Kil. bezogene Werthe von α'' , denen zur Vergleichung der umgekehrte Elasticitätscoefficient $\frac{1}{\epsilon}$ beigesetzt ist.

	α''	$\frac{1}{\epsilon}$		α''	$\frac{1}{\epsilon}$
Tanne (Riga)	4,435	697,97	Eiche (Engl.)	7,050	1023,72
Rothtanne	5,655	1299,70	Esche	8,543	1159,15
Buche	6,562	1094,90	Teaka	10,382	1701,52

Für Gusseisen, dem einzigen Metalle das vielfach untersucht wurde, erhielt Stephenson als Mittel von 30 guten Proben $\alpha'' = 32,441$, eine Zahl, die, wie zu erwarten, zwischen der absoluten und relativen Festigkeit dieses Metalles, (3 k. und 100 k.) inneliegt (218. 221).

225. Festigkeit der Torsion. — Auch die Drehung eines Stabes kann bis zum Zerreißen seiner peripherischen Fasern getrieben werden, welche dann dasjenige der innern nach sich zieht. Man erhält hier auf ähnlichem Wege wie bei der Elasticität (202)

$$P \cdot l = \alpha''' \cdot Q \text{ und } \alpha''' = \frac{P \cdot l}{Q}$$

wo $P \cdot l$ das Moment der den Bruch bewirkenden Kraft, Q eine vom Querschnitt abhängige Grösse, α''' der Coeffic. des Bruches durch Torsion ist. Q hat die Werthe

Kreis. Radius R

$$Q = \frac{\pi}{2} \cdot R^3$$

$$\text{Rechteck. Breite } B, \text{ Dicke } H \quad \frac{2}{3} \frac{B^3 H^3}{(B^2 + H^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Quadrat. Seite } B \quad \frac{1}{3\sqrt{2}} B^3$$

Es fehlt an Versuchen zur Bestimmung von α''' ; einzig für Guss-eisen ergaben sich Werthe, welche von 17,273 bis 25,701 variirten, wenn man wieder Millim. und Kilogr. zu Grunde legt. Der Fall des Verwindens von Wellen und Axen kommt nur selten vor.

226. Grenzen der Praxis. — Die in der Praxis angewandten Stücke dürfen lange nicht bis auf den angegebenen Werth ihrer Festigkeit in Anspruch genommen werden und zwar aus folgenden Gründen:

1) Wegen der Unsicherheit über ihre innere Beschaffenheit. Die meisten Versuche beziehen sich auf ausgewählte Proben, während das Holz zersetzte Fasern, der Stein verwitterte Stellen, das Metall Gussfehler oder oxydirte Stellen enthält;

2) Wegen der mit der Zeit fortschreitenden Zerstörung durch Feuchtigkeit, Oxydation, Temperaturwechsel u. s. f. Anfangs unmerklich, dringen solche Einflüsse, wenn eine gute Beschützung fehlt, immer tiefer in das Innere ein;

3) Weil die Cohäsionskräfte, wie angedeutet worden (201. 218.), bei langer Anstrengung allmählig nachgeben, so dass Kräfte von $\frac{2}{3}$ der anfänglichen Festigkeit, nach langsamer Aenderung zuletzt zum Bruche führen;

4) Weil die Bewegung der einwirkenden Massen, wie z. B. auf Hängebrücken, beim Gehen der Menschen und Rollen der Wagen, die Theile, vermöge der lebendigen Kraft, weit mehr in Anspruch nehmen als ein ruhender Druck;

5) Endlich weil lange wiederholte Erschütterungen, wie an Eisenbahnschienen und Lokomotiv-Axen beobachtet wurde, das innere Gefüge schwächen.

Dieser Umstände willen muss, der Erfahrung zufolge, in der Praxis die Stärke bedeutend grösser genommen werden als die theoretische, und zwar für

Schmiedeeisen bei Zug	6—10 mal
» Biegung	4—6 »
Gusseisen bei Druck	4—6 »
Holz bei Druck	5—8 »
» bei Zug	10
Stein, gedrückt	15—20 »

Cap. 5. Cohäsionserscheinungen zweier Körper.

227. Adhäsion fester Körper. — Nicht bloss zwischen den innern Theilen Eines Körpers, auch zwischen den äussern zweier Körper, die sich oberflächlich berühren, entwickeln sich Kräfte des Zusammenhanges, nur bleiben sie wegen unvollkommener Annäherung ungleich viel schwächer. Leichte, staubige und erdige Theilchen (Staub, Bleistift, Kreide) hängen an der Oberfläche anderer Körper. Eine ebene Metall-

platte, leise von einer andern abgehoben, lässt einen merkbaren Widerstand fühlen. Man hat diese Kraft gemessen, indem man die eine Platte, durch Gegengewichte abgeglichen, an den einen Arm einer Wage aufhing und, bei Berührung mit der andern, die zur Trennung erforderlichen Gewichte bestimmte. Indess fehlt es bisher an genauern Versuchen über die Grösse der Adhäsion; theils ist es schwer, zwei Platten mathematisch parallel zu trennen, theils hindern die Ungleichheiten der Oberflächen jede genaue Vergleichung.

Angenommen, die Theile liegen alle gleich aneinander, wird die gemessene Stärke P der Adhäsion, der Fläche A und einem Adhäsionscoefficienten α proportional sein

$$P = \alpha \cdot A.$$

Wählt man die gleichen Einheiten wie früher, Kilogr. und Millim., so geben einige, freilich wenig zuverlässige Versuche von Pechtl für zwei gleiche Platten verschiedener Metalle folgende Werthe

	α		α
Kupfer	0,0000012833	Antimon	0,0000009166
Zinn	10380	Blei	7333
Wismuth	9777	Zinn	6111

Diese Werthe sind also mehrere Millionen mal kleiner als die absolute Festigkeit derselben Metalle und verrathen zu den letzten keine bestimmte Beziehung.

228. Einwirkende Umstände. — 1) Vor allem erhöht die Politur die Adhäsion. Je ebener die Flächen, wie man es an Spiegelplatten erkennt, desto mehr Theilchen liegen nahe aneinander und wirken.

2) Die Reinheit der Platten. Wenige Stäubchen haben, bei der schnellen Abnahme der Cohäsionskräfte mit der Entfernung, einen grossen störenden Einfluss; ebenso die leiseste Oxydation, wovon die meisten der Luft ausgesetzten Metalle oberflächlich ergriffen sind. Nach F a r e d a j haften selbst Platinplatten mit frisch erneuter Oberfläche stärker aneinander als nach Aussetzen an die Luft.

3) Der Druck kann die Adhäsion bedeutend vergrössern, wenn die Körper ductil sind, indem durch das Nacheinander der Unebenheiten die Berührung eine vollständigere wird. Reine Kupfer und Silber, Silber und Goldbleche zusammengewalzt, hängen fest aneinander. Goldblättchen auf eine etwas rauhe Fläche gepresst, bleiben fest hängen. Beim Schweissen von Eisen und Platin hämmert man die glühend und dadurch ductil gemachten Stücke aufeinander, wodurch ein so inniges Ineinandergreifen entsteht, dass die geschweissten Stellen nicht schwächer erscheinen als die übrigen und die Adhäsion förmlich zur Cohäsion wird. Die zähesten Eisensorten, für Degenklingen, Flintenläufe, Ketten u. s. f. werden durch Schweissen aus Drähten und Blechen gebildet; die Masse hat so bis auf ihre innersten Theile eine Durcharbeitung erlitten und damit eine Dichtigkeit und Gleichartigkeit gewonnen, welche einem grössern einfachen Stücke nicht mitgetheilt werden können. Viele Metalle wie Kupfer, Messing, Zink lassen sich, wie es scheint, nur darum nicht schweissen, weil die sich bildende Oxydhaut die innige Berührung hindert, während sie vom Eisen als Hammerschlag abspringt.

4) Anwendung eines anfangs flüssigen Körpers, der an alle

Unebenheiten sich anschmiegt und nachher erhärtet. Die Wirkung des Mörtels, durch chemische Umwandlung fest werdend (221), diejenige der leimenden Stoffe, Leim, Gummi, Eiweiss, Firniss, Kitt u. s. f., welche durch Verdunstung erhärten, gehören hierhin.

Nach Rondelet hat der Coëff. α für guten Mörtel aus feinem Kalk und Sand und für guten Gyps folgenden Werth

	Mörtel	Gyps
Kieselkalk (Liais), glatt	0,000010692	—
» gewöhl. Fläche	11699	0,000020716
Erdiger Kalkst.	15230	22561
Quarzsandst. (Meulière)	20380	31575
Backstein	23050	33580
Ziegel	23560	—

Wie gross die Festigkeit der leimenden Substanzen, namentlich zwischen fasrigen Theilen wird, beweist die Möglichkeit, feste Papiermasse wie dichtes Holz zu bearbeiten. Rumford fand die Festigkeit von Stäben aus Papiermasse gleich 16,66 Kil. auf 1 Quadr. Millim., was der Stärke der schwächern Metalle gleich kommt.

5) Die Dauer der Berührung erhöht bei Holz, vielleicht auch bei andern Körpern die Adhäsion, vermuthlich unter Mitwirkung der hygroscopischen Feuchtigkeit.

229. Ritzen und Einschneiden. — Das Wegreissen einzelner Theilchen eines Körpers mittelst eines andern hängt von der Beschaffenheit der Oberfläche, von der Härte und Elasticität, endlich von der Ruhe und Bewegung der Körper ab. Glatte Flächen werden schwerer geritzt als unebene, welche der mechanischen Einwirkung günstige Angriffspunkte bieten.

Im allgemeinen ritzt der härtere Körper den weichern, daher das Ritzen als das gewöhnliche Prüfungsmittel der Härte angewandt wird. Mohs unterscheidet folgende Reihe der Härtegrade:

Kalk, Gyps, Kalkspath, Flussspath, Apatit, Feldspath, Quarz, Topas, Corund, Diamant.

Kleine eckige Körner, unterstützt von Druck und Bewegung, ritzen eine Fläche von gleicher Substanz. So wird Diamant mit Diamantstaub geschliffen.

Bewegung des angreifenden Körpers begünstigt den Angriff, in Folge der entstehenden lebendigen Kraft, besonders wenn er mit immer neuen Theilen auf immer gleiche Stellen des angegriffenen trifft. Perkins vermochte eine schnell drehende Messingscheibe mit einer Stahlfeile nicht anzugreifen. Colladon hielt harte Körper an eine schnell drehende Scheibe von weichem Eisen: bis zu 11 Met. Geschwindigkeit griff ein Grabstichel die Scheibe an, bei 20 Met. schnitt die Scheibe den harten Stabl, bei 43 bis 100 Met. wurden Agath und sogar Quarz eingeschnitten. Schwache Einwirkungen, die an den gleichen Theilchen sich stets wiederholen, vermögen am Ende die festeste Cohäsion zu überwinden.

230. Die Reibung. — Der Widerstand, der bei der Bewegung der Körper aneinander entsteht, hat einen sehr zusammengesetzten Ursprung.

Es wirken dabei mit: 1) das mechanische Hinderniss der ineinandergreifenden Unebenheiten, 2) die Adhäsion aus der innigen Berührung, 3) die Festigkeit der im Wege stehenden Hervorragungen, wenn Abreibung erfolgt, 4) die Elasticität und Ductilität derselben, in sofern die Theilchen ohne Trennung nachgeben können. Dieser Verwicklung wegen, beschränkt sich die Kenntniss der Reibung einstweilen auf blosse Thatsachen.

Man unterscheidet vorerst die gleitende Reibung, bei welcher der eine Körper mit den gleichen Theilen an immer neue Oberflächentheile des andern gelangt, von der wälzenden Reibung, die aus einem steten Anlegen und Ablösen beiderseits neuer Theile besteht. Offenbar spielt bei der ersten der mechanische Einfluss der Unebenheiten, bei der zweiten die Adhäsion eine vorwaltende Rolle. Die gleitende Reibung hinwieder kann eine Reibung der Ruhe oder der Bewegung sein; sie wird im ersten Fall durch die Kraft gemessen, welche erforderlich ist, den Körper aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung zu versetzen, im zweiten durch diejenige, welche die begonnene Bewegung gleichförmig erhält (35). In beiden Fällen hängt die Reibung R wesentlich von dem Drucke P der Körper gegeneinander ab und man nennt das Verhältniss

$$\frac{R}{P} = \varrho \text{ woraus } R = \varrho \cdot P.$$

den Reibungscoefficienten.

231. Versuche über die Reibung. — Der Coefficient der Reibung der Ruhe wurde seit Amonton vielfach mit Hülfe der schiefen Ebene bestimmt. Man hebt die aus dem einen Körper gebildete schiefe Ebene bis zu dem Winkel φ empor, bei welchem der aufliegende zweite, vom Gewichte Q belastet, zu gleiten anfängt. Da nun (59) der zur schiefen Ebene senkrechte Druck $P = Q \cos \alpha$, die derselben parallele und der Reibung gleiche Kraft $R = Q \sin \alpha$ ist, so folgt

$$\varrho = \operatorname{tg} \varphi$$

Der Coefficient ist der Tangente des Winkels gleich, bei dem die Bewegung eben beginnt.

Um den Coeffic. für die Bewegung zu erhalten, bestimmte man das Gewicht R (Fig. 170), das fortwirken muss, damit der mit P belastete Körper A auf der aus dem andern Körper gebildeten horizontalen Bahn $b b$ gleichförmig fortschreite. P wurde direkt bestimmt, R , in den Versuchen von Morin, aus den Angaben eines Dynamometers B , das auf einer der fortschreitenden Bewegung gemäss sich drehenden Scheibe, für jeden Augenblick der Bewegung, den Zug graphisch darstellte.

Aus den zahlreichen über die Reibung angestellten Versuchen, namentlich aus denen Coulomb's und den sehr umfassenden von Morin, ergaben sich für harte Körper, wie Metall, Holz, Stein, festes Leder, kurz für die gewöhnlich zu Maschinen benutzten Stoffe — genähert wenigstens — einige einfache Gesetze:

1) Die Reibung ist dem Drucke proportional, der Coeffic. daher constant, — eine Folge des ungleich starken Ineinandergreifens der Theile;

2) Zwischen bedeutenden Grenzen (0,003 und 3 Met.) erweist sich die Reibung nahe unabhängig von der Geschwindigkeit; was sich namentlich daraus ergab, dass bei Anwendung eines die Reibung übersteigenden Gewichtes R (Fig. 170) die entstehende Bewegung eine gleichmässig beschleunigte wurde, was eine constante Kraft voraussetzt (64);

3) Sie ist endlich unabhängig von der Grösse der Berührungsfläche, und diess selbst bis zu der beschränkten Berührung einer gekrümmten Fläche. Wie nämlich bei gleicher Belastung P die Fläche wächst, nimmt der auf jede Stelle fallende Druck und damit, zufolge dem ersten Gesetze, die Reibung ab und die ganze Reibung, Produkt der Fläche mit der Reibung der Flächeneinheit, bleibt unverändert.

Diese Gesetze bewähren sich bei harten Körpern nur so lange keine starke Abreibung stattfindet oder der eine Körper in den andern nicht einschneidet; bei weichen, bei stark faserigen und haarigen Stoffen, in denen die Reibung bedeutend mit der Geschwindigkeit variirt, bewähren sie sich gar nicht; eben so wenig in den Fällen, wo, wie in leichten Uhrwerken, der Druck allzuklein ist.

232. Der Reibungscoefficient. — Die folgenden Zahlen sind den Versuchen von Morin entnommen.

1) Metalle. — Reibung der Bewegung:

Eisen auf Eisen	0,138	Stahl auf Guss	0,202
» » Guss	0,194	» » Erz	0,152
» » Erz	0,172	Messing auf Guss	0,189
Guss auf Guss	0,152	Erz auf Eisen	0,161
» » Erz	0,147	» » Guss	0,217
		» » Erz	0,201
Allgemein, für harte Metalle (Stahl, Eisen, Kupfer)			0,13—0,17
mittlere (Guss, Messing, Erz)			0,17—0,20
weiche (Zink, Zinn, Blei)			0,20—0,26

Die Reibung der Ruhe erweist sich an reinen Flächen kaum verschieden von der der Bewegung. Dagegen bestätigte sich die früher angenommene Regel, dass die Reibung verschiedener Körper kleiner sei als diejenige gleicher, nur unvollkommen.

2) Hölzer. Die Fasern

	parallel	gekreuzt	senkrecht
Eiche auf Eiche	0,48	0,32	0,336
» » Ulme	0,246	—	—
Buche auf Eiche	0,36	—	—
Ulme auf Eiche	0,43	0,45	—
Allgemein, für harte Hölzer (Eiche, Buche, Buchs)			0,35—0,40
» mittlere (Ahorn, Ulme, Nussbaum)			0,40—0,50
» weiche (Tanne, Pappel, Weide)			0,50—0,70

Bei gekreuzten oder senkrechten Fasern erscheint die Reibung wegen geringern Ineinandergreifens kleiner als bei parallelen. Abweichend von den Metallen ist die Reibung der Ruhe bei den Hölzern grösser, bis auf das Doppelte von derjenigen der Bewegung und wächst zudem mit der Dauer der Berührung, vermuthlich in Folge der Aufsaugung von Feuchtigkeit (228).

3) Holz und Metall.

Guss auf Eiche	0,49	Eisen auf Ulme	0,25
» » Ulme	0,25	Buche auf Guss	0,39
Kupfer auf Eiche	0,62	Birne auf Guss	0,44

Hier erscheint der Coeffic. sehr veränderlich und steigt oft auf den Werth, den er bei Hölzern allein erreicht. Nach Coulomb tritt das Maximum der Reibung der Ruhe oft nach Tagen erst ein.

4) Steine.

Weicher Kalkst. auf weich. Kalkst.	0,74	Eiche auf weich. Kalkst.	0,63
» » » hartem »	0,75	» » hartem »	0,64
Harter Kalkst. auf hartem »	0,70	Eisen auf weichem »	0,49
» » » weichem »	0,75	» » hartem »	0,42
Backstein auf weichem »	0,67		
» » hartem »	0,67		

Die Reibung der Steine, selbst der harten, erweist sich noch grösser als die der Hölzer und beträgt stets 0,5 bis 0,75 des Druckes.

233. Verminderung der Reibung. — Da die bei Maschinen auf Ueberwindung der Reibung verwendete Kraft für die nützliche Arbeit (51) verloren ist, so muss jene möglichst vermindert werden. Diess geschieht:

1) Durch Politur der Oberflächen, — die übrigens aus der Abreibung härterer Körper von selbst hervorgeht. Coulomb setzt den Coeffic. von Kupfer auf Eichenholz nach Politur auf 0,17, denjenigen von Eisen auf Eiche auf 0,08. Die Reibung des Schlittschuhs auf dem glatten Eise soll nur 0,015 betragen.

2) Durch Anbringung fettiger Stoffe, welche die Vertiefungen ausfüllen, das Eindringen der Unebenheiten hindern und die Reibung beweglicher Theile an die Stelle einer solchen unbeweglicher setzen. Um nicht verdrängt zu werden, muss die Schmiere je nach der Natur der Körper und besonders je nach dem Drucke eine andere Consistenz haben. Für schwere Maschinentheile bewähren sich Seife, Talg, Antifrictionsschmiere (aus Fett und Graphit), für leichte Theile die feinen dünnflüssigen Oele. Rennie fand z. B., dass der Coeffic. für die Reibung von Guss auf Erz im Grossen auf folgende Werthe herabsank:

Für sich	0,25	Mit Seife	0,026
Mit Oel	0,17	Mit Talg	0,025
Mit Fett	0,11	Antifrictionsschm.	0,019

3) Die Anwendung der Axenreibung. Obgleich immer noch eine gleitende Reibung, erscheint sie weniger nachtheilig, einerseits weil sie an kleinem Radius, mit kleinem statischen Momente wirkt, anderseits weil ihre Einschränkung auf eine kleine Stelle die Anwendung der vorgenannten Verminderungsmittel erleichtert. In der That stimmt dann der Coeffic. mit den vorigen Werthen überein.

4) Die Umwandlung in rollende oder wälzende Reibung (230), die andern Ursprunges und stets bedeutend geringer ist als die gleitende. Rennie führt an, dass Steine auf einer Felsfläche gezogen, eine Reibung 0,7, auf Holzschlitten 0,56, mit Seife 0,17, mittelst Walzen von 0,026 zeigten. Die Reibung der Wagenräder auf fester Strasse wird im Trab zu 0,07, im Schritt zu 0,04 angenommen; auf weicher sandiger Strasse steigt sie auf 0,13 und mehr. Der Hauptvortheil der Eisenbahnen beruht auf der Verminderung der Reibung, indem die rollende Reibung sehr ebener und harter Körper zur Anwendung kömmt. Der Coefficient sinkt in diesem Fall, bei gewölbten Schienen, auf 0,005 und 0,004 herab.

234. Benutzung der Reibung. — Alles Befestigen oder Verbinden der Körper durch Klemmen, Nageln, Schrauben, Verkeilen, Binden u. s. f. beruht auf einer Reibung, welche unter dem Einfluss eines künstlich ausgeübten oder eines aus der Elasticität hervorgegangenen Druckes eine bedeutende Stärke gewonnen hat. Die Reibung ferner ist das Hauptmittel, Bewegungen zu verzögern oder zu hemmen. Die Reibung des Bodens hilft unserem Fusse; die gleitende Reibung des Radschuhs oder der Spannkette verzögert das Rollen des Rades; die üblichen Bremswerke bestehen aus Theilen, die, mehr oder weniger stark an drehende Wellen gepresst, deren Bewegung beliebig hindern.

Eine sehr wichtige Anwendung findet endlich die Reibung bei der Bestimmung der Arbeitsgrösse (51) der grössern Motoren mit drehender Bewegung. In einfachster Gestalt wäre Folgendes die Vorrichtung: Der Wellbaum A (Fig. 171), nachdem er ausser Verbindung mit den arbeitenden Theilen der Maschine gesetzt worden, wird mit 2 Backen B und C, die man durch Zäume stärker oder schwächer andrücken kann, gefasst. B verlängert sich zu einem Hebel, den man verschieden belasten oder an ein Dynamometer D (201) befestigen kann. Für jede beabsichtigte Geschwindigkeit der Welle findet sich nun eine Belastung P des Hebels L , und ein Druck der Backen, genügend 1) die Drehung gleichförmig zu machen, indem die bewegende und hindernde Wirkung von Motor und Reibung gleich werden, 2) den Hebel in seiner Stellung zu halten, weil Reibung und Last ebenfalls gleich wirken. Hat die Welle den Radius r und macht n Drehungen in der Secunde, so wird die Arbeitsgrösse Q des Motors derjenigen der Reibung und diese derjenigen der Belastung gleich sein. Man hat also

$$Q = 2 \pi r \cdot R = 2 \pi L \cdot P \text{ und } R = P \frac{L}{r}$$

Q bestimmt sich so ohne dass R und der die Reibung erzeugende Druck bekannt zu sein brauchen.

Cap. 6. Die Krystallerscheinungen.

235. Amorphe und krystallinische Körper. — Die Cohäsionskräfte, welche als Elasticität die umgestellten Theilchen in ihre Lage zurückführen, welche sie bei der Ductilität in neuen Gleichgewichtsstellungen festhalten, und sich endlich bei den Erscheinungen der Festigkeit ihrer Trennung widersetzen, werden sich natürlich auch dann geltend machen, wenn ein fester Körper sich bildet, das heisst, seine früher beweglichen Theilchen in feste Gleichgewichtsstellungen übergehen. Je freier und ungestörter diess geschieht, desto mehr darf die Stellung und Anordnung der Theilchen als das Werk jener Kräfte angesehen werden, desto mehr darf man erwarten, sei es an dem innern Bau, sei es an der äussern Gestalt, den Ausdruck ihrer Eigenthümlichkeit zu entdecken.

Durchgeht man die vielfachen Formen der festen Körper, die in der Natur selbstständig sich bilden, so verrathen die einen eine Tendenz zur Kugel, die andern zu ebenbegrenzten Krystallen; jene

sind der Ausdruck einer unbestimmten Anziehung, die alle Theilchen möglichst nahe zusammenzurücken strebt, diese einer besondern Kraft, welche sie auf bestimmte gesetzmässige Weise vereinigt. In Uebereinstimmung damit haben die gerundeten Formen meist keine durchgehende innere Struktur, alle Richtungen des Innern sind gleichartig und diess deutet auf eine ordnungslose Stellung und Anhäufung der Theilchen, wie bei den Flüssigkeiten; die Krystalle hingegen haben eine innere Struktur, nach verschiedenen Richtungen gesetzmässige Unterschiede der Beschaffenheit, also eine durchgreifend bestimmte Anordnung der Theilchen. Jene Massen, wohin z. B. Glas, Jaspis, Thon u. s. f. gehören, heissen *amorphe*; sie entstehen entweder wenn grosse Mengen beweglicher Theilchen gemeinsam zu schnell fest werden, als dass das kleine Spiel der Cohäsionskräfte einen Einfluss auf die Gesamtform ausüben könne, oder aus der Vereinigung einer verworrenen Masse chemisch verschiedenartiger Theilchen, deren Kräfte nur als unbestimmte Anziehung sich aussprechen können. Dagegen entstehen *krystallinische* Formen, von ebenen Flächen, geraden Kanten und scharfen Ecken begrenzt, und begleitet von einer innern Struktur, beinahe immer, wenn chemisch gleichartige Theilchen so langsam und ungestört sich vereinigen, dass Theil um Theil von den Cohäsionskräften ergriffen, in die günstigste Gleichgewichtsstellung gebracht und dem schon gebildeten festen Kerne angeschlossen werden kann. Allerdings ist die Energie, mit der, störenden Umständen gegenüber, diese Kräfte sich äussern, so wie der Umfang der Stabilität der resultirenden Stellungen, bei verschiedenen Substanzen sehr ungleich, nichts desto weniger scheint die Krystallbildung das wahre Merkmal einer ungestörten Vereinigung gleichartiger Theilchen und ein Ausdruck der besondern Natur der dabei thätigen Kräfte. Selbst wo die Entwicklung grösserer Krystalle nicht möglich ist, verräth sich die Tendenz dazu durch ein krystallinisches Korn oder durch Entstehung eines unter dem Microscop erkennbaren krystallinischen Staubes.

Aus dem Gesagten erhellt, wie wichtig das Studium der Krystalle und ihrer physicalischen Eigenschaften für eine nähere Kenntniss der Cohäsionskräfte werden muss, wie viel wichtiger namentlich als dasjenige der gerundeten Formen.

236. Hauptfälle der Krystallbildung. — Vorheriger beweglicher Zustand der Theile, langsames Hinzutreten von Ursachen, welche die Ausscheidung bewirken, chemische Gleichartigkeit der ausgeschiedenen Theile sind die drei Hauptbedingungen zur Krystallbildung. Wir finden sie in den folgenden Fällen wieder:

1) *Abkühlung einer geschmolzenen Masse.* — Schwefel, Wismuth, Antimon u. s. f. krystallisiren, oft mit grosser Schönheit, in dem heissen Raume, der zurückbleibt, wenn man die geschmolzene Masse, nachdem eine feste Kruste entstanden, durch Einschlagen eines Loches, theilweise ausfliessen lässt.

2) *Sublimation.* Ein direkter Uebergang aus dem luft- oder dampfförmigen Zustand durch Erkältung in den festen. So gelingt es mit Jod, Campher, Benzoësäure u. s. f.; so entsteht der vulkanische

Schwefel; so endlich der Gisch und Schnee, an kalten Tagen, wo kein Wasser flüssig besteht.

3) Erkalten heisser Auflösungen. Viele Substanzen, z. B. Alaun, Salpeter, Vitriol, Zucker u. s. f. sind heiss in grösserer Menge auflöslich als kalt und scheiden daher bei langsamem Erkalten das aufgenommene Uebermaass aus. Das nahe gleichauflösliche Kochsalz krystallisirt so nicht; der kalt leichter auflösliche salpetersaure Baryt umgekehrt beim Erwärmen.

4) Abdampfen des Auflösungsmittels, wobei das jeweilige Uebermaass an Salz sich successiv ausscheidet. So wird das Kochsalz durch natürliche oder künstliche Verdampfung des Meer- und Solwassers gewonnen; so bilden sich die Sinter und Tuffabsätze der Quellen durch Entweichen der Kohlensäure u. s. f. Sind mehrere Salze gleichzeitig aufgelöst, so scheiden sie sich grossentheils nacheinander, das schwerstauflösliche zuerst, aus und das Verdampfen wird ein praktisch wichtiges Mittel der Reinigung und Trennung der Salze (Scheidung von Salpeter und Kochsalz, von Kochsalz und Chlorcalcium oder Chlormagnesium u. s. f.).

5) Chemische Aenderung der Flüssigkeit. Weingeist, allmählig zu einer Vitriollösung gelangend, scheidet das Salz in krystallinischen Theilchen aus; Wasser scheidet ebenso federartige Krystalle von Campher aus einer geistigen Auflösung des letztern. Viele durch Reagentien bewirkte Fällungen sind ein feiner krystallinischer Staub, aus neugebildeten unauflöslichen Verbindungen.

6) Galvanische Zersetzungen, von denen später die Rede sein wird.

Unter noch wenig ermittelten Bedingungen entsteht bisweilen eine Umstellung der Theilchen, selbst ein krystallinisches Korn, ohne dass ein beweglicher Zustand vorausging. An unschmelzbaren Hochofensteinen z. B. hat man nach länger heftiger Erhitzung im Innern stellenweise Anhäufungen von Stoffen beobachtet, die früher gar nicht vorhanden oder in der ganzen Masse vertheilt waren. Auch die Entglasung, eine Folge des Alters oder häufiger Erwärmung des Glases, rührt von einer Tendenz der amorphen Masse her, ihre Theilchen anders zu stellen. Bei Metallen, denen man durch die Bearbeitung Zähigkeit und Gleichförmigkeit gegeben hatte, kann auf doppelte Weise Sprödigkeit und krystallinisches Korn entstehen (215): 1) durch langwiederholte Erschütterungen, wie an Locomotivaxen und Eisenbahnschienen, 2) durch häufige starke Temperaturwechsel, was z. B. an messingenen über Kamine geführten Blitzableiterdrähten beobachtet wurde. In beiden Fällen scheinen die Cohäsionskräfte, während der gegenseitigen Bewegung der Theilchen, Gelegenheit zur allmählichen Ueberführung derselben in stabilere Stellungen zu erhalten.

237. Nebenumstände. — Auf die Ausscheidung und Ausbildung der Krystalle haben, ausser der Bedingung der Sättigung für die vorhandene Temperatur, noch folgende Umstände besondern Einfluss:

1) Ruhe oder Bewegung. Bewegung einer gesättigten Flüssigkeit beschleunigt den Augenblick der Ausscheidung, hindert aber die Entwicklung grösserer reiner Krystalle. Vollkommene Ruhe wirkt ent-

gegengesetzt. In vollkommen ruhigem, geschütztem Zustande bleibt Wasser mehrere Grade unter dem Gefrierpunkt noch flüssig, dann aber genügt ein Stoss, die Bewegung der Luft, ein hereinfallendes Sandkorn das schnelle Erstarren der ganzen Masse zu veranlassen. Noch auffallender sind die Erscheinungen der Ueberschmelzung oder Uebersättigung beim Glaubersalz. Eine warme Auflösung, von etwas Terpentin bedeckt und ruhig hingestellt, bleibt auch nach dem Erkalten flüssig, bis die Erschütterung einer einzelnen Stelle eine Krystallbildung einleitet, die unter den Augen des Beobachters durch die ganze Flüssigkeit fortschreitet und sie in wenigen Minuten zu einer festen Krystallmasse umwandelt. Die übersättigte Flüssigkeit verhält sich ganz wie ein Körper, dessen Theilchen um so vollständiger, je länger die Ruhe gedauert hat, in ein labiles Gleichgewicht gelangt sind; ganz unberührt, verharren sie in demselben; allein die Umstellung eines einzelnen derselben zieht diejenige des nächsten und aller folgenden, successiv festere Stellungen suchend, nach sich.

2) Die Ansatzpunkte. Selten entstehen Krystalle frei in der Flüssigkeit, sondern setzen sich meist an den Wänden der Gefässe oder an zufällig in der Flüssigkeit schwimmenden fremden Theilchen an. Raue Flächen, organische Theile, Holz, Schnüre, wirken in dieser Hinsicht besser als glatte Wände von Glas und Porzellan. Es scheinen die Bedingungen zur Umstellung des ersten Theilchens, im Innern, wo von allen Seiten gleiche Kräfte wirken, sich weniger leicht zu erfüllen, als an der Begrenzung, wo die Symmetrie der Wirkungen nicht besteht, und weniger leicht unter dem regelmässigen Einfluss einer glatten Wand als unter dem unregelmässiger Unebenheiten. Keine Substanz indess wirkt kräftiger als Ansatzpunkte, als ein Krystall von gleicher Art. Leicht lässt sich z. B. eine Auflösung bilden, in der ein hineingehängter gleichartiger Krystall sich vergrössert, während nichts an den Gefässwänden sich ansetzt. In einer gleichen Auflösung von Salpeter und Glaubersalz scheidet ein Krystall des ersten Salzes nur Salpeter, ein solches des letzten nur Glaubersalztheile aus.

3) Die Natur der Flüssigkeit. Indem das sich ausscheidende Theilchen von denen der Flüssigkeit umgeben bleibt, üben auch diese einen wesentlichen, obgleich noch wenig aufgeklärten Einfluss auf die Ausbildung der Krystalle aus. Mechanisch beigemengte Stoffe, selbst in solcher Menge wie in wahren Schlamme, sind kein Hinderniss gegen die Vereinigung der krystallisirenden Theilchen, scheinen aber der Ausbildung einzelner einfacher Krystalle besonders günstig. Chemisch beigemischte Stoffe bestimmen dagegen, ohne selbst in die Krystalle einzugehen oder ihren Hauptcharakter zu ändern, die Entwicklung besonderer Flächen, also eine Vervielfältigung der Formen. Alaun z. B. aus einer Auflösung mit Alkali krystallisirt in Würfeln, mit Salpeter in Cubo-Octaedern, mit Borax in Rhomben-Dodecaedern.

238. Die Krystallentwicklung. — Soweit die microscopische Untersuchung reicht, beginnt der Krystall durch das plötzliche Erscheinen eines kleinen, vollständig ausgebildeten Kernes, der sich durch das Anlegen paralleler Schichten von Theilchen vergrössert. Unterhält man

die Sättigung der Flüssigkeit, so wachsen die Krystalle, z. B. beim Alaun, beim Salpeter, beim Blutlaugensalz, ohne Aenderung ihrer Gestalt bis auf eine Grösse von mehreren Zollen. An einem freien Krystalle geht die Zunahme nach diametral entgegengesetzten Richtungen auf gleiche Weise vor sich und erzeugt zwei ganz entsprechende parallele Flächen. Das paarweise Vorkommen paralleler Flächen und der von denselben gebildeten gleichen parallelen Kanten an entgegengesetzten Seiten sind das Merkmal eines vollständigen Krystalls.

Die Thätigkeit der Kräfte nach verschiedenen Richtungen, mit andern Worten die Dicke der Schicht, welche in gleicher Zeit auf verschiedenen Flächen sich absetzt, kann aber, selbst bei gleicher Flächenlage, sehr verschieden sein, wodurch der Krystall oft eine Tafel- oder Säulenform annimmt. Nicht in der Grösse der Flächen, wovon auch der Umriss und das Zusammentreffen mit den einen oder andern der übrigen Flächen abhängt, sondern in der gegenseitigen Lage, in der Constanz der zwischen ihnen liegenden Neigungswinkel spricht sich die gesetzmässige Wirkung der Cohäsionskräfte aus. Bei ungenügendem Stoff entwickeln sich vorzüglich Kanten und Ecken; man erkennt es an den würfelförmigen Krystallgerippen des Kochsalzes, den treppenförmigen vertieften Flächen des Wismuths, den kleinen sechsseitigen Schneesternchen mit unausgefüllten Sektoren. Uebrigens wirken in einer gegebenen Flüssigkeit die Bedingungen der Krystallbildung meist so constant, dass alle gleichzeitig entstehenden Krystalle dieselben Eigenthümlichkeiten theilen, und daher lassen sich Kalkspathe und Bergkrystalle verschiedener Fundorte oft auf den ersten Blick unterscheiden.

Zerbricht man einen Krystall, z. B. eine Octaederecke des Alauns, so überdeckt sich bald die Bruchfläche mit vortretenden kleinen Ecken, welche alle die fehlende wiederholen, und, schnell fortwuchernd, sie theilweise ersetzen. An jeder Stelle, von jedem einzelnen Punkte aus wirken die Kräfte, wie vom ursprünglichen Ausgangspunkte, zur Bildung gleichliegender Flächen oder kleiner Krystallindividuen.

239. Das Gesetz der Symmetrie. — Betrachtet man einen Krystall von allen Seiten, indem man nicht sowohl auf Grösse und Gestalt, als auf die gegenseitige Lage der Flächen achtet, so entdeckt man gewisse Hauptrichtungen, Axen, für welche von der Mitte nach verschiedenen Seiten hin, gleichliegende Theile in gleicher Reihenfolge sich wiederholen. Es lassen sich hiernach verschiedene Symmetriestufen unterscheiden, die in (Fig. 172) schematisch dargestellt sind: 1) 6fache Symmetrie — mit 6 gleichen Richtungen, unter 60° gestellt (A); 2) 4fache Symm. — mit 4 gl. R. unter 90° (B); 3) 3f. Symm. — mit 3 gl. R. unter 120° (C); 4) Zwei 2f. Symm. — mit 2 rechth. ungl. R. 2f. Symm. (D); 5) Eine 2f. Symm. und 6) Keine Symm.

Die Hauptsymmetrieen haben grosse Wichtigkeit, weil sie durch alle oft sehr mannigfachen Formen der gleichen Substanz auf gleiche Weise sich wiederholen, also in wesentlicher Beziehung zur Substanz stehen. Nennt man Krystallsystem ein durch gleiche Symmetrieverhältnisse verknüpfte Formenreihe einer gleichen Substanz, Grundform die einfachste charakteristische Form desselben, so lassen sich der

Erfahrung nach alle Formen unter 6 Systeme bringen, deren Grundform und einfachsten Merkmale die folgenden sind (Fig. 173):

1) Das Reguläre Octaeder (A) — 3 gleiche Richtungen 4facher Symmetrie (Fig. A).

2) Das Rhomboeder — 1 R. 3 oder 6f. S. — Andere mit Doppelsym. (Fig. B).

3) Das Quadratoctaeder — 1 R. 4f. Sym. — 2 gl. R. mit zwei 2f. S. (Fig. C).

4) Das Rhombenoctaeder — 3 ungl. R. mit zwei 2f. S. (Fig. D).

5) Das einfach geschobene Oct. — 2 ungl. R. 2f. S. — 1 R. ohne S. (Fig. E).

6) Das doppelt geschobene Oct. — 3 ungl. R. ohne S. (Fig. F).

Da bisher alle Krystalle unter diese 6 Systeme gebracht werden konnten, scheinen sie alle wirklich möglichen, regelmässigen Anordnungen der Theilchen darzustellen.

Die 6 Systeme haben unter andern folgende Benennungen erhalten:

Grundform	Weiss	Haidinger	Frankenheim
1) Reg. Oct.	Regulär	Tessularisch	Tesseral
2) Rhomboed.	Drei- und Einaxig	Rhomboedrisch	Hexagonal.
3) Quadr. Oct.	Zwei- u. Einaxig	Pyramidal	Tetragonal
4) Rhomb. Oct.	Ein- u. Einaxig	Prismatisch	Isoklinisch
5) Gesch. Oct.	Zwei- u. Eingliedrig	Augitisch	Monoklinisch
6) Doppeltg. Oct.	Ein- u. Eingliedrig	Anorthysch	Triclinisch

Folgende bekannte Mineralien gehören beispielsweise den verschiedenen Systemen an:

- 1) Reg. Oct. — Steinsalz, Salmiak, Alaun, Flussspath, Analzim, Diamant, Borazit, Granat, Magneteisen, Wismuth, Silber, Zinnkies, Bleiglanz Blende.,
- 2) Rhomboedr. — Chilisalpeter, Apatit, Kalkspath, Dioplas, Graphit, Smaragd, Quarz, Turmalin, Antimon, Zinnober.
- 3) Quadr. Oct. — Uranglimmer, Apophyllit, Idokras, Zirkon, Rutil, Anatas.
- 4) Rhomb. Oct. — Salpeter, Bittersalz, Borax, Aragonit, Baryt, Bleivitriol, Prehnit, Natrolith, Stilbit, Topas, Olivin, Staurolith, Lievrit, Bournonit, Kupferglanz, Auripigment, Schwefel.
- 5) Gesch. Oct. — Kohlens. Natron, Glaubersalz, Gyps, Malachit, Glimmer, Adular, Augit, Hornblende, Epidot, Sphen, Schwefel, Scheererit.
- 6) Doppeltgesch. Oct. — Kupfervitriol., Kyanit, Albit, Axinit.

240. Das Gesetz der Ableitung. — Der Grund, warum durch alle Formen derselben Substanz — man kennt deren beim Kalkspath allein mehrere hundert — die gleichen Symmetrieverhältnisse sich finden, liegt darin, dass von der Grundform ausgehend, die Aenderung Eines Theiles (Fläche, Kante oder Ecke) von der gleichzeitigen Veränderung aller andern gleichwerthigen Theile begleitet wird. Die abgeleiteten Formen müssen so nothwendig den Symmetriecharakter der Grundform wiederholen.

Damit ist indess das wichtigste Band zwischen den zusammengehörenden Formen noch nicht ausgedrückt. Unter den zahllosen, mit gleichen Symmetrieverhältnissen zu vereinbarenden Flächen, kommen nur einzelne, bestimmten Reihen angehörende, wirklich vor. Bezeichnet man die relativen Längen der Hauptaxen der Grundform (auf den Symmetrierichtungen), deren in dem ersten und den vier letzten Systemen drei unterschieden werden können, durch a, b, c und daher die Flächen der

Grundform durch (a, b, c) , so lässt sich die Lage der abgeleiteten Flächen durch Axen bestimmen, deren relative Längen $l a, m b, n c$ sind, wobei l, m, n aus den einfachsten Zahlen $1, 2, 3 \dots$ selten nur aus 4 oder 5 bestehen. Häufig dagegen kommt der Grenzwert ∞ vor, da dann $(\infty a, m b, n c)$ eine mit a , $(\infty a, \infty b, n c)$ eine mit a und b parallele Fläche bezeichnet. Diese Beziehung heisst das Gesetz der Ableitung.

241. Anomalien. — Von diesen einfachen Gesetzen gibt es jedoch zwei merkwürdige, weil gesetzmässige Ausnahmen, welche die Erkennung des Krystallsystems oft bedeutend erschweren:

1) Die Hemiedrie, darin bestehend, dass bei gewissen Substanzen oft nur die Hälfte, bisweilen sogar nur ein Viertel (Tetartedrie) der gleichwerthigen Flächen, und zwar nur die abwechselnden, wirklich vorkömmt, gleichsam als hätten diese Flächen durch übermässiges Wachsthum die andern vollständig unterdrückt. Es entstehen dann Formen, deren Flächen oft ihrer parallelen entbehren, welche die wahren Symmetrieeen nicht aufweisen und je nachdem die einen oder andern Flächen verschwunden sind, zwei sich ergänzende, indess nicht immer überdeckbare Körper darstellen. Das einfachste Beispiel der Hemiedrie ist das Tetraeder, aus dem regulären Octaeder durch Wegfallen der einen oder andern abwechselnden Flächen entstanden.

2) Die Zwillinge sind Krystalle, deren Gestalt nur aus einer Verbindung oder Durchdringung zweier oder mehrerer einfacher Individuen erklärt werden kann. Diese Vereinigung ist aber keine zufällige, sondern entwickelt sich auf gleiche Weise bei zahlreichen Krystallen, indem eine bestimmte Krystallfläche zur Verschmelzung der oft gleich, oft entgegengesetzt gestellten Individuen dient. Man erkennt die Zwillingenformen oft an dem Dasein einspringender Winkel, welche beim einfachen Krystall nie vorkommen, oder, wo solche fehlen, an der Beschaffenheit, dem Glanze, der Streifung u. s. f., der verschiedenen Flächen. Wahrscheinlich muss der Ursprung der Zwillinge in einer gesetzmässigen Vereinigung der ersten Krystallkeime gesucht werden, über welchen die beiden Individuen sich selbstständig aber gleichzeitig entwickelten.

242. Die physicalischen Eigenschaften. — Da die äussere Form eines fortwachsenden Krystalls, abgesehen von der Grösse, stets die gleiche bleibt, so muss die ganze innere Struktur den Symmetrieverhältnissen der äussern Form gehorchen. In der That zeigen alle von den Cohäsionskräften abhängigen Eigenschaften der Krystalle eine innige Beziehung zu der äussern Gestalt, indem gleichartige Richtungen stets auch dem Krystallsystem zufolge als gleichwerthig erscheinen.

Es ist diess nachgewiesen worden: 1) Für die Härte der Krystalle. Gleichliegende Richtungen auf gleichwerthigen Flächen haben gleiche Härte, ungleichliegende gleichwerthiger oder verschiedener Flächen in der Regel ungleiche.

2) Für die Elasticität. Dünne Blättchen nach verschiedenen Richtungen aus einem gleichen Krystall geschnitten oder geschliffen, haben, durch später zu erläuternde acustische Mittel geprüft, ungleiche

Richtungen der Biegsamkeit und Elasticität erkennen lassen, ausser da, wo sich die Gleichheit, wie z. B. für Platten senkrecht zur Hauptaxe des Rhomboeders oder Quadratoeders, aus der Lage im Krystalle ergibt.

3) Für die Festigkeit. Es ist eine auffallende Erscheinung vieler Krystalle unter dem Hammer, nicht wie ein amorpher Körper, nach den Richtungen stärkster gegenseitiger Verschiebung der Theilchen, sondern nach bestimmt vorgeschriebenen Spaltrichtungen zu brechen, senkrecht zu welchen die Festigkeit besonders gering sein muss. Kalkspath, Feldspath, Gyps, Flussspath u. s. f. können kaum anders als nach ihren natürlichen Spaltrichtungen zertheilt werden; während andere Substanzen, der Bergkrystall z. B., diese Eigenschaft allerdings viel weniger deutlich entwickelt haben. Oft trifft man Spaltrichtungen von ungleicher Leichtigkeit und Vollkommenheit, die gleichen aber stimmen nach Zahl und Lage stets mit den Symmetrien des Systems überein, selbst wenn sie mit keiner der vorhandenen äussern Flächen, oder der Wachsthumsschichten des Krystalles parallel gehen.

Nicht bloss die eigentlichen Cohäsionserscheinungen, auch alle übrigen physicalischen Eigenschaften der Krystalle, weil mittelbar oder unmittelbar von der Anordnung der Theilchen abhängig, folgen den nämlichen Verhältnissen der Symmetrie. Wie später nachgewiesen wird, verhalten sich gleichwerthige Richtungen mit Rücksicht auf Wärme, Licht und Electricität als gleich, während abweichende Richtungen oft sehr verschieden. Man schliesst daraus, dass in einem Krystalle die chemisch gleichartigen Theilchen nicht regellos durcheinander liegen, wie in einer Flüssigkeit oder im amorphen Glase, sondern in bestimmte, gleiche, gegeneinander besonders stabile Stellungen gebracht worden sind.

243. Theorie der Krystallisation. — Eine Ableitung der Krystallsysteme und Krystallgesetze aus der Natur der Cohäsionskräfte ist bis jetzt nicht gelungen, doch lässt sich aus dem bisher gesagten eine Vorstellung über die wahrscheinliche Stellung der Theilchen in einem Krystall gewinnen.

Jede gerade Linie in einem Krystall erscheint in ihrer ganzen Ausdehnung als vollkommen gleichartig; geht sie also von einem Theilchen aus durch das nächstliegende, so wird sie eine Reihe anderer gleich auseinander stehender treffen und dieselbe Entfernung der Theilchen wird für jede andere Linie gelten, die durch ein anderes Theilchen der erstern parallel gezogen wird. Denkt man sich ferner von einem Theilchen O (Fig. 174) aus 3 Richtungen O A, O B, O C nach den nächsten nicht in Einer Ebene liegenden 3 Theilchen, deren Entfernungen von O nach ihrer Grössenfolge a, b, c seien, und legt durch alle auf A, B, C liegenden Theilchen 3 Systeme von Ebenen, parallel je den beiden andern Richtungen, so theilt sich der Raum in ein Netzwerk gleicher und gleichgestellter Parallelepipeden, welche alle Theilchen zu Endpunkten haben.

Es ist dann leicht durch weitere Voraussetzungen über die Grundentfernungen a, b, c so wie über die Richtungswinkel (A B), (A C), (B C)

Anordnungen zu finden, welche den Struktursymmetrien der verschiedenen Krystallsysteme entsprechen. Die grösste Symmetrie wird hervorgehen aus $a = b = c$ und $(A B) = (A C) = (B C) = 90^\circ$, die kleinste wenn a, b, c und so auch die Winkel $(A B), (A C), (B C)$ ungleich sind. Jenes entspricht dem System des regulären, dieses des doppelt geschobenen Octaeders. Die Bedingung $a = b = c$ und $(A B) = (A C) = (B C)$ gibt nach der Richtung der Diagonale Eine Richtung 3facher Symmetrie oder das Merkmal des Rhomboeders u. s. f.

244. Die Krystallelemente. — Sollen die chemisch gleichartigen Theilchen beim Krystallisiren bestimmte, besonders stabile Stellungen suchen, so setzt diess eine ungleiche Wirksamkeit derselben nach verschiedenen Richtungen voraus. Damit ist noch nicht erwiesen, wie häufig angenommen wird, dass die Krystalltheilchen (Krystallelemente) wirklich Polyeder seien; kleinere Massen von beliebiger Beschaffenheit (Molecule) wenn nur alle gleich und nach verschiedenen Seiten mit ungleich starken Kräften thätig, genügen zur Erklärung.

Es gibt zudem andere Erscheinungen, welche dazu nöthigen, will man die atomistische Ansicht (20), die einzig bisher ausreichende, festhalten, die Krystalltheilchen, wenigstens oft, als Gruppen mehrerer engverbundener Atome zu betrachten: Dahin gehört:

1. Die Krystallisation chemisch zusammengesetzter Körper. Ein Krystallelement des Kalkspathes z. B. enthält nothwendig Atome von Kohle, Sauerstoff und Calcium, in einer durch die Affinitätskräfte bedingten Zahl und Gruppierung. Bei solcher Zusammensetzung ist eine Gleichheit der Wirkung nach allen Seiten nicht denkbar, so lange die Entfernung nicht unendlich gross im Vergleich mit der Grösse der Gruppe angenommen wird.

2. Der Isomorphismus, die Thatsache nämlich, dass nach gleicher Atomzahl aus verschiedenartigen Atomen gebildete chemische Verbindungen eine nahe übereinstimmende Krystallentwicklung zeigen und desshalb mit und durcheinander in denselben Krystall eingehen können. So z. B. krystallisiren die kohlen sauren Salze von Kalk Magnesia, Eisenoxydul, Manganoxydul, Zinkoxyd etc. in wenig abweichenden Rhomboedern und mischen sich in allen Verhältnissen. Man muss hier annehmen, die Gruppierung der Atome in jedem Krystallelement und der Charakter seiner Kraftäusserung bleiben die nämlichen, wenn auch an die Stelle der einen Atome, diejenigen eines andern ähnlichen Körpers treten,

3. Der Dimorphismus und Polymorphismus. Endlich beweist die Fähigkeit mancher Substanzen in mehreren, mit andern Symmetrie- und Strukturverhältnissen begabten Systemen zu krystallisiren, dass je nach den Umständen, unter denen das Erstarren erfolgte, die Gruppierung der gleichen Atome zu einem Krystallelemente eine andere werden kann. So krystallirt der kohlen saure Kalk als Calcit im System des Rhomboeders, als Aragonit in demjenigen des Rhomben octaeders; das Titanoxyd als Rutil und als Anatas in zwei verschiedenen Quadratoctaedern. Da der Dimorphismus auch bei chemisch einfachen Stoffen vorkommt (der Schwefel krystallisirt z. B. als Rhomben octaeder und

einfach geschobenes Octaeder; die Kohle als Diamant im regulären Octaeder, als Graphit als Rhomboeder) so scheinen selbst die Krystalltheilchen chemisch einfacher Körper einer verschiedenen Anordnung fähige Gruppen verschiedener Theilchen zu sein, die andern Krystalltheilchen gegenüber als Ganze auftreten. Auf diese Ansicht übrigens führen die mannigfachen der Chemie angehörenden Erscheinungen der Isomerie.

Wie aus diesen Bemerkungen erhellt, gestatten wohl keine Erscheinungen einen tiefern Blick in das innere unbekannte Wesen der Körper als die Krystallerscheinungen, denn keine hängen so wesentlich und specifisch von dem Charakter der Cohäsionskräfte ab.

2. Flüssige und luftförmige Körper.

Cap. 6. Cohäsionserscheinungen Einer Flüssigkeit.

245. Compressibilität und Elasticität. — Die Elasticität der Flüssigkeiten ist von derjenigen der festen Körper wesentlich verschieden, weil das Gleichgewicht der Theilchen, mit Rücksicht auf Umstellungen und Verschiebungen, nur eine höchst geringe Stabilität mehr zeigt. Sie bezieht sich daher einzig auf Aenderungen der Entfernungen und auch da nur auf die einzige Wirkung des Druckes, denn eine messbare Ausdehnung der Theilchen (ausser durch Wärme) ist ohne Trennung bisher nicht möglich gewesen.

Lange blieben selbst die Versuche über die Zusammenrückbarkeit der Flüssigkeiten ohne Erfolg, entweder wurden die Gefässe durch den auf die innere Flüssigkeit ausgeübten starken Druck zersprengt, oder sie vergrösserten sich vermöge ihrer Elasticität und die Veränderung der Flüssigkeit selbst blieb unentschieden. Canton (1761) gelang der Versuch zuerst, indem er den Druck innen und aussen auf das Gefäss wirken liess. Der die Flüssigkeit enthaltende Glaskolben endete oben in eine feine offene Röhre. Unter die Luftpumpe gebracht, sah man die Flüssigkeit ein wenig steigen, beim Wiedereinströmen der Luft wieder auf den Anfangspunkt sinken. Die Flüssigkeit war also compressibel und vollkommen elastisch.

246. Messende Versuche. — In den späteren Untersuchungen von Oerstedt (1823) und Colladon und Sturm (1827) wurde ein grösserer Druck zur Anwendung gebracht. Der mit einer Röhre versehene Behälter a (Fig. 175), das Piezometer, befindet sich neben einem Luftmanometer b in einem Glaszylinder A mit Wasser, auf welches man mittelst einer Schraubenpumpe B den Druck wirken lässt. Den Stand der Flüssigkeit und seiner Veränderungen beobachtete man an einem kleinen Index von Quecksilber oder Schwefel-Carbon α , der die Flüssigkeit von dem äussern Wasser trennt und der Enge des Rohres wegen nicht herabsinkt. Magnus beobachtet sicherer das Steigen des Quecksilbers β bei umgekehrter Stellung des Instrumentes C. Man muss den Werth der Eintheilung mit Beziehung auf den Inhalt des ganzen Behälters vorläufig bestimmt haben.

Oerstedt hatte, auf ziemlich übereinstimmende Versuche mit einem Glas- und einem Blei-Piezometer hin, die Veränderung des Gefässes unter dem beidseitigen Drucke als verschwindend angenommen. Auf dem Wege der Theorie fand aber Poisson, dass das Volumen V sich merklich ändere und unter dem Drucke P zu

$$V' = V \left(1 - \frac{3}{2} \varepsilon P \right)$$

werde, wo P den Druck auf die gleiche Flächeneinheit bezeichnet, welche als Querschnittseinheit des Elasticitätscoefficient. ε gewählt wurde. Durch Ausdehnung eines Stabes von dem gleichen Glase wie das Piezometer

hatte Colladon $\frac{3}{2} \varepsilon = 0,00000165$ gefunden und diese Correktion in

Rechnung gebracht. Statt dessen nimmt Wertheim auf seine von der Poisson'schen Theorie abweichenden Versuche hin (203)

$$V' = V (1 - 3 \varepsilon P)$$

Mit der letzten Correktion gaben die Versuche für 1 Atm. Druck (1,0333 Kil. auf 1 Quadratcentim.) (150) folgende Compressionen in Millionteln des anfänglichen Volumens.

	Oerstedt	Colladon		Oerstedt	Colladon
Quecksilber	2,65	5,03	Wasser ohne Luft	46,65	51,30
Schwef. Carbon	31,65	—	Salpeteräther	—	71,50
Schwefelsäure	—	32,00	Terpentin	—	73,00
Salpetersäure	—	32,00	Essigäther	—	79,30
Ammoniak	—	34,70	Salzäther	—	85,90
Essigsäure	—	42,20	Alcohol	21,65	96,60
Wasser mit Luft	—	49,50	Schwefeläther	61,65	133,00

247. Versuche von Régnault. — Bei der Berechnung der Volumensänderung aus dem Elasticitätscoefficient., wird, welcher Theorie man sich bedient, eine Homogeneität der Masse und eine Gleichheit der elastischen Kräfte nach allen Richtungen derselben vorausgesetzt, welche bei einem Glasgefäss nicht vorhanden sind. Desshalb hat Régnault die cubische Veränderung des Piezometers gleichfalls der Prüfung unterworfen. Der Wassercylinder B (Fig. 176), zur Erhaltung einer gleichen Temperatur in einer grössern Wassermasse C eingesenkt, hat in seinem fest aufgeschraubten Deckel drei Oeffnungen a, b, c. Die erste lässt luftdicht die Röhre des Piezometers A durchgehen, welche oben eine Fassung a mit zwei Hähnen hat, deren einer α mit der äussern Luft, der andere β mit einem Behälter (die künstliche Atmosphäre) communicirt, in dem sich Luft beliebig comprimiren lässt. Die Oeffnung b, mit dem Hahne γ verschliessbar, steht mit dem nämlichen Behälter in Verbindung; die Oeffnung c endlich mittelst des Hahnes δ mit der äussern Luft.

Nun beobachtet man: 1) Durch Oeffnen von α , δ , Schliessen von β , γ den Stand der Flüssigkeit in der Röhre unter dem beidseitigen atmosph. Drucke p ;

2) durch Oeffnen von β , δ , Schliessen von α , γ das Sinken — w unter dem innern Druck P und äussern p ;

3) durch Oeffnen von α , γ , Schliessen von β , δ das Steigen + w' unter dem innern Druck p und dem äussern P ;

4) durch Oeffnen von β, γ , Schliessen von α, δ die Aenderung $+ w''$ unter dem innern und äussern Drucke P .

Aus dem Anfangsvolumen V und den Grössen w, w', w'' lässt sich dann mit Hülfe von Ausdrücken, deren Gültigkeit von Wertheim an Gefässen aus Glas, Kupfer und Messing geprüft wurde, der Coeffic. der Zusammendrückung oder das Verhältniss der Zusammendrückung μ in Millionteln in dem Ausdrücke

$$V = V_0 (1 - \mu P)$$

für den Druck von Einer Atmosphäre bestimmen.

Auf diesem Wege gelangte Grassi zu folgenden Zahlen:

	Temp.	Dichtigk.	Coeffic. μ
Quecksilber	0°	13,596	3,0
Wasser	0	0,99988	50,3
Aether	0	0,7377	111,0
Alcohol.	13,1	0,810 (b. 0°)	90,4
Holzgeist	13,5	0,82706	91,3
Chloroform	12,0	1,5225	62,5
Chlorcalcium	15,8	1,417	20,6
Kochsalz	18,1	1,2024	25,7
Salp.s. Natron	18,1	1,2026	29,5
Kohlens. Natron	16,6	1,182	29,7
Schwefelsäure ($\ddot{S} + 2\dot{H}$)	13,6	—	24,2
Meerwasser	17,5	1,0264	43,6

248. Andere Umstände. 1) Die Zusammendrückung bei nicht sehr abweichendem Druck ist diesem nahe proport.; bei grossem Druck wird der Widerstand grösser und die Veränderung merklich kleiner. So fand Colladon

	1te Atm.	9te Atm.	24te Atm.
Salzäther	85,90	82,25	—
Alcohol	96,60	93,50	89,00
Schwefeläther	133,00	—	122,10

Für Wasser scheinen diese Abweichungen sehr gering.

2) Die Erwärmung scheint in der Regel, wiewohl in sehr verschiedenem Maasse, die Zusammendrückung zu vermehren

	bei 10°	bei 110°
Colladon fand für Aether	133,00	150,00
Grassi » » Aether	0	14,0
Alcohol	7,3	13,1
Chlorcalc.	15,8	41,3
Kochsalz	18,1	39,6

Beim Wasser bleibt die Aenderung äusserst gering und erfolgt von 0 bis 53°, wie es scheint, im entgegengesetzten Sinn; sie sinkt von 50,3 auf 44,1.

3) Das Mischungsverhältniss der Flüssigkeit. Grassi, indem er zu 1 At. Schwefelsäure wachsende Wassermassen von 2 bis 10 Atom. beifügte, sah die Zusammendrückung von 24,2 bis 31,5 steigen, eine nahe proportionale Annäherung von der Compressibilität der Schwefelsäure zu der des Wassers.

249. Cohäsion der Flüssigkeiten. — Die Cohäsion bei Flüssigkeiten äussert sich durch ein Bestreben, alle Theile, so weit es die äussern Kräfte gestatten, möglichst nahe zusammen zu drängen, was am vollständigsten bei der Kugel der Fall ist. Ein Wassertropfen hat

Kugelgestalt; ein Wasserfaden aus runder Oeffnung bleibt cylindrisch bis er sich zertheilt.

Am auffallendsten stellen sich, wie Plateau gezeigt, die Cohäsionsformen dar, wenn eine leichte Flüssigkeit in eine mit ihr nicht mischbare andere Flüssigkeit von gleichem specifischem Gewichte gebracht wird, z. B. Oel in eine angemessene Mischung von Weingeist und Wasser. Da dann die Wirkungen der Schwere und des Wasserdruckes, welche Gestalt die Flüssigkeit auch annimmt, aufgehoben sind (104), so haben die Cohäsionskräfte freieres Spiel und die Flüssigkeit gestaltet sich zu Kugeln von Nuss- und Eigrösse. An einer Axe hängend und mit ihr sich drehend, bildet das Oel unter dem Einflusse der Fliehkraft mannigfache Rotationsformen, Sphäroide, wulstige Verlängerungen, selbst freischwimmende Ringe, welche durch Cohäsion zusammengehalten werden. Diese hübschen Versuche werden dadurch erschwert, dass Alles auf die vollkommenste Gleichheit der beiden specifischen Gewichte ankommt, welche durch Stehen der Flüssigkeit, durch Aenderung der Temperatur, durch Verdunstung stets wieder gestört ist.

250. Viscosität und Cohäsion. — Wenn die Theilchen einer Flüssigkeit, z. B. zwei Wasserfaden bei constantem Abfluss (117) sich an einander hinbewegen, so entwickelt sich aus dem Zusammenhange derselben ein Hinderniss, welches beide Bewegungen auszugleichen strebt, und Viscosität (Zähflüssigkeit) genannt wird. Dieser Ursache hat man es beizumessen, dass beim Abflusse des Wassers durch Röhren das von den Wänden ausgehende Hinderniss seinen Einfluss von Faden zu Faden mit abnehmender Stärke auf die ganze Flüssigkeit ausdehnt (125). Die Stärke der Viscosität wird von dem Geschwindigkeitsunterschiede der benachbarten Faden abhängen, welcher selbst mit $\frac{\delta n}{\delta x}$

proportional ist, wo δn der Geschwindigkeitsunterschied für eine Entfernung δx bezeichnet, ferner von der Natur der Flüssigkeit, beides aber nach Gesetzen, die nicht ermittelt sind. Meist auch mischen sich die Erscheinungen der Cohäsion und Viscosität auf so innige Weise, dass die Trennung beider Ursachen in den Versuchen nicht möglich ist.

Bei Bewegung grösserer Wassermassen sind die relativen Geschwindigkeiten der Theilchen in der Regel so gering, dass die Wirkungen der Viscosität verschwinden; hingegen treten sie bei dünnen Wasserfaden und Wasserschichten sichtlich hervor. So sollte z. B. die Entleerungszeit eines Gefässes (118) für alle Flüssigkeiten die gleiche sein, während bei sehr kleiner Oeffnung grosse Unterschiede sich zeigen, daher rührend, dass die wenigen abfliessenden Theilchen von den zurückbleibenden gehindert werden.

251. Abfluss durch enge Röhren. — Besonders stark äussert sich die Viscosität beim Abfluss einer Flüssigkeit durch enge Röhren. Den Beobachtungen zufolge haben die Flüssigkeiten in Bezug auf die in gleicher Zeit abfliessende Volummenge folgende Anordnung: Flüssiger

Kohlenwasserstoff, Aether, Alcohol, flüssige Oele, Wasser, fette Oele, Honig, Syrup u. s. f.

Von Girard, Hagen und Poiseuille sind zahlreiche Versuche über den Abfluss der Flüssigkeiten durch enge Röhren, unter $\frac{1}{2}$ Millim.

Weite, angestellt worden, welche übereinstimmend zur Berechnung der Wassermenge Q aus der Druckhöhe H , der Länge L und Weite D der Röhre auf einen Ausdruck

$$Q = k \frac{H \cdot D^4}{L}$$

führen, wo k einen von der Substanz abhängigen Coefficienten bezeichnet, der für Wasser, alles in Millim. gemessen, von Poiseuille gleich 1836,72 gefunden wurde. Statt mit der Wurzel (118) ist 1) die Geschwindigkeit mit der Wasserhöhe selbst proportional und verhält sich überdiess 2) direkt wie das Quadrat der Weite und 3) verkehrt wie die Länge. Bei ganz enger Röhre von 0,029 Millim. Weite war das Gesetz von einer Länge von 2,10 Millim. an nahe richtig, bei 0,65 nur von 200 Millim. an. Der Coeff. k , bei der gleichen Flüssigkeit, nimmt durch Erwärmung wegen grösserer Beweglichkeit der Theilchen sehr bedeutend zu. Mit einer sehr engen Röhre erhielt Poiseuille bei 100° eine $3\frac{1}{2}$ Mal grössere Abflussmenge als bei 5° .

252. Einfluss auf den Wasserstral. — Manche Erscheinungen an einem ausfliessenden Wasserstrale hängen von der vereinten Wirkung von Cohäsion und Viscosität ab. Dahin gehören die folgenden: 1) das Zusammenhängen eines abfliessenden Wasserstrales bis die wachsende Geschwindigkeit und der Luftwiderstand die Auflösung in Tropfen veranlassen. Man misst die Länge des zusammenhängenden Stäbchens, durch allmähliges Heben des auffangenden Gefässes; es tritt dann ein Augenblick ein, wo die von den Tropfen bewirkte Wellenbewegung der Flüssigkeit plötzlich durch Eintreten eines stetigen Abflusses vollkommen aufhört. Je grösser Cohäsion und Viscosität der Flüssigkeit im Vergleich zum specifischen Gewichte sind, desto länger bildet sich das Stäbchen aus, bis bei Oel, Honig, Syrup ein langer Faden entsteht. Der untere Theil des Stäbchens erscheint nicht mehr glatt, sondern in Folge des Abreissens der Tröpfchen durch kleine Wellen matt und runzlig.

2) Trifft der Stral gegen eine kleine Fläche (Fig. 177), so breitet er sich nach Sawart zu einer conischen Wasserhaut A aus, an der man wieder den ersten glatten Theil a, den zweiten runzligen b und endlich den in Tropfen zerrissenen äussersten c erkennt. Wenn die Geschwindigkeit langsamer wird, hängen die Wassertheilchen länger zusammen und dann bemerkt man als Wirkung der Cohäsion eine Zusammenziehung der Wasserfläche, oft zu einer vollständig geschlossenen Hülle B.

3) Beim Zusammenstoss zweier Wasserstralen zeigen sich mannigfache Bewegungs- und Gestaltänderungen, die gleichfalls von Cohäsion und Viscosität bedingt sind. Gerade entgegengesetzte gleich starke Stralen breiten sich zu einer ähnlichen Scheibe mit runzligem und zerrisse-

nem Rande wie Fig. 177 A aus; ungleich starke bilden gekrümmte Hüllen wie 177 B; schief gerichtete endlich geben unregelmässig gestaltete, oft schraubenförmig gedrehte Wasserstralen — kurz zahlreiche Modifikationen, welche von Sawart und Magnus einer genauen Prüfung unterworfen worden sind.

253. Oberflächliche Zähigkeit. — Die Oberfläche einer Flüssigkeit befindet sich, abgesehen von den allfälligen Wirkungen der Luft und der sich ansetzenden Stäubchen, in einem andern Zustande der Beweglichkeit als das Innere. Die äussersten Theilchen erleiden nur einseitig Wirkungen der Molecularkräfte (Cohäsion und Wärme) (192) und es muss daher eine mit dem Bereich dieser Kräfte vergleichbare Haut vorhanden sein, in welcher die Gleichgewichts- und Dichtigkeitsverhältnisse andere sind. Eine Bewegung nach Aussen und Innen, senkrecht zur Oberfläche, wird durch die Kräfte der umgebenden Theilchen erschwert und diess erschwert hinwieder die Nebeneinanderbewegung der oberflächlichen Theilchen im Vergleich mit denen des Innern, die nach allen Seiten unter gleichen Einwirkungen stehen. So erklärt sich die oft gehegte Vorstellung einer oberflächlichen zähen Haut, welche bedeutende Abweichungen von den einfachen Gesetzen der Hydrostatik veranlassen kann.

Dahin gehört als eigenthümlichste Erscheinung die Fähigkeit der zähen Flüssigkeiten sei es an der Oberfläche einer grössern Masse, sei es frei, ganz geschlossene Blasen zu bilden, die oft lange fortbestehen. Da die Cohäsion die Hülle zusammenzuziehen strebt, befindet sich die Luft im Innern in einem Zustande geringer Compression; die Hülle aber erhält sich durch eine gemeinsame Wirkung der Cohäsion, welche die obern Theile zusammenhält, der Viscosität, die das Herabfliessen der einen Theile an den andern hindert, endlich der Zähigkeit, welche an beiden Flächen der dünnen Schicht vorhanden ist. Dass die eingeschlossene Luft eine nur passive Rolle spielt, beweist die Möglichkeit durch Schütteln von Quecksilber und Wasser, Quecksilberblasen zu bilden, die als Inhalt Wasser einschliessen. Meist jedoch zieht sich die Flüssigkeit der Blasen allmählig herab, bis der zu dünn werdende Scheitel endlich zerplatzt, da dann die rasch zurückweichenden Wassertheilchen sich in einen kleinen fortgeschleuderten Tropfen vereinigen.

Je kleiner die Blasen sind, desto stärker ist die Compression der Luft in ihrem Innern, desto länger halten sie sich und desto zäher und compacter erscheint ihre Hülle. So beobachtet man, dass die kleinen den Nebel bildenden Bläschen, deren Entstehungsweise und Natur noch wenig aufgeklärt ist, wie kleine elastische Bälle an fremden Körpern oder von einander abspringen.

254. Der oberflächliche Cohäsionsdruck. — Die Kräfte, welche zwischen den innern und äussersten Theilchen wirken und jene oberflächliche Zähigkeit hervorbringen, vereinigen sich in eine Resultirende, die wir, ohne damit über ihre Richtung etwas auszusagen, Cohäsionsdruck nennen wollen. Dieser Cohäsionsdruck hängt mit der Gestalt der Oberfläche zusammen und äussert sich so, als wäre jene zähe zu-

gleich eine ausgedehnte und gespannte Haut; bei einer ebenen Fläche, abgesehen vom äussern Druck, gleich 0, wirkt er bei einer concaven Fläche nach Aussen, saugend, bei einer convexen nach Innen, pressend. Die von Laplace und vollständiger von Poisson entwickelte Theorie, deren Folgerungen der Beobachtung entsprechen, führt darauf den Cohäsionsdruck der Krümmung verkehrt oder dem Ausdruck $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'}$ direkt proportional anzunehmen, wenn ϱ, ϱ' die grössten und kleinsten Krümmungsradien der betreffenden Stelle bezeichnen.

Der Cohäsionsdruck für eine concave, ebene, und convexe Fläche wäre alsdann

$$-\gamma \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} \right), \quad 0, \quad +\gamma \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} \right) \quad (1)$$

γ ist eine von der Natur der Flüssigkeit abhängige Constante, deren nähere Bedeutung sich gleich ergeben wird.

Für zwei oberflächliche Stellen einer gleichen Flüssigkeit, welchen die Krümmungsradien ϱ, ϱ' und ϱ_1, ϱ'_1 angehören, und von denen die zweite um h höher liegt als die erste, hat man

$$\gamma \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} \right) = h \cdot s + \gamma \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho'_1} \right) \quad (2)$$

wo die Krümmungsradien für convexe Stellen $+$, für concave $-$ zu nehmen sind und für eine Ebene $\varrho = \infty$ werden. Diese Bedingung gilt z. B. für zwei Stellen eines Wasser- oder Quecksilbertropfens. Damit

der Ausdruck homogen sei, muss $\frac{\gamma}{s \cdot \varrho}$ eine Linie darstellen, folglich

$\frac{\gamma}{s}$ eine Fläche.

An einer freien, kugelförmigen Seifenblase z. B., deren innerer Radius $\varrho = \varrho' = R$, äusserer $\varrho_1 = \varrho'_1 = R + d$ wäre, die Dicke der Schicht d gesetzt, hätte man für den nach Innen gerichteten Druck der äussern convexen und der innern concaven Fläche

$$\frac{2\gamma}{R+d} \text{ und } -\frac{2\gamma}{R}$$

woraus nach Innen ein Gesamtdruck entsteht

$$P = 2\gamma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R+d} \right) = 2\gamma \frac{2R+d}{R(R+d)} \quad (3)$$

Von diesem mit der Kleinheit der Blase zunehmenden Drucke hängt nach dem Mariottischen Gesetze die Compression der eingeschlossenen Luft ab.

Cap. 7. Flüssigkeiten und feste Körper.

255. Die Adhäsion. — Zwischen Flüssigkeiten und festen Körpern wirkt Adhäsion wie zwischen festen Körpern (227) und zwar in Folge der genauen Berührung eine ziemlich starke, welche die Beweglichkeit der nächst anliegenden Theilchen nicht weniger gefährdet, als es an

der freien Oberfläche der Fall ist (253). Die Erscheinungen, welche aus der Adhäsion der Flüssigkeiten hervorgehen, hängen bei dem unmerklichen Wirkungsbereich der Kräfte (191), nicht von der Dicke des festen Körpers ab, hingegen mischen sie sich stets mit Wirkungen der Cohäsion. Sie bestehen grossentheils in Abweichungen von den gewöhnlichen Gesetzen der Hydrostatik, die in der Nähe der festen Körper sich zeigen und unter dem Namen Capillaritätserscheinungen zusammengefasst werden.

Aus dem verschiedenen Verhältnisse der Adhäsion und Cohäsion bei verschiedenen Substanzen entspringt vor Allem das ungleiche Verhalten der netzenden und nicht netzenden Flüssigkeiten. Wasser strebt am reinen Glase sich auszubreiten; Quecksilber zieht sich zurück und rundet sich ab. Offenbar deutet jenes auf ein Vorwalten der Adhäsion, welche die Berührung möglichst zu vergrössern strebt; dieses auf ein solches der auf die Kugelform zielenden Cohäsion (249).

Die Theorien von Laplace und Poisson über die Wirkungen der Kräfte an der Grenze der Flüssigkeitsoberfläche führen darauf — die Erfahrung scheint es zu bestätigen —, dass für die nämlichen zwei Körper die Oberfläche mit der Wand einen constanten Randwinkel bildet, auf welche Weise auch (Fig. 177) Flüssigkeit und fester Körper zusammengebracht werden. Je mehr die Adhäsion vorwaltet, desto spitzer bildet sich der Randwinkel aus (A), je mehr sie zurücktritt, desto stumpfer (B). Man hat überhaupt für diesen Winkel φ einen Ausdruck

$$\cos \varphi = \frac{\alpha}{\gamma}$$

wo γ die bereits (254) erläuterte Constante der Cohäsion der Flüssigkeit ist, α aber eine mit ihr gleichartige, doch von beiden Stoffen abhängige Constante der Adhäsion bezeichnet, die, damit Begrenzung möglich sei, kleiner als γ sein muss.

An direkten Messungen über den Randwinkel fehlt es. Beim Wasser an reinem Glase in der Luft steigt er auf $30-40^\circ$, so dass $\alpha = 0,7$ bis $0,8 \cdot \gamma$ wäre. Der stumpfe Randwinkel des Quecksilbers wird von Poisson zu $134^\circ 30'$ von Bouward zu $136^\circ 48'$ angenommen. Die Unsicherheit rührt von den Abweichungen her, welche die kleinste Gegenwart von Luft, Feuchtigkeit und Staub an der Oberfläche der festen Körper zur Folge hat. An einer benetzten Wand, wo die Ausbreitung, wegen Beschränktheit der Kräfte, einzig von dem flüssigen Ueberzuge abhängt wird $\alpha = \gamma$ und $\varphi = 0$, es findet ein allmäliger Uebergang statt und die Erscheinung wird, wie Hagen wirklich nachgewiesen hat, unabhängig von der Natur des benetzten Körpers. An einer Kante C endlich kann die flüssige Fläche alle möglichen Stellungen zwischen denjenigen annehmen, welche dem Randwinkel an der einen oder andern Wandfläche angehören.

Die Theorie führt darauf, dass die beiden Constanten γ und α selbst wieder von drei andern q , q' , q'' abhängen, so dass

$$\gamma = q + q', \quad \alpha = q'' - q$$

q hängt einzig von den Kräften im Innern der Flüssigkeit ab, q' von denen an der Oberfläche der Flüssigkeit, q'' von denen in der Nähe der Wand.

256. Eingetauchte Platten. — Als einfachsten Fall denke man

sich eine Glasplatte A (Fig. 178) in die horizontale Oberfläche einer netzenden Flüssigkeit B, z. B. Wasser, eingetaucht. Die Flüssigkeit erhebt sich zur Bildung des Randwinkels zu einer Curve a b, die sich nach a in die horizontale Fläche verliert, in b mit dem Randwinkel φ endet. Vergleicht man den Cohäsionsdruck an einer Stelle c der Curve, deren Erhebung y und Krümmungsradius ϱ ist (ϱ' wird ∞ sein), mit dem der ebenen Fläche, so hat man (254)

$$y \cdot s = \frac{\gamma}{\varrho} \quad (1)$$

Die Krümmung wächst also proportional der Erhebung und erreicht ihr Maximum zunächst an der Wand.

Berücksichtigt man zwei naheliegende Punkte der Oberfläche, entsprechend den Ordinaten $y, y + \delta y$, deren Tangenten mit der Verticalen die Winkel $\beta, \beta + \delta \beta$ bilden, so bezeichnet $\delta \beta$ gleichfalls den kleinen Winkel der Krümmungsradien beider Stellen und man erhält für das Curvenelement zwei Ausdrücke

$$-\varrho \delta \beta = \frac{\delta y}{\cos \beta}, \text{ woraus } -\cos \beta \delta \beta = \frac{s}{\gamma} y \delta y \quad (2)$$

wenn ϱ aus (1) eingeführt wird.

Nimmt man nach Formel V und II die Summe von $\beta = 90^\circ, y = 0$ bis $\beta = \varphi, y = h$, so erhält man

$$1 - \sin \varphi = \frac{s}{2\gamma} h^2 \text{ oder } h = 2 \sin \frac{1}{2} (90 - \varphi) \sqrt{\frac{\gamma}{s}} \quad (3)$$

An einer benetzten Wand, für welche $\varphi = 0$, erhält man

$$h = 2 \sin 45^\circ \sqrt{\frac{\gamma}{s}} = \sqrt{\frac{2\gamma}{s}}$$

Wir wollen diese oft vorkommende Grösse einfach a nennen. Hagen fand für a 3,091 Millim., Desains 3,849, Poisson folgert aus Versuchen von Gay-Lussac 3,889.

Werden zwei benetzte Glasplatten einander allmählig näher gerückt (Fig. 179), so beginnt in dem Zwischenraume ein Steigen der Flüssigkeit (bei nicht benetzten Platten ein Sinken), sobald die beidseitigen Curven sich verschmelzen und die mittlere Stelle der Hohlkehle eine wahrnehmbare Krümmung annimmt. Bezeichnen ϱ und ϱ' die Krümmungsradien der tiefsten mittlern und der obersten Randstelle, so erhält man für das Steigen H der Mitte und für die Höhe des Meniskus h (254)

$$H = \frac{\gamma}{s \cdot \varrho} \text{ und } h = \frac{\gamma}{s} \left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} \right)$$

Betrachtet man die ganze Curve als Halbkreis, was, da daraus $\varrho = \varrho', h = 0$ folgen würde, nur für sehr nahe Platten erlaubt ist, so hätte man für ϱ die halbe Entfernung $\frac{1}{2} D$ der Platten zu setzen,

woraus

$$H = \frac{2 \cdot \gamma}{s \cdot D} = \frac{a^2}{D}$$

Das Steigen der Flüssigkeit wäre der Entfernung der Platten verkehrt proportional.

257. Capillarröhren. — Noch auffallender als zwischen Platten ist das Steigen der Flüssigkeit in engen Röhren, weil der Randwinkel rings herum sich bildet und in der Mitte eine Stelle mit doppelter Krümmung entsteht, so dass für diese Stelle

$$H = \frac{2\gamma}{s \cdot \varrho} = \frac{a^2}{\varrho} \quad (1)$$

was, für gleiche Krümmung $\varrho = \frac{1}{2} D$ wie vorhin, die doppelte Erhebung

angibt. Bei sehr engen Röhren verhält sich das Steigen der Flüssigkeit gleichfalls verkehrt wie die Weite. Bei äusserster Feinheit und grösster Reinheit der Röhre, wie z. B. in aus Glasröhren gesponnenen Glasfaden oder in Pflanzencanälen sieht man das Wasser auf Meterhöhe steigen.

Ist die Röhre weniger eng, so nimmt der hohle Meniskus die Gestalt eines flachen Sphäroides an. Die Theorie führt dann als weitere Annäherung auf den Ausdruck

$$H = \frac{a^2}{R} - \frac{R}{3} + 0,12876 \cdot \frac{R^3}{a^2} \text{ oder } \frac{a^2}{R} - \frac{R}{3} \quad (2)$$

wenn man auch das letzte, meist noch kleine Glied verwirft. Der Ausdruck

$$a^2 = R \left(H + \frac{R}{3} \right) \quad (3)$$

wurde vorzüglich zur Bestimmung von a^2 benutzt. Frankenheim und Sondhauss fanden so in Millim. bei 0° Temper.

	s	a^2		s	a^2
Wasser	1,000	15,37	Steinöl	0,847	7,10
Ameisensäure	1,044	10,20	Terpentinöl	0,890	6,95
Essigsäure	1,052	8,51	Alcohol	0,821	6,05
Schwefelsäure	1,840	8,40	Aether	0,737	5,05
Aetzkali	1,274	7,70	Schwef. Carb.	1,290	5,10
Citronenöl	0,838	7,10			

Brunner gibt bei 0° für Wasser 15,3321, für Olivenöl 7,4610, für Aether 5,3536. Zwischen Dichtigkeit und Höhe besteht keine einfache Beziehung; auffallend ist die sehr hohe Stelle, welche das Wasser neben ganz abweichenden andern Flüssigkeiten einnimmt.

Zu bemerken ist, dass der Theorie zufolge die Constante der Adhäsion α (255), welche bei benetzter Wand $= \gamma$ wird, die Kraft anzeigt, die am Rande der Flüssigkeit auf 1 Mm. des Umfangs hebend wirkt. Bezeichnet man den Umfang $2\pi R$ mit U , so vermag die ganze hebende Kraft αU das Gewicht der gehobenen Säule zu halten, welches letztere aus demjenigen $P = \pi H R^2 s$ des vollen Cylinders und dem p des cylindrischen Meniskus (bei ganz enger Röhre $p = \frac{1}{3} \pi R^3 s$) besteht. Die Bedingung

$$\alpha U = P + p$$

führt dann für $\frac{2\alpha}{s}$ auf den gleichen Werth von $a^2 = \frac{2\gamma}{s}$.

258. Andere Capillarerscheinungen. — 1) Zwischen zwei Platten A (Fig. 180), die am Rande $a a'$ sich berühren, am Rande $b b'$ aber wie die Blätter eines Buches etwas aus einander stehen, steigt die Flüssigkeit, nach vorhergegangener Benetzung, zu einer Curve $b a'$. Die Höhe y, y' an zwei Stellen verhält sich nahe umgekehrt der Entfernung der Platten an diesen Stellen oder umgekehrt wie die horizontalen Entfernungen derselben x, x' von der Kante $a a'$.

Man hat also $x \cdot y = x' \cdot y' = \text{Const.}$

Die Gleichung einer Hyperbel, die zu rechtwinklichten Asymptoten die verticale Kante $a a'$ und den horizontalen Wasserspiegel hat.

2) Legt man zwei ähnliche Glasplatten horizontal und stellt dazwischen eine kleine netzende Flüssigkeitsäule her, welche die Gestalt einer Rolle mit Kehle annimmt A (Fig. 181), so bewegt sie sich gegen die Kante, aus nicht netzender Flüssigkeit bestehend, B, gegen die Oeffnung der Platten. Im ersten Falle wird nämlich auf der Kantenseite der Säule, der stärkern Krümmung wegen, ein stärkerer negativer Cohäsionsdruck, im zweiten ein stärkerer positiver als auf der andern Seite vorhanden sein.

3) Hat man eine sehr weite und eine enge communizirende Röhre A und B (Fig. 182) mit netzender Flüssigkeit, so bezeichnet der Unterschied der beiden Säulen den Unterschied des Cohäsionsdruckes. Steht die Flüssigkeit der engen Röhre eben am obern Ende a , so kann ohne merkbare Aenderung dieses Standes die Flüssigkeit der weiten Röhre allmählig von α erhöht, auf gleichen Stand α' und zuletzt bedeutend höher als α auf α'' gebracht werden. Die gleiche Wasserhöhe der engen Röhre hält ganz abweichenden der weiten das Gleichgewicht. Entsprechend aber sieht man, wie die Beziehung zwischen der Gestalt der Oberfläche und dem Cohäsionsdrucke es verlangt, den hohlen Meniskus flacher, dann eben, endlich convex werden, indem der Randwinkel um die Kante herumgeht (254).

4) Kann in einer engen Röhre A (Fig. 183) eine netzende Flüssigkeit eine bestimmte Höhe a erreichen, so folgt aus der Unabhängigkeit des hydrostatischen Druckes von der Weite der Gefäße (100), dass die Höhe die gleiche bleibt, wenn auch der untere Theil der Röhre zu einem weiten Gefäß B erweitert wird. Die kleine Kraft der in a wirkenden Adhäsion vermag so eine sehr bedeutende Flüssigkeitsmenge gehoben zu halten.

259. Erscheinungen des Druckes. — 1) Man denke sich zwei bewegliche leichte Platten a, b (Fig. 184 A) parallel in eine netzende Flüssigkeit getaucht. Von dem Augenblicke an, wo die mittlere Stelle der Flüssigkeit α sich krümmt und zu steigen beginnt (256) fangen die Platten an, sich wie durch eine Anziehung gegen einander zu bewegen. Indem die Flüssigkeit sich mehr erhebt, wächst die Bewegung, bis die Platten endlich, von dünner Flüssigkeitsschicht getrennt, zur Berührung kommen. Auffallender Weise zeigen zwei unbenetzte Körper C, z. B. zwei Steinkugeln auf ganz reinem Quecksilber eine ähnliche scheinbare Anziehung.

In dem ersten Falle der benetzten Platten ist die Annäherung eine

Folge der hebenden Kraft des Meniskus, die erst in der Höhe des äussern Spiegels durch die ganze Höhe der Flüssigkeitssäule aufgehoben ist, also an allen höhern Stellen die Platten gegen einander zieht. Im zweiten Falle, der unbenetzten Körper, wo die mittlere Flüssigkeit tiefer steht, wirkt ein innen nicht aufgehobener hydrostatischer Druck von aussen und treibt dieselben gegeneinander. Eine benetzte und nicht benetzte Platte B stossen sich, wie leicht einzusehen, scheinbar ab.

Dieser Versuch erklärt die Vereinigung und Ansammlung leichter schwimmender Körper, die man namentlich am Rande der Gefässe so oft beobachtet.

2) Eine Nähnadel, die man zwischen den fettigen Fingern durchgezogen und dadurch unbenetzbar gemacht hat, schwimmt, trotz des 7 mal grössern Gewichtes, auf dem Wasser. Im Durchschnitt betrachtet (Fig. 185 A) liegt sie in einer concaven Vertiefung mit convexen Rändern und wird getragen 1) von dem hydrostatischen Druck der deprimierten Flüssigkeit, 2) von der hebenden Kraft der Concavität. Wie aber Benetzung beginnt, die Flüssigkeit sich über die Nadel emporzieht B, wird letztere durch den aus der convexen Oberfläche hervorgehenden positiven Cohäsionsdruck mit Kraft unter das Wasser herabgedrückt.

260. Das Verhalten des Quecksilbers. — Wie beim Wasser am Glase der spitze Randwinkel eine Erhebung, so veranlasst der stumpfe Winkel des Quecksilbers umgekehrt eine Depression, deren Grösse ähnlichen Gesetzen folgt. Poisson gibt dafür in Millim. den Ausdruck

$$H = 4,5746 \frac{1}{R} - 0,1932 R + 0,0559 R^3$$

Für sehr kleine R wäre auch hier die Senkung der Weite verkehrt proportional.

Die viel benutzte Tafel, welche Bouward nach Laplace für verschiedene Weiten $D = 2R$ berechnete, ist die folgende:

D	H	D	H	D	H	D	H
2	4,5599	7	0,8813	12	0,2602	17	0,0754
3	2,9025	8	0,6851	13	0,2047	18	0,0586
4	2,0388	9	0,5354	14	0,1597	19	0,0430
5	1,5055	10	0,4201	15	0,1245	20	0,0352
6	1,1482	11	0,3506	16	0,0970		

Nach dieser Tafel kann man den Fehler beurtheilen, den man beim Ablesen von Barometern (153) und Manometern begeht, wobei immer vom Gipfel der Kuppe die Rede ist.

Handelt es sich in Röhren um das von der gewölbten Quecksilberkuppe begrenzte Volumen, so muss derjenige Querschnitt gelten, für welchen der herausragende Theil der Kuppe, dem fehlenden Meniskusringe an Volumen gleich kommt. Desains hat diese Grössen mit Genauigkeit gemessen, indem er auf das ebene Ende einer angefüllten Röhre (Fig. 186 A) eine Glasplatte andrückte, durch Entfernung derselben die Quecksilberfläche sich wölben liess B, und sowohl die ganze als die hervorragende Meniskenkuppe $\alpha\beta$ und $\gamma\beta$ maass. Er erhielt in Millim. für verschiedene Weiten D folgende Zahlen:

D	$\alpha\beta$	$\gamma\beta$	D	$\alpha\beta$	$\gamma\beta$	D	$\alpha\beta$	$\gamma\beta$
1	0,321	0,178	7	1,321	0,610	13	1,651	0,627
2	0,571	0,310	8	1,412	0,630	14	1,666	0,610
3	0,779	0,410	9	1,483	0,639	15	1,677	0,590
4	0,953	0,486	10	1,543	0,643	20	1,685	0,495
5	1,102	0,544	11	1,589	0,643	30	1,670	0,355
6	1,218	0,548	12	1,625	0,637	60	1,718	0,178

Diese, wie die frühern Zahlen ändern sich aber durch die leisesten Unreinheiten des Glases, durch das Anhängen von mehr oder weniger Luft und Feuchtigkeit, durch Aenderungen der Beschaffenheit des Quecksilbers. Durch langes Auskochen z. B. nimmt, wie Dulong gezeigt, das Quecksilber Oxyd auf und diess genügt den stumpfen Randwinkel in einen rechten, sogar in einen spitzen, die Depression in eine Elevation umzuwandeln.

261. Einfluss der Temperatur. — Die Wärme übt einen bedeutenden Einfluss auf das Steigen der netzenden Flüssigkeiten in Röhren aus, weil sie einerseits das specifische Gewicht der Flüssigkeit ändert, anderseits und besonders die Wirkung der Adhäsions- und Cohäsionskräfte vermindert. Das von Laplace angenommene Gesetz, dass das Steigen der Dichte verkehrt proportional sei, hat bei genauer Prüfung sich nicht bestätigt; die Abnahme ist eine weit stärkere. Wenn man den Werth der (257) gegebenen Constante bei 0^0 durch a_0^2 bezeichnet, so lässt sich derjenige a^2 für t^0 , wie immer in solchen Fällen, näherungsweise durch

$$a^2 = a_0^2 (1 - \epsilon t + \zeta t^2 \dots)$$

darstellen.

Brunner bleibt bei 2 Gliedern stehen; Frankenheim und Sondhauss benutzen 3 Glieder und finden die Werthe:

	ϵ	ζ		ϵ	ζ
Wasser	0,0017940	— 0,00000093	Steinöl	0,0025572	+ 0,00000303
Essigsäure	0,0012356	+ 0,00000100	Terpentin	0,0022106	— 0,00000171
Schwefelsäure	0,0018195	— 0,00001120	Alcohol	0,001924	— 0,00000845
Aetzkali	0,0004776	+ 0,00000218	Aether	0,004700	—
Citronenöl	0,002018	— 0,00000339	Schwef.C.	0,001980	—

Dass diese Veränderung nicht mit der Dichte Schritt hält, beweist am entschiedensten das Wasser, das von 0 bis 4^0 sich zusammenzieht, von 4^0 an sich wieder ausdehnt und dennoch, wie Brunner gezeigt hat, eine stetige Abnahme der Höhe, wenn auch nicht ganz nach dem nämlichen Verhältnisse, zeigt. Nach C. Wolf ändert ϵ mit der Beschaffenheit des Glases und die direkt gemessene Höhe des Meniskus vermindert sich mit der Temperatur; beides deutet, der anscheinend guten Benetzung ungeachtet, auf die Entstehung eines veränderlichen Randwinkels hin. Mit engen Röhren, die, unten und oben zugeschmolzen, einer Hitze von 2 bis 300^0 ausgesetzt wurden, sah C. Wolf den Meniskus der Flüssigkeit kleiner, zuletzt eben und sogar convex werden.

Erwärmung des Quecksilbers ändert gleichfalls die Depression, die Beobachtungen werden aber durch Unreinheiten des Glases, die anhängende Feuchtigkeit, so wie durch ein Zähwerden der Quecksilberoberfläche ungemein erschwert. Frankenheim findet nach seinen Versuchen für Temperaturen unter 100^0 und über 100^0 die Ausdrücke

$a^2 = 3,978 (1 + 0,001329 t)$ und $a^2 = 4,050 (1 + 0,001430 t)$
die auf den vorwaltenden Einfluss eines zunehmenden Randwinkels hin-
deuten.

262. Adhäsionsplatten. — Befestigt man eine vollkommen reine Glasplatte, durch Gegengewichte abgeglichen, horizontal an eine Wage und bringt sie mit dem Spiegel einer Flüssigkeit zur Berührung, so hängt sie mit einer gewissen Kraft an, die man durch allmähliges Auflegen von Gegengewichten bis zum Augenblicke der Ablösung messen kann, wobei die Flüssigkeit sich mit der Platte gehoben hat. Ist die Flüssigkeit keine netzende, Quecksilber z. B., so trennt sich die Platte von der Flüssigkeit, und man misst eine von der Adhäsion, netzt sie hingegen, so bleibt eine dünne Flüssigkeitsschicht hängen und man bestimmt eine von der Cohäsion abhängige Grösse. In der That geben im ersten Falle Platten von verschiedener Substanz andere Kräfte, in dem zweiten, wo stets gleichartige Theilchen getrennt werden, immer die gleiche.

Die Flüssigkeit sei eine netzende (Fig. 187). Das grösste Gewicht P , im Augenblicke der Trennung, entspricht der grössten Höhe H der gehobenen Flüssigkeitssäule und tritt dann ein, wenn die Flüssigkeit sich an den Seiten herabgezogen hat, um ihren Randwinkel an dem Umkreise der untern Fläche zu entwickeln. Wie Poisson beweist, ist bei benetzten Seiten der Platten P gleich dem Gewicht des der Fläche entsprechenden Wassercylinders

$$P = \pi R^2 \cdot H \cdot s$$

indem die Hohlkehle der Säule a genau gleiches Volumen hat mit dem über jenem Cylinder vortretenden Theile b des gehobenen Wassers. Für die Höhe der Wassersäule hat man genähert

$$H = a \sqrt{2} - \frac{a^2}{2R}$$

Aus solchen Versuchen bestimmt, findet man für a nahe die gleichen Werthe, wie mittelst enger Röhren. Die Grenzhöhe $H = a \sqrt{2}$ für sehr grosse Platten, so wie das auf die Quadrateinheit fallende Gewicht ω , beträgt, in Millim. und Milligr. ausgedrückt

	H	ω		H	ω
Wasser	5,544	5,544	Steinöl	3,728	3,157
Ameisensäure	4,519	4,719	Terpentinöl	3,662	3,261
Essigsäure	4,13	4,34	Alcohol	3,478	2,855
Schwefelsäure	4,10	7,54	Aether	3,29	2,42
Aetzkali	3,92	5,00	Schwef. Carb.	3,19	4,11
Citronöl	3,768	3,158			

Weit grösser werden aber die Kräfte, wenn die Flüssigkeit, als unmessbar dünne Schicht zwischen zwei ebenen Platten eingeschlossen der Beweglichkeit beraubt ist. Die Trennung erfolgt dann nicht mehr durch ein successives Eindringen der ringförmigen Hohlkehle, sondern durch ein gleichzeitiges Reißen sämtlicher Theile.

Für nicht netzendes Quecksilber berechnet Poisson, nach Versuchen Gay-Lussac's mit einer Glasplatte von 59,183 Millim.

Radius $a = 2,5547$, $H = 1,3773$, $\varpi = 20,217$. Diese Resultate schwankten sehr, nicht allein wegen der Schwierigkeit des genau horizontalen Abreissens der Platte, sondern besonders wegen der Ungleichartigkeit der Quecksilberberührung.

263. Adhäsion bei Bewegung der Flüssigkeit. — Die Adhäsion äussert sich ebenfalls bei Bewegung der Flüssigkeiten in der Nähe der Wände, theils indem sie Ablenkungen der Bewegungsrichtungen hervorbringt, theils durch Festhalten einer unmerklich dünnen Flüssigkeitsschicht, an der die übrigen Flüssigkeitsfaden durch Viscosität gehindert (250) hinfließen.

Das erstere z. B. findet beim Ausgiessen aus Gefässen statt. Das nicht netzende Quecksilber fliesst, der Schwere folgend, rein ab; das netzende Wasser hingegen zieht sich, vermöge seiner Adhäsion, am Glase herab. Man hindert diess Anhängen durch rasches Ausgiessen, da dann die Kraft der Bewegung die Adhäsion überwindet, durch Ausbiegung des Gefässrandes, dessen Adhäsion abweichender von der Schwere wirkt, durch Anlegen eines Glasstabes, der, umgekehrt, der Schwere günstiger wirkt, endlich durch Aufheben der Benetzung mittelst etwas Fett.

Nähert man einem dünnen Wasserstrale einen runden Glasstab, so lässt sich ersterer vermöge der Adhäsion mehr oder weniger ablenken, indem er einen gewissen Bogen des Stabumfanges umströmt, dann aber sich ablöst. Bei angemessener Stellung des Stabes und nicht zu grosser Geschwindigkeit des Wassers, wird sogar der Stral genöthigt, ein- oder mehreremale um jenen herum zu strömen und nach Vernichtung seiner Bewegung als todt es Wasser herabzufallen.

Dass der gegen eine benetzbare Fläche treffende Wasserstral nicht, wie am Quecksilber beobachtet wird, gleich einem elastischen Balle zurückspringt (208), sondern der Fläche entlang abfliesst, rührt gleichfalls von Adhäsion her. Ist die Fläche sehr ausdehnt, so bildet der Stral, nach allen Seiten sich ausbreitend, eine immer dünnere Schicht, die am Ende vollständig in ihrer Bewegung gehemmt wird. Von da an entsteht ein höherer Wulst, mit ganz langsamer Bewegung, welches den äussern Theil der Platte einnimmt. Die Rolle der Adhäsion in den Bewegungserscheinungen hat bisher auf keine genauen Gesetze zurückgeführt werden können.

Cap. 8. Verhalten zweier Flüssigkeiten.

264. Verschiedene Fälle. — Das Verhalten zweier Flüssigkeiten A und B gegeneinander hängt natürlich ab von den Molecularkräften zwischen den Theilchen 1) je der einzelnen und 2) beider Flüssigkeiten, wobei sich die Theilchen der Grenzschicht gleichfalls in einem von dem der innern abweichendem Zustande befinden werden (253). Obgleich man es hier mit homogenen Körpern und reinen Oberflächen zu thun hat, kennt man doch das Wesen dieser Erscheinungen noch sehr wenig.

Bringt man die Flüssigkeit A in einzelnen Tropfen auf B, so können 4 Fälle eintreten:

1) A löst sich von B wie Quecksilber von Glas zu einem gerundeten Tropfen ab. So bildet Wasser auf einer bestäubten Quecksilberfläche, das aus der Verbrennung des Kaliums entstehende heisse Kali auf Wasser ein getrenntes Kügelchen. Die Wirkung der Adhäsion steht offenbar neben beiden Cohäsionen zurück.

2) Der Tropfen A breitet sich rasch aus, oft zu einer Schicht von unmessbarer Dicke. So verhalten sich flüchtige Oele auf Wasser, Aether und Alcohol auf fetten Oelen. Ein zweiter Tropfen flüchtigen Oeles mischt sich nicht sofort mit der dünnen Schicht, als hätte die Oberfläche ihre Beschaffenheit geändert. Die Adhäsion überwindet die Cohäsion von A, die von B nicht.

3) Der Tropfen A rundet sich ab, die Flüssigkeit B steigt an ihm empor und überzieht ihn. So bei fetten Oelen und Wasser, wo das Oel wie von einer dünnen Wasserblase eingehüllt ist. Dieser Fall scheint mit dem vorigen übereinzustimmen, nur dass die weniger cohäsive Flüssigkeit B die Rolle von A übernimmt und sich ausbreitet.

4) Der Tropfen A zertheilt sich zwischen die Theile von B. Die Adhäsion vermag hier sowohl die Cohäsion von A als von B zu überwinden und strebt die Theilchen möglichst zahlreich zur Berührung zu bringen. Es können so ausser chemischen, auch rein physicalische Mischungen, d. h. homogene Gemenge beider Flüssigkeiten ohne feste Mischungsverhältnisse entstehen. Beide Arten von Mischungen zu unterscheiden ist nicht immer leicht.

265. Vorgang der Ausbreitung. — Die Ausbreitung eines Tropfens A (z. B. Weingeist) (Fig. 189) auf einer Flüssigkeit B, wie Oel, darf man sich nicht, wie auf einem festen Körper, als ein Bestreben denken, den spitzen Randwinkel zu entwickeln. A kriecht nicht wie auf fester Unterlage auf B fort, sondern durch Adhäsion verbunden, bewegt sich gleichzeitig auch B. Du Bois-Reymond bemerkte zuerst, dass A, obgleich leichter, eine schwache Vertiefung bilde und, wie durch eine innere Kraft aus einander getrieben, rings das Oel vor sich herstosse. Dadurch entsteht rings herum im Oel eine wirbelnde Bewegung a und unter dem breiten Tropfen eine steigende Bewegung b, welche letztere, wenn das Oel selbst nur eine Schicht von 6—8 Millim. über Wasser C bildet, eine schwache Erhebung des letztern veranlasst.

Zur Erklärung dieser bei flüchtigen Substanzen besonders auffallenden Erscheinung nimmt Du Bois-Reymond eine eigene Kraft, eine zwischen den Theilchen wirkende freie Abstossung an, stark genug das mechanische Phänomen hervorzubringen. Vielleicht hat man diese Kraft aus der an der Berührungsfläche wirkenden Adhäsion abzuleiten, welche an jeder Stelle die in Berührung bleibenden Theilchen mehr und mehr aus einander treibt, um zwischen ihnen neue zur Berührung zu bringen. Flüchtigere Flüssigkeiten würden dieses Auseinanderweichen stärker zeigen als weniger flüchtige. Es wäre diese Ausbreitung die erste Annäherung zur physikalischen Mischung, in einer Fläche nur, statt im Raume sich entwickelnd.

266. Verdrängung der Flüssigkeiten. — Zwei Tropfen, die man

neben einander auf eine feste Unterlage bringt, bleiben gegen einander indifferent bis sie sich berühren. Dann aber beginnt eine Verdrängung des einen durch den andern, die man durch Verstärkung des verdrängenden Tropfens zu einem wirklichen Fortwälzen des verdrängten steigern kann. An den Grenzstellen, wo die Verdrängung erfolgt, wirken die Molecularkräfte der beiden Flüssigkeiten und des festen Körpers; es vereinigen sich 2 Cohäsionen und 3 Adhäsionen um die noch wenig aufgeklärten Erscheinungen hervorzubringen. Da die Verdrängung auf beinahe allen benetzten Körpern auf gleiche Weise geschieht, so spielt die Natur der Flüssigkeiten eine entscheidendere Rolle als diejenige des Körpers.

Nach Fusinieri folgen verschiedene Flüssigkeiten; von der stärker zu der schwächer sich ausbreitenden, der folgenden Ordnung:

Schwefeläther, Aetherarten, Alcohol, Terpentin, flüchtige Oele;
Harzwasser, Steinöl, fette Oele, Balsamarten, Terpentin, Thran;
Säuren, von der Schwefels. zur Essigsäure;
Salzlösungen, desto stärker, je gesättigter;
Seife, Ammoniak, Kali, Natronlösungen;
Wasser.

Frankenheim folgert hieraus, dass eine Flüssigkeit um so stärker nach Ausbreitung strebt, je schwächer ihre Cohäsion im Vergleich zum specifischen Gewichte ist, oder je weniger sie in einer vorher benetzten Röhre steigt.

Bei der vorerwähnten Ausbreitung von Alcohol auf Oel (265) geschieht es, wenn letzteres eine Dicke von nur wenigen Millim. über der festen Unterlage hat, dass der Weingeist das Oel durchbricht, die Unterlage blosslegt und nun, gemäss den Erscheinungen der Verdrängung, das Oel zu einem Ringe aus einander treibt.

267 Diffusion der Flüssigkeiten. — Wie eine Flüssigkeit bei gewaltsamem Eindringen in eine andere nach mechanischen Gesetzen sich ausbreitet, wurde schon früher erläutert (131). Ganz anders verhält es sich, wenn zwei ruhende Flüssigkeiten, die sich physicalisch mischen können (264), in Berührung stehen. Selbst wenn die schwerere unten liegt, beginnt an der Berührungsfläche eine durchgreifende Molecularbewegung, die Diffusion, welche von Schicht zu Schicht fortwirkend Theilchen der untern Flüssigkeit in die obere, und umgekehrt Theilchen von dieser in jene verbreitet und, abgesehen von der störenden Schwere, nach vollständiger Ausgleichung der Mischung zielt.

Die Verbreitung eines aufgelösten Salzes im Wasser oder in eine andere chemisch unwirksame Flüssigkeit ist von ähnlicher Art. Auch hier scheinen nicht die letzten chemischen Atome, sondern die physicalisch gleichartigen Theilchen, die Molecule (244), nach gleichförmiger Mengung zu streben. Die Eigenschaften der sich vermengenden Theilchen erlöschen nicht, wie bei chemischen Verbindungen, machen sich im Verhältniss zu ihrer Menge geltend, und sind gegenseitig an kein bestimmtes Gewichtsverhältniss gebunden, so lange man unter dem Sättigungspunkte (237), derjenigen Menge aufgelösten Salzes, bei welcher Krystallisation beginnt, bleibt.

Denkt man sich zwei der Mischung fähige Flüssigkeiten mit einer

Fläche a zur Berührung gebracht, so werden in einer kurzen Zeit δt Mengen δp , $\delta p'$ übergehen, welche mit $a \delta t$ proportional sind. Die sich berührenden Schichten ändern dadurch ihre Beschaffenheit; der Uebergang, bei gleichhergestellter Mischung ganz erlöschend, nimmt allmählig ab und hängt in jedem Augenblicke nothwendig von dem noch vorhandenen Concentrationsüberschuss der sich berührenden Schichten an der einen oder andern Substanz ab. Hat die erste Flüssigkeit, deren Concentration oder Gewichtsmenge der Volumeneinheit anfangs S war, durch Abgabe auf s sich vermindert und dagegen die Concentration s' der zweiten Substanz gewonnen; die zweite Flüssigkeit B ihre Concentration von S' auf s' vermindert und s gewonnen, so ist es am einfachsten anzunehmen —, immerhin fehlt es an genauen umfassenden Versuchen, dass die übergehenden Mengen δp , $\delta p'$ den eben bestehenden Concentrationsunterschieden $s - s'$ und $s' - s$ proportional seien. Man hätte dann

$$\delta p = k a (s - s') \delta t, \quad \delta p' = - k' a (s' - s) \delta t$$

wo k , k' Diffusionsconstanten darstellen.

268. Allgemeine Resultate. — Graham hat eine grosse Zahl von Versuchen mit Salzlösungen und Wasser angestellt. Ein eben abgeschliffenes, mit der nach bekanntem Gewichtsverhältnisse gebildeten Salzlösung angefülltes Gläschen A (Fig. 190), wurde in ein grosses mit Wasser gefülltes Gefäss B gestellt, während mehreren Tagen der Diffusion überlassen, dann durch Aufschieben einer Glasplatte geschlossen und auf den abgegebenen Salzgehalt geprüft. Die Hauptergebnisse waren:

1) Bei gleichprocentiger Zusammensetzung (nach Gewicht) geben verschiedene Salzlösungen in gleicher Zeit verschiedene Diffusionsmengen, doch zeigen sich Gruppen, deren Glieder, obgleich an Atomgewicht und specifischem Gewicht sehr verschieden, nahe gleiche Diffusion haben. So die Gruppe: Kohlens. und Schwefels. Kali, Schwefels. Ammoniak, Essigs. Blei, Doppelkohlens. Kali, Chroms. und Doppelchroms. Kali; diejenige Salpeters. Kali, Chlors. Kali, Salpeters. Ammoniak, Kalium und Ammon. Chlorid.

2) Bei schwachen Lösungen verhalten sich die Diffusionsmengen in gleicher Zeit, proportional dem procentigen Gehalt und bleiben sich in den vorigen Gruppen von Lösungen nahe gleich. Bei concentrirten Lösungen erscheint die Diffusion verhältnissmässig schwächer und weicht bei den vorigen Salzen aus einander.

3) Die Diffusion schwacher Lösungen in verschiedenen nicht langen Zeiten, ist nahe der Zeit proportional; nach längerer Zeit wird sie, wie leicht begreiflich, schwächer. Starke Lösungen folgen anderen Gesetzen.

4) Erwärmung begünstigt die Diffusion, zwischen 0 und 15° änderte sie für gleichwerthige Salze nahe auf gleiche Weise. Für Kohlens. Kali und Schwefels. Ammoniak stieg die Vermehrung für 1° auf 0,04 der Diffusion bei 0°.

5) Die Diffusion eines Salzgemisches erfolgt für die verschiedenen Salze nach verschiedenen, oft unabhängigen, oft etwas veränderten Verhältnissen. So treten die Chloride stärker aus als die Sulfate und Car-

bonate, die Kali stärker als die Natronsalze. Die Diffusion bewirkt dann eine Sonderung der Stoffe.

6) Selbst schwache chemische Verbindungen werden bisweilen durch Diffusion zerlegt. Aus einer Alaunlösung z. B. geht mehr schwefels. Kali über, als das Verhältniss zur schwefels. Alaunerde verlangt.

7) Diffundirt eine Salzlösung in eine andere, so zeigt sich bei geringer Concentration der letztern, oft wenigstens, kein störender Einfluss; allerdings aber bei stärkern Concentrationen.

269. Der Diffusionscoefficient. — Als Beispiel der sehr ungleichen Diffusion verschiedener Stoffe mögen die folgenden Graham'schen Resultate dienen, welche mit Lösungen von 20 Gewichtstheilen auf 100 Wasser in 8 Tagen bei 15° — 17° C erhalten wurden. Der Uebergang des Chlornatriums ist 1 gesetzt.

	Spec. G.	Diffus.		Spec. G.	Diffus.
Schwefelsäurehydrat	1,108	1,1813	Stärkezucker	1,061	0,4591
Chlornatrium	1,1265	1	Rohrzucker	1,071	0,4557
Salpeters. Natron	1,120	0,8787	Geschm. Rohrz.	1,066	0,4467
Rohrzucker	1,069	0,5547	Gummiarab.	1,060	0,2256
Schwefels. Magnesia	1,185	0,4673	Eiweiss	1,053	0,0525

Bemerkenswerth ist der starke Uebergang der Schwefelsäure, und der sehr geringe des Eiweisses.

Leider eignen sich die Versuche von Graham, wegen der nicht vollkommen cylindrischen Gestalt und unvollständigen Anfüllung der Gläser nicht zu einer Berechnung der Diffusionsconstante aus dem Resultate des länger dauernden veränderlichen Prozesses.

Beilstein suchte mittelst Gläschen von der Form (Fig. 191), in welchen das eindringende leichtere Wasser emporstieg, während das austretende Salz im äussern Wasser herabsank, grössere Gleichförmigkeit der Concentration aller Schichten zu erhalten. Betrachtet man sie im ganzen Gläschen zu jeder Zeit als gleich, was jedenfalls für den untern Theil nicht richtig sein kann, aber mit der Zeit veränderlich, so bestätigt sich der Ausdruck

$$\delta p = k \cdot a \cdot p \cdot \delta t$$

wo p das Verhältniss des Salzes zum Wassergewicht der Lösung, und k die Diffusionsconstante ist. Die Vergleichung von k mit dem Werthe dieser Grösse für Chlorkalium ergab

Chlorkalium	1	Schwefels. Kali	0,6987
Salpeter	0,9487	Kohlens. Natron	0,5436
Chlornatrium	0,8337	Schwefels. Natron	0,5369
Doppeltschwefels. Kali	0,7453	Schwefels. Magnesia	0,3857
Kohlens. Kali	0,7371	Schwefels. Kupferoxyd	0,3440

270. Die Diffusionsströmung. — Andauernde constante Diffusionsverhältnisse erhält man einzig auf dem von Fick eingeschlagenen Wege. Eine verticale Röhre a (Fig. 192) geht unten von einem geschlossenen Gefässe A aus, das mit einer durch überschüssiges Salz gesättigt erhaltenen Salzlösung angefüllt ist und endet oben in ein weites und tiefes Wassergefäss B , dessen Wasser erneuert wird. Die Zustände an beiden Enden der Röhre, unten Sättigung, oben Reinheit von Salz, sind als bleibende zu betrachten; es stellt sich daher nach einer hinlänglichen

Zeit von mehreren Tagen in jeder Schicht ein bleibender Salzgehalt her, der aber nicht ein Zustand des Gleichgewichtes ist, sondern sich dadurch erhält, dass jede Schicht von der tiefern in der Zeiteinheit so viel Salz erhält, als sie der obern abgibt. Aus dem Gewichtsverluste einer kleinen Glaskugel in verschiedenen Schichten erkannte Fick, dass die Abnahme der Concentration u , d. h. des Ueberschusses des specifischen Gewichtes s über Wasser oder $s - 1$, gleichmässig vor sich gehe. Hat man auf eine Entfernung Δx zweier Schichten den Unterschied Δu der Concentration, so folgt daher

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{U}{L} \quad \text{und} \quad u = U \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

U bezeichnet die Concentration der Sättigung am untern Ende, L die Länge der Röhre und x die Entfernung einer Stelle vom untern Ende.

Nimmt man den Salzgehalt jenem Ueberschuss des specifischen Gewichtes proportional an, so beweist jene gleichförmige Konzentrationsabnahme, entscheidender als andere Versuche, dass der Uebergang des Salzes bei gleichem Konzentrationsunterschied zweier Schichten gleich und diesem Unterschied proportional ist. Die Menge Salz, welche dann in der Zeit t durch die Fläche a übergeht und oben austritt, kann dargestellt werden durch

$$P = k \cdot a \cdot \frac{U}{L} \cdot t$$

wo sich die Constante k , wegen des unveränderlichen Wassergehaltes jeder Schicht, auf die Diffusionsströmung des Salzes allein bezieht, und die Salzmenge angibt, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit übergeht, wenn die Konzentrationsdifferenz auf die Länge Eins der Einheit gleich ist. Versuche von Fick mit Röhren von verschiedener Länge haben die Gültigkeit der Formel erwiesen, und für Kochsalz auf 24 St., alles in Millim. gemessen, und die Concentration der Sättigung $U = 1$ gesetzt, ergeben, dass k bei $15^{\circ},3$ und $20^{\circ},5$ die Werthe 0,0304 und 0,0366 erhält.

271. Endosmose und Exosmose. — Trennt man zwei mischbare Flüssigkeiten durch eine feinporöse Scheidewand, z. B. von Holz, Thon, gebrannter Erde, Blase, welche dieselben einzeln, selbst unter einigem Druck nur sehr langsam durchschwitzen lässt, so beginnt durch die Poren eine anhaltende Diffusion, welche als Doppelströmung Theilchen einer jeden Flüssigkeit in die andere überführt und oft nach Wochen erst mit der vollständigen Ausgleichung beider Gemische ein Ende erreicht. Da gewöhnlich die übergehenden Volumina der beiden Flüssigkeiten ungleich sind, so wird der Stand der einen, den hydrostatischen Gesetzen zuwider, steigen, derjenige der andern sinken, namentlich bei Anwendung erweiterter Gefässe für die erste der Flüssigkeiten (Fig. 192). Die beiden Strömungen, gleichzeitig durch die gleichen Poren vor sich gehend, hat Dutrochet Endosmose und Exosmose genannt.

Hauptbedingungen der Erscheinung sind: 1) die Mischbarkeit der Flüssigkeiten (264) auf physicalischem oder chemischem Wege.

Oel und Wasser, Wasser und Quecksilber zeigen die Erscheinung nicht; 2) Benetzbarkeit der Scheidewand, wenigstens durch Eine der Flüssigkeiten, sonst wäre nach den Gesetzen der Capillarität kein Eindringen in die sehr feinen Poren möglich. Das Verhältniss der beiden Strömungen hängt überdiess ab: 1) von der Natur, 2) der Concentration, 3) der Viscosität der beiden Flüssigkeiten, endlich 4) von der Substanz der porösen Scheidewand, und 5) der Natur ihrer Porosität. Die Erscheinung ist demnach eine sehr verwickelte.

272. Das endosmotische Aequivalent. — Vierordt und Jolly haben angenommen, — was sich später jedoch nur innerhalb enger Grenzen als richtig erwiesen hat, — dass die sich auswechselnden Salz- und Wassermengen ein gleiches Verhältniss bewahren und wie bei der Diffusion der Concentrationsdifferenz proportional seien. Endosmotisches Aequivalent heisst dann die Wassermenge, welche, mit 1 Gewicht Salz sich austauschend, in das Endosmometer eintritt. Man bestimmt dasselbe aus dem Salz- und Wassergehalte der Röhre am Anfange des Versuches und nach einem längern ruhigen Gang, während dessen das äussere Wasser durch Erneuerung rein erhalten, die entstehende hydrostatische Druckdifferenz durch angemessenes Einsenken der Röhre aufgehoben wird.

So fand Jolly die folgenden endosmotischen Aequivalente:

Kalihydrat	215,745	Zucker	7,157
Schwefels. Kali	12,277	Alcohol	4,203
Schwefels. Magnesia	11,655	Chlornatrium	4,192
Schwefels. Natron	11,624	Saures Schwefels. Kali	3,345
Schwefels. Kupferoxyd	9,564	Schwefels. Hydrat	0,349

Versuche von Graham, in denen an einem Endosmometer von der Form (Fig. 193) bald das Salz- und Wassergewicht, bald bloss das Steigen der innern Flüssigkeit bestimmt wurde, haben erwiesen, dass nur in einigen Fällen, wo die Scheidewand sich ganz indifferent verhält, der Vorgang der einfachen Diffusion parallel geht. So erhielt er für Schwefels. Magnesia

Salzgehalt auf 100 Wasser	2	5	10	20
Diffusion (ohne Membran)	2	4,43	8,21	13,73
Endosmose (mit Membran)	2	4,12	7,48	12,50
Steigen der Salzlösung	2	4,73	9,08	16,54

In den meisten Fällen ist aber der Vorgang weniger einfach, das Aequivalent zeigt sich grösser bei schwacher als starker Concentration und der vorwaltende Strom richtet sich in der Regel von der mehr sauern zu der mehr basischen Flüssigkeit. Diess scheint aus den folgenden Zahlen über das Steigen verschiedener 1 % Lösungen bei ihrem Austausch mit reinem Wasser hervorzugehen, Zahlen, denen indess nur relative Bedeutung zukommt

Oxalsaure	— 148	Salpeters. Kupferoxyd	+ 204
Salzsäure	— 92	Phosphors. Natron	— 311
Zinnchlorid	— 46	Kupferchlorid	— 351
Chlormangen	— 2	Essigs. Thonerde	— 393
Chlornatrium	+ 12	Eisenchlorid	— 435
Salpeters. Natron	— 14	Kohlens. Kali	— 439
Chlorcalcium	— 20	Chloraluminium	— 540
Schwefels. Kali	21		

Die starke Endosmose der letzten Substanzen glaubt Graham abhängig von einem chemischen Angriff oder einer besonders starken Anziehung der Membran; da bei indifferenten Scheidewänden, wie poröse Erden, dieselbe nicht eintritt.

Mit der Temperatur wächst die Endosmose wie die Diffusion (268) doch auf eine nicht bekannte Weise.

273 Einfluss der Scheidewand. — Der Einfluss der Scheidewand, zumal wenn sie organischer Natur ist, bleibt immer der unaufgeklärteste Theil der Erscheinung. Brücke sucht sich davon Rechenschaft zu geben, indem er annimmt, dass die Membran durch alle ihre Poren sich mit einer dünnen Schicht der stärker angezogenen von beiden Flüssigkeiten (bei Salzlösungen und Wasser mit letzterem) überziehe und die Diffusion nun innerhalb der flüssigen Röhren mit einer nach der Axe zunehmenden Concentration, welche aber diejenige der anstossenden Flüssigkeit nicht übersteigen kann, vor sich gehe. Die Erscheinung würde nothwendig von der Zahl, der Grösse und Natur der Poren abhängen, von Umständen, die man bisher nicht zu sondern vermochte.

Nach Versuchen von Liebig nehmen Membranen eine um so geringere Menge von Salzlösung, die Quellungsmenge, auf, als diese concentrirter ist. So füllte sich 1 Gewicht Ochsenblase mit folgenden Gewichten Lösung

Lösung v.	0 Salz	3,0
»	» 9 %	2,88
»	» 13,5	2,35
»	» 18,0	2,19

Ueberdiess aber zeigten Ludwig und Cloetta, dass in solchen Fällen der Procentgehalt der aufgesogenen Flüssigkeit schwächer ist als der der umspülenden. Bei Kochsalz war das Verhältniss der Concentration beider 0,84 und 0,82, also nahe constant, bei Concentration der äussern Flüssigkeit von 24,238 und 5,493 %; bei Glaubersalz stieg jenes Verhältniss von 0,39 auf 0,57 für einen Procentgehalt, der von 11,692 auf 4,803 abnahm. Die Flüssigkeit, die aus den Poren sich auspressen lässt, nähert sich wieder mehr der äussern Concentration, als Beweis, dass die stärker gehaltene, zurückbleibende Flüssigkeit reineres Wasser ist.

Die Sonderung der Stoffe aus gemischten Flüssigkeiten zeigt sich bei der Endosmose noch auffallender als bei der einfachen Diffusion, und hängt gleichfalls von der Natur der Membrane wesentlich ab.

Leider ist es bisher unmöglich gewesen, durch Anwendung von Scheidewänden von gleichmässiger, bekannter Porosität, die Erscheinung auf ihre einfachste Form zurückzuführen. Jedenfalls aber spielt die Endosmose und Exosmose in der organischen Natur eine ungemein wichtige Rolle, denn eine Menge Vorgänge, die Aufsaugung, die Abscheidung, die Ernährung, die Säfteerneuerung u. s. f. erfolgen unter der genannten Bedingung einer Trennung abweichender, meist gemischter Flüssigkeiten, durch eine Membran von besonderer Beschaffenheit.

Cap. 9. Erscheinungen der Gase.

274. Diffusion der Gase. — Werden zwei Substanzen zusammengebracht, so können zweierlei Gründe ihre physicalische Mischung hindern: eine über die Adhäsion vorwaltende Cohäsion, wenigstens der einen Substanz, oder eine vorwaltende Abstossung der einen gegen die andere. Bei Gasen, welche man in der Oeffnung zweier communizirender Behälter zur Berührung bringt, fällt die erste Ursache der Trennung weg; man sollte aber erwarten, dass die Expansivkraft der einen Theile das Eindringen der andern hindern müsste. Dalton aber erkannte, dass, selbst bei gleichem Drucke in beiden Behältern, selbst durch eine lange Röhre, stets eine beidseitige Diffusion eintritt, welche nach längerer Zeit das Gemenge beider Behälter vollständig ausgleicht. Von jedem Gase geht so viel über, als wäre der andere Raum leer, woraus Dalton das Gesetz ableitet, dass ein Gas das andere nicht stört, keine oder jedenfalls eine kleinere Expansivkraft als gegen seine eignen Theile ausübt.

Aus der Diffusion entsteht in der Regel ein reinphysicalisches Gasgemenge. Das entstehende Volumen, unter gleichem Druck gemessen, ist der Summe der einzelnen Volumina gleich und hinwieder der Druck in einem beliebigen Volumen der Summe des Druckes der einzelnen Gase. Ueberdiess mengen sich die Gase in allen möglichen Verhältnissen, wobei jedes seine Eigenschaften vollständig bewahrt und im Verhältniss zu seiner Dichte geltend macht.

Bringt man hiernach die Volumina $v, v', v'' \dots$ verschiedener Gase, unter den Drucken $p, p', p'' \dots$ gemessen, in einen nämlichen Raum V , so entsteht in demselben ein Gesamtdruck P , Summe der Drucke $p \frac{v}{V}$,

$p' \frac{v'}{V}, p'' \frac{v''}{V} \dots$ der einzelnen Gase. Man erhält:

$$P = (p \cdot v + p' v' + p'' v'' + \dots) \frac{1}{V}$$

Wird bei allen Volummessungen, durch Heben oder Senken der Glocke, der Druck gleich erhalten, so folgt unmittelbar

$$V = v + v' + v'' \dots$$

wie oben angegeben wurde.

275. Die Diffusion der Atmosphäre. — Wiewohl das Endresultat der Diffusion eines Gases in den Raum eines andern gleich erscheint als wäre dieser Raum leer gewesen, so bedarf es doch zum Uebergang einer weit längern Zeit. Das vorhandene Gas wirkt als ein mechanisches Hinderniss und verzögert die Diffusion um so mehr, je dichter es ist. Auch die Schwere kann bald begünstigend, bald verlangsamend wirken. So erklärt sich, dass vorübergehend andere Anordnungen als eine gleichmässige Mengung sich zeigen können. Die schwere Kohlensäure z. B. lässt sich wie eine Flüssigkeit von einem Gefäss in ein

anderes giessen und füllt in Kellern, wo Wein gärt, oft lange Zeit den untern Raum.

Das äussere Luftmeer verhält sich gegen alle localen Gasentwicklungen als ein unbegrenzter Diffusionsraum, in dessen unterem Theile nur geringe vorübergehende Schwankungen des Gasgemenges statt haben. Berzelius setzt die mittlere Zusammensetzung der Luft, mit Rücksicht auf Volumen, Gewicht und Druck ihrer Bestandtheile folgendermassen fest:

	Vol. auf 100	Gew. auf 100	Druck auf 760 Millim.
Stickstoff	78,999	75,55	574,180
Sauerstoff	21,000	23,32	177,232
Kohlensäure	0,001	1,03	0,760
Wasserdampf		0,10	7,828

Die beiden letzten Bestandtheile sind veränderlich, von Jahreszeit, Witterung, Oertlichkeit u. s. f. abhängig; die beiden ersten hingegen behaupten, so weit Beobachtungen reichen, ein merkwürdig constantes Verhältniss. In allen Gegenden der Erde, von der heissen zur kalten Zone, über dem Meere wie über dem Festlande, von der Erdoberfläche bis auf die von Gay-Lussac erreichte Höhe von 7000 Met. (174) ergab sich, mit geringen Abweichungen, das Verhältniss von 79 Stickstoff auf 21 Sauerstoff. Dennoch ist die Atmosphäre keine chemische Verbindung, sondern eine in unendlich langer Zeit durch Diffusion zu Stande gekommene gleiche Mengung der ursprünglichen Sauer- und Stickstoffmengen. Zudem lehrt eine ungefähre Rechnung, dass die chemischen Prozesse der Erdoberfläche in Jahrtausenden das vorhandene Verhältniss nicht merkbar zu ändern vermögen.

Aus Dalton's Gesetz von der Gleichgültigkeit der Gase gegeneinander müsste übrigens folgen, dass der Luftkreis aus zwei unabhängigen Sauerstoff- und Stickstoff-Atmosphären bestände, jene, aus dem schwereren Gase, rascher, diese, aus dem leichtern, nach oben langsamer abnehmend. In die Höhe steigend, müsste man das Verhältniss des Sauerstoffs zum Stickstoff geringer werden, für 8000 Met. z. B., nach Frankenheim von 23,55 : 76,45 (dem Gewichte nach) auf 21,33 : 78,27 abnehmen sehen. Die Beobachtungen, auf relativ geringe Höhen beschränkt, haben über diesen Punkt nicht entschieden, zumal die Bewegungen des Luftmeeres das Gemenge auszugleichen streben.

276. Diffusion durch poröse Körper. — Wie bei Flüssigkeiten tritt auch bei Gasen eine Diffusion durch poröse Körper ein (271), indem jede Pore entgegengesetzten Gasströmen zum Durchgange dient. Die Entdeckung und erste Untersuchung dieser Erscheinung verdankt man Graham. Er füllte graduirte Röhren, die oben mit einem gepressten trocknen Gypsstöpsel verschlossen waren, über absperrendem Quecksilber mit Gas und beobachtete die Menge atmosphärischer Luft, welche nach einer zum Austritt des ganzen Gases hinlänglichen Zeit, sich ausgetauscht hatte, indem während des Vorganges der Druck durch Eintauchen oder Ausheben gleich erhalten wurde. So gelangte er auf das einfache Gesetz, dass die Luftvolumina V , V' , die unter gleichem Drucke sich auswechseln, den Wurzeln aus dem specifischen Gewicht verkehrt proportional sind

$$V : V' = \sqrt{s} : \sqrt{s'}$$

Dasselbe Gesetz, welches (177) für das Ausströmen der Gase in den leeren Raum, — eine wesentlich verschiedene Erscheinung —, Gültigkeit hat. Graham fand z. B., dass folgende Volumina V mit 1 Vol. atmosphärische Luft sich austauschten:

	$1 : \sqrt{s}$	V		$1 : \sqrt{s}$	V
Wasserstoff	3,7947	3,83	Sauerstoff	0,9487	0,9487
Kohlenwasserstoff	1,3414	1,344	Schw. Wasserst.	0,9204	0,95
Oelbild. Gas	1,0140	1,0191	Stickst. oxydul	0,8091	0,82
Kohlenoxydgas	1,0140	1,0149	Kohlensäure	0,8091	0,812
Stickstoff	1,0140	1,0143	Schweiflige S.	0,6708	0,68

Gleich dichte Gasarten, wie Kohlenoxyd und Stickstoff, geben dem Gesetze entsprechend keine Aenderung des Volumens, wenn man zwei begrenzte Räume durch eine poröse Scheidewand in Verbindung setzte. Von atmosph. Luft (bereits ein Gemenge) strömten hingegen in gleicher Zeit in Chlor, Kohlensäure und Wasserstoff Volumina über, die sich wie 1 zu 0,302; 0,623; 1,277 verhielten. Mitschell sah Diffusion bis zu einem Gegendruck von 8 Met. vor sich gehen.

Je leichter die Diffusion, desto schwerer wird es, Gase abzusperren. Kork und Glasstöpsel, Membranen, selbst dicke Cautschucplatten, Absperren durch wenig Quecksilber, welches ohne Auskochen nie vollständig am Glase anliegt, genügen auf die Länge zur Hinderung jedes Entweichens nicht, am wenigsten beim leichten Wasserstoff.

277. Versuche von Bunsen. — Bunsen wandte ein graduirtes in Quecksilber tauchendes Diffusionsrohr A (Fig. 194) an, oben mit einem trocknen Gypspfropfen a versehen und darüber durch einen Glasstöpsel b verschliessbar. Die Röhre c führt dem Raume B über dem Stöpsel beständig Gas zu, das durch d entweicht. Nachdem durch mehrfaches Durchtreiben der Gypspfropf von aller Luft gereinigt, wird das Diffusionsrohr gehoben, der innere Druck um die gehobene Quecksilbersäule vermindert und kraft des Druckunterschiedes die Diffusion eingeleitet. Ein Mechanismus gestattet durch langsames stetiges Heben den Druck gleich zu erhalten, und dabei die Hebung oder das in bestimmter Zeit eingeströmte Gas zu messen.

Liess man Gas unter dem äussern Drucke P in den auf den Druck $P-p$ erhaltenen Raum desselben Gases durch die Fläche a einströmen und beobachtete in der Zeit t das gleichmässig eingeströmte Vol. V , so würde diess auf die Zeiteinheit, unter dem Normaldruck einer Atmosphäre gemessen, auf die Fläche 1 ein Volumen

$$V' = \frac{(P-p) V}{760 \cdot t \cdot a}$$

darstellen, was man als Maass für die Stärke oder Geschwindigkeit der Diffusion betrachten darf.

Es ergab sich so, dass innerhalb kleinerer Druckdifferenzen von 16—52 Millim. (grössere geben erhebliche Abweichungen) die Geschwindigkeit der Diffusion dem Druckunterschiede p proportional ist. Dagegen zeigte sich bei Vergleichung zweier Gase die Diffusion nicht verkehrt proportional mit der Wurzel aus dem speci-

fischen Gewichte; bei Sauerstoff und Wasserstoff verhielt sie sich wie 1 : 2,735 statt wie 1 : 3,995. Hiernaeh ähnelt der Durchgang durch die Gypsporen mehr dem Abfluss durch enge, einen Widerstand entwickelnde Canäle (251), als demjenigen durch enge Oeffnungen in dünner Wand (177).

Nun wurde erwiesen, dass der Gypspfropf, vom Volumen v , keinen eigenthümlichen Einfluss bei verschiedenem Drucke oder auf verschiedene Gase ausübe, sondern einfach einen der Grösse der Porenräume entsprechendes Volumen βv des Gases einschliesse. Verschluss man nämlich nach Anfüllung mit einem Gase die Diffusionsröhre über dem Propfe, bei einem Vol. V und Druck P , so war, nach dieser Voraussetzung, die Gasmenge $(V + \beta v) P$ und musste sich gleich bleiben, wenn man auch neben der Röhre den Druck auf P' , das Volumen auf V' veränderte. Aus

$$(V + \beta v) P = (V' + \beta v) P' \text{ folgt aber } \beta v = \frac{P' V' - P V}{P - P'}$$

eine Grösse, die sich mit dem gleichen Pfropfe für verschiedene Gase, für Wasserstoff und atm. Luft, für Kohlensäure und atm. Luft als gleich ergab.

Endlich liess Bunsen zwei Gase sich austauschen; das äussere unter dem Drucke P , erneuerte sich beständig, gleich wie bei einem unendlich grossen Diffusionsraume; das andere befand sich in der Diffusionsröhre unter dem während des Prozesses constant erhaltenen Drucke $P - p$. Ist das anfängliche Vol. V nach der Zeit t zu $v + w$ geworden, wo v die noch vorhandene Menge des ausströmenden, w die eingeströmte des äussern Gases, auf den Druck $P - p$ bezogen, bezeichnen, so übt jedes derselben für sich (274) einen Druck $\frac{(P - p) v}{v + w}$ und

$\frac{(P - p) w}{v + w}$ aus. Der Druckunterschied für das austretende Gas und für das eintretende werden sein

$$\frac{(P - p) v}{v + w} \text{ und } - \left[P - \frac{(P - p) w}{v + w} \right] = - \frac{P \cdot v + p w}{v + w}$$

Fliesst jedes Gas ungestört vom andern, gemäss seiner Druckdifferenz durch den Pfropf, und erhält man den Druck aussen und innen gleich, setzt also $p = 0$, so sind die in der Zeit δt aus- und eintretenden Gasmengen:

$$\delta v = - \alpha \frac{P \cdot v}{v + w} \cdot \delta t \text{ und } \delta w = \alpha' \frac{P \cdot v}{v + w} \delta t \text{ woraus } \frac{\delta v}{\delta w} = - \frac{\alpha}{\alpha'}$$

Da α, α' zwei von der Natur jedes Gases und der Beschaffenheit des Pfropfes abhängige Constanten sind, so würden nicht bloss die nach vollendeter Diffusion ausgetauschten Volumina, sondern die in jeder beliebigen Zeit sich austauschenden, ein constantes von der Natur der Gase und des Pfropfes abhängiges Verhältniss behaupten. Die Versuche, welche unter der Schwierigkeit leiden, den Druck innen und aussen ganz gleich zu erhalten, bestätigten diess Gesetz, wenn man zu verschiedenen Zeiten die Gasanalyse des Gemenges vor-

nahm. Dagegen stimmten sie nicht mit dem Gesetze von Graham (276), indem das Verhältniss sich von der Natur des Pfropfes abhängig zeigte.

278. Adhäsion der Gase. — Feste Körper, im vollkommen reinen frisch ausgeglühten Zustande in ein Gas gebracht, machen einen kleinen Theil desselben verschwinden. Doch scheint nur in seltenen noch wenig aufgeklärten Fällen, — wie z. B. wenn glühendes Eisen von Kohlenoxyd durchdrungen wird und sich in Cementstahl umwandelt —, ein wirkliches Eindringen in das Innere des festen Körpers die Ursache zu sein. In den meisten Fällen rührt es von einer oberflächlichen Adhäsionserscheinung her, einer oberflächlichen Verdichtung, bis die freiwirkende Expansivkraft der äussern gleich ist. Jeder feste Körper überzieht sich so mit einer dünnen Haut dichtern Gases, die bei starker Anziehung oft mit Hartnäckigkeit an ihm haftet und ungeachtet ihrer unmessbaren Dicke bei manchen Oberflächenerscheinungen im Spiele ist. Dämpfe verwandeln sich dann wohl in Flüssigkeit, wie man es z. B. am Glas beobachtet, das in der freien feuchten Luft sich stets mit einer dünnen Haut von Wasser bedeckt.

Erst Magnus ist es gelungen, diesen schon von Dalton und Saussure angenommenen Vorgang für eine bekannte Oberfläche einer wirklichen Messung zu unterwerfen. Er bestimmte nämlich die Ausdehnung der schwefligen Säure von 0 bis 100° in zwei identischen Glasröhren, deren eine innen leer, die andere mit 250 dünnen Glasstäben erfüllt war, daher eine 13,5 mal grössere Oberfläche darbot. In der ersten erhielt man eine Ausdehnung von 0,3822, in der zweiten von 0,3896 des jeweiligen anfänglichen Volumens, ein Unterschied, der sich nur dadurch erklären liess, dass das Quantum Gas beim Erwärmen durch Ablösung eines Theiles des bei 0° anhängenden sich vermehrt hatte. Magnus berechnet hieraus, dass 1 Quadr. Millim. Glasfläche bei 0° gegen 0,0008 Cub. Millim. schwefelige Säure mehr festhält als bei 100°.

Da diese Wirkung eine oberflächliche ist, so wirken die Körper namentlich in zwei Zuständen besonders stark, als poröse Massen und in Pulvergestalt. Alle gepulverten Substanzen, alle organischen Stoffe, namentlich die vegetabilische Kohle, deren zahllose Zellen alle zerrissen und daher den äusseren Gasen zugänglich sind, enthalten an ihrer ungeheuern innern Oberfläche und in den vielen Winkelräumen, eine bedeutende Menge derjenigen Gase, in welchen sie sich befinden. Mit solchen Stoffen, bei denen die Erscheinung sich als eine Absorption offenbart, sind manche Versuche angestellt worden, welche indess aus Unkenntniss der Oberfläche wenige Aufschlüsse geben.

279. Verschiedene Substanzen. — Mit Kohle besonders, welche mit Hülfe der Luftpumpe oder durch Ausglühen und schnelles Ablöschen in Quecksilber von ihrem Inhalte gereinigt und schnell verwendet wurde, hat Th. de Saussure eine grosse Zahl von Versuchen angestellt. 1 Vol. Buchsbaumkohle absorhirt bei 11—13° und 723 Millim. Druck folgende Gasvolumina:

Ammoniakgas	90	Oelbildendes Gas	35
Chlorwasserstoff	85	Kohlenoxyd	9,42
Schweflige Säure	65	Sauerstoff	9,25
Schwefelwasserstoff	55	Stickstoff	7,5
Stickstoffoxydul	40	Wasserstoff	1,75
Kohlensäure	35		

Verschiedene Kohlenarten wirken jedoch mit verschiedener Energie; nach Saussure bis zu einer gewissen Grenze um so stärker, je kleiner die Poren oder je dichter die Masse ist. So fand er für atmosph. Luft

	Spec. Gew.	Absorption
Korkkohle	0,1	0
Tannenkohle	0,4	4,5
Buchsbaumkohle	0,6	7,5
Braunkohle	1,326	10,5

Steinkohlen, von 2,17 spec. Gewicht, wirkten, vermuthlich aus Mangel an Poren, nicht.

Andere poröse Substanzen gaben andere Absorptionen, was theils von der Substanz, theils von der Porenbeschaffenheit abhängen kann. So erhielt Saussure z. B.

	Meer- schaum	Kleb- schiefer	Berg- kork	Hasel- Holz	Lein- faden	Seide
Ammoniak	15,0	113,0	2,3	100,0	68,0	78,0
Kohlensäure	5,26	2,0	0,82	1,1	0,62	1,1
Oelbild. Gas	3,7	1,5	0,82	0,71	0,48	0,5
Kohlenoxyd	1,17	0,55	0,78	0,58	0,35	0,3
Sauerstoff	1,49	0,7	0,68	0,47	0,35	0,44
Stickstoff	1,6	0,7	0,68	0,21	0,33	0,125
Wasserstoff	0,44	0,48	0,68	0,58	0,35	0,3

Die leichter condensirbaren Gase werden, wie man sieht, stets in grösserer Menge aufgenommen als die permanenten Gase.

280. Andere Umstände. — Druck und Temperatur haben einen bedeutenden Einfluss auf die Absorption poröser Körper, was sich leicht erklärt, da das anhängende Gas stets den äussern Druck auszuhalten hat. Verstärkung des Druckes vermehrt die aufgesogene Gasmenge, Verminderung veranlasst eine Wiederentwicklung von Gas. So wurden von einem Stück Kohle unter 734,3 Millim. Druck 34,5 Vol. Kohlensäure absorbirt: im Torricellischen Vacuo entwickelte sich wieder so viel Gas, dass der Druck 260,6 Millim. wurde und der Rückstand in der Kohle, auf den ursprünglichen Druck reduziert, 24,6 Vol. betrug, was mehr ist, als aus der Proportionalität zum Drucke sich ergeben würde. Wie es scheint, vermag eine längere Wirkung der Luftpumpe die Kohle so vollständig als möglich von ihren Gasen zu entleeren.

In einem Gasgemenge absorbirt die Kohle gleichzeitig von allen Gasen, wie es scheint aber nicht in dem Verhältnisse, wie sie einzeln absorbirt würden. Nach Saussure begünstigt die Gegenwart von Sauerstoff die Absorption des Wasserstoffes, die der Kohlensäure diejenige des Sauerstoffes; oder es wirken diese Gase dahin, dass die Kohle mehr der andern festhält, als ohne sie. Dagegen scheinen Kohlensäure und Stickstoff indifferent. Da die Gase sich als Gemenge wieder entwickeln, beruht jene Einwirkung nicht in der Bildung chemischer Verbindungen.

Wärme ist das kräftigste Mittel, die porösen Körper von ihren

Gasen zu reinigen, namentlich die aus der Luft gezogene Feuchtigkeit auszutreiben. Starkglühende Kohle hat man als gasfrei zu betrachten; wie sie aber unter 300° erkaltet, beginnt wieder Absorption, die zu einem Maximum ansteigt, dann allmählig abnimmt und bei vollkommener Sättigung erlöscht. Geht die Absorption rasch vor sich, so wird sie, wie es bei jeder schnellen Verdichtung von Gasen der Fall ist, von Erwärmung begleitet. Aubert hat nachgewiesen, dass grössere Mengen Kohlen, die durch Destillation in geschlossenen Gefässen gebildet, sofort in Mahlfässern zu Pulver zerrieben und zu grossen Haufen aufgeschüttet wurden, sich durch Absorption von Luft in 20—30 Stunden bis zur Selbstentzündung der Kohle erhitzen konnten. Kein Zweifel, dass der Grund mancher Unglücke bei der Fabrikation des Schiesspulvers in dieser Erscheinung zu suchen ist.

Jedenfalls spielen oberflächliche Verdichtungen gleichfalls eine Rolle bei der von Döbereiner erkannten Einwirkung des reinen, namentlich des feinzertheilten Platins (Platinschwamm und Platinmoor), in geringerem Grade auch anderer Metalle, um manche Gemenge vor Wasserstoffgasarten und Sauerstoff zur chemischen Verbindung zu bestimmen, wobei theils aus der Verdichtung der Gase, besonders aber aus der chemischen Verbindung selbst eine bis zum Glühen des Platins steigende Hitze entstehen kann. Die Platinzündlampe, wo ein Wasserstoffstrom auf Platinschwamm geleitet wird, die Lampe ohne Flamme, aus dem Glühen eines feinen Platindrahtes in Weingeistdämpfen, sind hinlänglich bekannte Apparate.

281. Absorption durch Flüssigkeiten. — Gase, welche längere Zeit über Flüssigkeiten stehen, werden von denselben oberflächlich aufgenommen und verbreiten sich zwischen ihren Theilchen durch eine Art von Diffusion (267), bis die ganze Flüssigkeit gleichmässig erfüllt ist. Wie bei allen ähnlichen Erscheinungen lassen sich die aufgenommenen Theilchen, selbst unter dem Microscope nirgends unterscheiden, gleich als wäre die Flüssigkeit eine wirkliche Verbindung mit dem Gase eingegangen. In vielen Fällen sehr starker Absorption ist wohl kein Zweifel über die chemische Natur der Erscheinung. So z. B. in den folgenden Fällen, wo 1 Vol. reines Wasser die angegebenen Gasvolumina, bei 760 Millim. gemessen, aufnimmt

Fluorborgas	700 Vol.	J. Davy
Ammoniak	780	Thomson
Salzsäure	516	Thomson
Fluorkieselsäure	263	J. Davy
Schweflige Säure	44	Saussure

Von mehr physicalischer Natur scheinen eine Menge anderer Absorptionen zu sein, die durch ihre Schwäche und ihre grosse Abhängigkeit von rein physicalischen Bedingungen sich auszeichnen, doch lässt sich die Grenze zwischen beiden Erscheinungen nicht leicht angeben.

Natürlich hängen die physicalischen Absorptionen, so wollen wir die letztern nennen, 1) von der Natur der Flüssigkeit und 2) von derjenigen des Gases ab. Saussure brachte bekannte Mengen Flüssigkeit in graduirte Röhren voll Gas, schüttelte beide und bestimmte durch schnelles Oeffnen unter Flüssigkeit und Herstellung

des Druckes das verschwundene Gasvolumen. So erhielt er auf 1 Vol. Wasser und Alcohol (v. 0,84) bei 18° C. und 760 Millim. Druck die folgende Absorptionszahl β (absorbirtes Gasvolumen):

	Wasser	Alcohol.		Wasser	Alcohol
Schwefelcarbon	2,53	6,06	Sauerstoffgas	0,065	0,163
Kohlensäure	1,06	1,86	Kohlenoxyd	0,062	0,145
Stickstoffoxydul	0,76	1,53	Wasserstoff	0,046	0,051
Oelbild. Gas	0,55	1,27	Stickstoff	0,042	0,042

Für diese beiden Flüssigkeiten zeigt sich nahe die nämliche Reihenfolge, doch gilt diess nicht allgemein. So geben ölbild. Gas und Kohlensäure im Wasser 0,155 und 1,06, in Lavendeloel umgekehrt 2,61 und 1,91.

Wie die Absorption des nämlichen Gases für verschiedene Flüssigkeiten sich verändert, zeigen die folgenden mit Kohlensäure bei 18° erhaltenen Zahlen, denen das specifische Gewicht der Flüssigkeit s beigesetzt ist.

	s	β		s	β
Alcohol	0,803	2,60	Gummilösung	1,092	0,75
Aether	0,727	2,17	Zuckerlösung	1,104	0,72
Lavendelöl	0,88	1,91	Alaun	1,047	0,70
Weingeist	0,84	1,87	Schwefels. Kali	1,077	0,62
Bergöl	0,784	1,69	Salpeters. Kali	1,139	0,57
Terpentin	0,86	1,66	Schwefelsäure	1,84	0,45
Olivenöl	0,915	1,51	Kochsalz	1,212	0,329
Wasser	1,000	1,06	Chlorcalcium	1,402	0,261

Im allgemeinen also absorbiren die schweren Flüssigkeiten weniger, die leichten mehr, ohne dass diese Beziehung sich genau bewährte. Von allen Flüssigkeiten absorbirt Quecksilber am wenigsten.

282. Das Gesetz der Absorption. — Um die Absorption unter verschiedenem Druck zu prüfen, wandte Henry einen unten und oben mit Hahn verschlossenen graduirten Cylinder A (Fig. 195) an, der unten überdiess durch eine elastische Röhre a mit einer Röhre für Quecksilber B communizirte. Man liess aus dem, anfangs mit Quecksilber gefüllten, Cylinder durch Oeffnen des Hahnes b einen Theil davon ausfliessen und durch c vorerst eine gemessene Menge Flüssigkeit, dann durch Verbindung mit einem Gasrecipienten eine gemessene Menge Gas, unter dem Drucke des Barometers und der Quecksilberdifferenz in B, eindringen. Nach genugsamem Schütteln, regulirte man wieder den Quecksilberdruck durch Eingiessen oder Ablassen und beobachtete die Reduction des Gasvolumens. So ergab sich das einfache Gesetz: dass unter jedem Druck, die gleiche Menge Flüssigkeit ein nahe gleiches Volumen zu absorbiren vermochte, mit andern Worten: die absorbirte Gasmenge (dem Gewichte nach oder als Volum. im Normalzustande gemessen) war dem Drucke proportional.

Bezeichnet β den Absorptionscoefficient. oder das von 1 Vol. Flüssigkeit absorbirte Gasvolumen, so nimmt ein Vol. V Flüssigkeit ein Gasvolumen βV oder ein Gasgewicht $\beta V s$ auf, wenn s das specifische Gewicht des Gases bei dem vorhandenen Drucke bezeichnet. Man habe z. B. über einem Flüssigkeitsvolum. V ein anfängliches Gasvolumen v , mit dem specifischen Gewichte s ; sei s' das unbekannte specifische Gewicht

nach der Absorbition. Da das ganze Gasgewicht das gleiche bleibt, hat man

$$v s = (v + \beta V) s' \text{ also } s' = \frac{v \cdot s}{v + \beta V}$$

wo man für s, s' auch den entsprechenden Druck P, P' setzen könnte. Hätte man nach der Absorption den Druck dem äussern gleich gemacht, dagegen das Volumen v' gefunden, so erhielt man

$$v = (v' + \beta V) \text{ also } \beta = \frac{v - v'}{V}$$

Anwendung von Druck ist das gewöhnliche Mittel, schäumende Getränke zu bereiten. Durch Schütteln von Wasser mit comprimierter Kohlensäure, (in den natürlichen Sauerlingen unter dem Druck einer hohen Wassersäule) durch Verschluss der Weinflaschen vor vollendeter Gährung, endlich durch Zersetzung doppelt-kohlensaurer Salze in verschlossenen Gefässen, nimmt das Wasser eine dem Drucke nahe proportionale Menge von Kohlensäure auf, welche beim Oeffnen des Gefässes grossentheils wieder entweicht. Wie aber die Flüssigkeit die letzten Antheile Gas bis zur Sättigung nur mit Mühe aufnimmt, so entleert sie sich nicht sogleich wieder auf den Punkt, der dem äussern Gasdrucke entspricht.

283. Absorption der Gasmenge. — Das Dalton'sche Gesetz, dass Gase sich in ihrer definitiven Ausbreitung nicht stören (274), scheint genähert auch auf die von einer Flüssigkeit absorbirten Gase zu gelten. Mehrere Gase können gleichzeitig in der Flüssigkeit bestehen, jedes von dem andern unbehindert, gemäss seinem eignen Druck und eignen Absorptionscoefficient. β .

Man kann die Versuche entweder so einrichten, dass man den Druck P des Absorptionsraumes durch Heben und Senken des Gefässes constant erhält und die Volumänderung des Gemenges ins Auge fasst; oder dass man die Druckänderung beobachtet, bei abgeschlossenem Gasvolumen V .

1) Ueber dem Flüssigkeitsvolumen W nehme ursprünglich das Gasgemenge beim Drucke P ein Volumen $V = V' + V'' + \dots$, wo $V', V'' \dots$ die Volumina der einzelnen Gase unter dem gleichen Drucke P bezeichnen. Nun beginne die Absorption und ändere, immer beim gleichen Druck, das Volumen in $v = v' + v'' + \dots$, wobei $\frac{v' P}{v}, \frac{v'' P}{v}, \dots$ die Druckantheile der einzelnen Gase nach der Absorption sein werden, von denen letztern abhängig ist. Die Gasmenge $V' P$ hat sich also vertheilt auf einen nicht absorbirten Theil $v' P$ und einen absorbirten $w' P = \beta \frac{W \cdot v'}{v} \cdot P$. Man erhält also die Beziehungen

$$V' = v' \left(1 + \beta \frac{W}{v}\right), \quad V'' = v'' \left(1 + \beta' \frac{W}{v}\right) \quad (1)$$

woraus sich, entweder die rückbleibenden Volumina $v', v'' \dots$ oder die absorbirten $w', w'' \dots$, oder, wenn $v', v'' \dots$ durch eine Analyse des

Gasgemenges ermittelt worden sind, die Absorptionscoeff. $\beta, \beta' \dots$ durch Ausdrücke von der Form

$$v' = \frac{V' \cdot v}{v + \beta' W}, \quad w' = \beta' \frac{W V'}{v + \beta' W}, \quad \beta = \left(\frac{V'}{v} - 1 \right) \frac{v}{W} \quad (2)$$

bestimmen lassen.

2) Haben in einem bestimmten Raume V die Gase einzeln die aus Volum und Druck vor dem Einbringen bekannten Drucke $P, P' \dots$, deren Summe gleich P , und verwandeln sich dieselben durch die Absorption in $p, p' \dots$, Summe gleich p , so theilt sich jede ursprüngliche Menge $V P$ in die unabsorbirte $V p$ und die absorbirte $w p = \beta' W p$. Aus den Beziehungen

$$V P = (V + \beta' W) p, \quad V p' = (V + \beta' W) p' \quad (3)$$

folgt wieder für die Bestimmung der einzelnen Drucke p , und der Coefficienten β

$$p' = \frac{V \cdot P'}{V + \beta' W} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{V (P' - p')}{W} \quad (4)$$

Als Beispiel einer zusammengesetzten Absorption frage man nach dem Verhältnisse, in welchem Sauerstoff und Stickstoff in Wasser, das lange der Luft ausgesetzt war, stehen. Der einfache Index beziehe sich auf das erste, der doppelte auf das zweite Gas. Die Mischung der absorbirten Gase wird nach (2) das Verhältniss haben

$$\frac{w'}{w''} = \frac{\beta'}{\beta''} \cdot \frac{V'}{V''} \cdot \frac{v + \beta' W}{v + \beta'' W} \quad (5)$$

Nun ist v gegen W unendlich gross, $\frac{V'}{V''} = \frac{21}{79}$, endlich nach Bunsen

bei 0° $\beta = 0,04114$, $\beta' = 0,02035$. Dadurch wird jenes Verhältniss

$$\frac{w'}{w''} = \frac{4114,21}{2035 \cdot 79} = \frac{34,96}{65,04}$$

auf 100 berechnet. Gay-Lussac fand im Regenwasser 31 % Sauerstoff.

Die absorbirte Luft hat also ein viel stärkeres Sauerstoffverhältniss als die atmosphärische —, was den Kiementhieren (Fische, Mollusken u. s. f.) zu statten kömmt, welche, im luftleeren Wasser terbend, ausschliesslich mittelst des absorbirten Sauerstoffes athmen. So weit solche Thiere im Meere leben, so weit auch sind die atmosphärischen Gase in die Tiefe gedrungen.

284. Versuche von Bunsen. — Die genauesten Versuche über die Absorption der Gase hat Bunsen angestellt, mit einem Absorptiometer von der Gestalt Fig. 196. A ist die graduirte Absorptionsröhre, unten an den kleinen Stuhl a anzuschrauben und gegen seine Bodenplatte anschliessend. Nachdem die Röhre über Quecksilber mit dem nöthigen Gase gefüllt, dann mit der angemessenen Menge vollkommen luftfreier Flüssigkeit versehen und endlich verschlossen worden ist, befestigt man den kleinen Stuhl im Grunde des weitem Cylinders B. Dieser erhält unten Quecksilber, dessen Menge mittelst Zu- und Abflussröhren b, c, regulirt wird, darüber, zur Erhaltung und Beobachtung der Temperatur, Wasser. Ein fest und hermetisch schliessender Deckel d.

hält das Ganze, während des Schüttelns von Gas und Flüssigkeit, zusammen; durch nachheriges Oeffnen der Absorptionsröhre A (unten) stellt man die Druckverhältnisse des Quecksilbers wieder her und bestimmt das rückständige Gasvolumen.

So ergab sich für langgekochtes Wasser und für Alcohol (von 0,792 specifisches Gewicht bei 20°), bei 12° C. der folgende Werth des Coeffic.

	Wasser	Alcohol		Wasser	Alcohol
Stickstoff	0,01549	0,12219	Methyl	0,0559	—
Atm. Luft	0,01882	—	Oelbild. Gas	0,1737	3,0005
Wasserstoff	0,01930	0,06761	Stickoxydul	0,8588	3,4279
Aethyl	0,02257	—	Kohlensäure	1,1018	3,3807
Kohlenoxyd	0,02544	0,20443	Schwefelwasserst.	3,4415	10,971
Sauerstoff	0,03133	0,28397	Schwefflige Säure	48,182	170,131
Grubengas	0,04180	0,49024	Ammoniak	776,6	—

Durch Erwärmung nimmt die Absorption ab. Nach den zwischen 0 und 24° C. angestellten Versuchen lässt sich der Coeffic. für eine Temp. t genähert durch einen Ausdruck darstellen

$$\beta = \beta_0 - at + bt^2$$

wo die Constanten die folgenden Werthe haben

	β_0	a	b
Wasserstoff	0,01930	0	0
Stickstoff	0,020346	0,00053887	0,000011156
Aethyl	0,031474	0,0010449	0,000025066
Kohlenoxydgas	0,032874	0,00081632	0,000010278
Methyl	0,0871	0,0033242	0,0000603
Oelbild. Gas	0,25629	0,00913631	0,000188108
Stickoxydul	1,30521	0,045362	0,0006843
Kohlensäure	1,7967	0,07761	0,0016424
Schwefelwasserstoff	4,3706	0,083687	0,0005213
Schwefflige Säure	79,789	2,6077	0,02925
Ammoniak	1049,63	29,496	0,0095621

285. Zustand und Wiederentwicklung der Gase. — In welchem Zustande das Gas sich in der Flüssigkeit befindet, ob selbst flüssig oder nur zwischen den flüssigen Theilchen comprimirt, lässt die Beobachtung, selbst unter dem stärksten Microscop, unentschieden. Hält man die letzte Vorstellung fest, so wäre das Gas in einem solchen Zustande, dass neben dem Theile der Expansivkraft der von der Anziehung der Flüssigkeit aufgehoben wird, noch ein anderer, freiwirkend, sich mit der äussern Expansivkraft ins Gleichgewicht setzte. Das Dasein des Gases in der Flüssigkeit bezeugt sich durch sehr geringe Ausdehnung der letztern, worüber es jedoch an genauen Messungen, wenigstens was die physicalischen Absorptionen betrifft, fehlt. Bergmann bestimmte das specifische Gewicht des mit Kohlensäure gesättigten Wassers (mittlere Temp.) zu 1,0015, während es ohne Ausdehnung 1,0018 hätte sein sollen.

Verschiedene Umstände veranlassen die Wiederentwicklung des absorbirten Gases:

1) Verminderung des Druckes, namentlich mit Hülfe der Luftpumpe, welche den Gasdruck immer wieder entfernt. So kann mittelst der Luftpumpe der grösste Theil der absorbirten Luft, wenn auch allmählig nur, in relativ grossen Blasen, aus dem Wasser entfernt werden.

2) Erwärmung, wodurch gleichfalls die innere Expansivkraft

über die äussere gesteigert wird. Durch längeres Auskochen scheint das Wasser vollständig von Gasen befreit zu werden; die Entwicklung beginnt übrigens schon $10-15^{\circ}$ über der Temperatur, bei welcher die Flüssigkeit sich gesättigt hatte.

3) **Ansatzpunkte.** Zwischen der Ausscheidung krystallisirender Salze und absorbirter Gase besteht die Aehnlichkeit, dass beide an den Gefässwänden, vorzüglich an rauhen und organischen, zuerst sichtlich hervortreten (237). Die Ungleichheit und Einseitigkeit der Molecularkräfte an der Wandgrenze der Flüssigkeit begünstigen die Ausscheidung oder Ansammlung grösserer Gasbläschen. In Champagner der ausgeschäumt, überzieht sich ein Brodkrümchen mit Gasblasen, und ganze Reihen von Bläschen steigen von einzelnen unmerklichen Körnchen des Glases empor. Besonders stark wirken die Kiemen der Fische zur Ausscheidung und sofortigem Aufsaugen des Sauerstoffes.

4) Beim Gefrieren der Flüssigkeit treibt die wachsende Cohäsion der festwerdenden Theilchen, das Gas in zahlreichen Bläschen aus. So enthält alles an der Luft sich bildende Wassereis durch seine ganze Dicke eine Menge Luftbläschen, welche der Analyse zufolge verhältnissmässig mehr Sauerstoff enthalten als die atmosphärische Luft (283). Auch die Sauerstoffentwicklung des geschmolzenen Silbers beim Erstarren, nach Lucas auf 1 Grm. nicht weniger als 0,68 Cub.Centim. betragend, scheint dahin zu gehören.

5) **Aenderung der Flüssigkeit**, durch chemische oder physikalische Beimischungen, ändert gleichfalls die Absorptionsfähigkeit. Säuren und Salze dem Wasser zugesetzt, entwickeln, freilich oft unter Mitwirkung von Erwärmung, kleine Gasbläschen, — auf ähnliche Weise, wie es bei der Krystallausscheidung geschieht (236).

B. Bewegungserscheinungen (Acustik).

286. Vorbemerkung. — In den bisherigen Erscheinungen wirkten die Cohäsionskräfte theils zum Gleichgewichte ein, z. B. bei den elastischen Gestaltänderungen und der Capillarität, theils äusserten sie sich, wie bei der Reibung und Viscosität, als Hindernisse gegen Bewegungen andern Ursprungs, theils endlich veranlassten sie selbst Bewegungen (Diffusion, Absorption u. s. f.), von denen nur die endlichen Resultate bekannt sind. Von den Erscheinungen, in denen die beschleunigende Wirkung der Cohäsionskräfte selbst sichtlich hervortritt, kennt man nur eine Classe etwas genauer, diejenige der Schwingungsbewegungen. Sie bildet auch desshalb ein eigenthümlich abgegrenztes Ganzes; weil manche derselben durch den besondern Sinn des Gehörs zu unserer Wahrnehmung gelangen, in Fällen sogar, wo das Auge seine Dienste versagt. Die Lehre vom Schall oder die Acustik knüpft sich in der That so innig an mehrere der bisherigen Thatsachen an, ihre Erscheinungen gehen so allmählig in andere über, welche das Auge verfolgen kann, und die meisten erklären sich so vollständig aus den Gesetzen der Cohäsionskräfte, dass eine Abtrennung nicht naturgemäss wäre, — zumal die Wahrnehmungen des Ohres uns wenig Näheres über das wahre Wesen des Schalles aussagen.

Cap. 1. Allgemeine Thatsachen.

287. Bedingungen des Schalles. — Wie die tägliche Erfahrung lehrt, geht der Schall stets von lebhaft bewegten Körpern aus; Stille und Ruhe, Schall und Bewegung gelten meist als unzertrennliche Begriffe. Aber auch zu kleine oder zu langsame Bewegungen, der Flügelschlag mancher Mücken, die Bewegung der Hand, werden nicht mehr gehört.

Ausser dem schallenden oder tönenden Körper und dem eigens gebauten wahrnehmenden Ohre, bedarf es indess zur Wahrnehmung des Schalles noch eines vermittelnden Mediums, eines die Bewegung zum Ohre tragenden, den Schall fortpflanzenden dritten Körpers. Eine Glocke oder ein Schlagwerk, unter die Luftpumpe gebracht, werden bei hinlänglicher Verdünnung nicht mehr gehört; werden es aber wieder, wenn die Luft einströmt. Da der Schall, obgleich geschwächt durch das Glas gehört wird, müssen auch feste Körper der Leitung desselben fähig sein. In der That hört das Ohr am Felsen den entfernten Hammerschlag des Bergmannes, am festen Boden den fernen Hufschlag des Pferdes. Selbst das Wasser leitet den Schall: eine unter dem Wasser angeschlagene Glocke wird ausserhalb vernommen, Fische können an den Ruf der menschlichen Stimme gewöhnt werden u. s. f.

Doch nicht alle Körper sind zur Erzeugung und Fortpflanzung des Schalles gleich geeignet. Je weicher, je unelastischer, je ungleichartiger, desto unvollkommener wirken sie in beiden Beziehungen. Wir schliessen daraus, dass die acustischen Eigenschaften der Körper von dem stabilen Gleichgewicht ihrer Theilchen und von den dasselbe wieder herstellenden

Kräften abhängen. Bei festen und flüssigen Körpern ist es die Elasticität, bei luftförmigen die von dem äussern Drucke bedingte Expansivkraft.

288. Verschiedene Wahrnehmungen. — Die Wahrnehmungen des Schalles können dreifacher Art sein:

1) Der Knall ist eine, oft sehr starke, aber augenblickliche Wirkung, an der sich wenig anderes als eben die Stärke unterscheiden lässt. Dahin gehören der Knall einer Peitsche, der Schlag eines Hammers, die Explosion eines Schiessgewehres. Wir beobachten dann gewöhnlich eine einzige sehr rasche und starke Hauptbewegung; man hat aber Grund anzunehmen, dass sie von einer Reihe, an Stärke schnell abnehmender, schwächerer begleitet sei.

2) Geräusch heissen wir eine, zwar andauernde, aber mehr oder weniger unbestimmte und unklare Wahrnehmung. Viele Geräusche entstehen nachweisbar aus einer zahllosen Menge durcheinander wirkender Bewegungen, momentaner oder andauernder Art. Das Rauschen eines Wasserfalles, das Sausen des Windes durch die Blätter, das Gemurmel einer Volksmenge gehören dahin. In andern Fällen entstehen Geräusche aus einer Reihenfolge sehr ungleichartiger Bewegungen, gehen dann allmählig aber in die dritte Classe von Wahrnehmungen über:

3) Den eigentlichen Ton, wie er musicalisch benutzt wird. Im Tone verbindet sich Dauer mit Bestimmtheit und Klarheit. Daher lässt sich der eine Ton vom andern rein und scharf unterscheiden, was beim Geräusche und Knall weit unvollkommener der Fall ist. Der Bestimmtheit und Gleichförmigkeit der Wahrnehmung entspricht natürlich eine gleiche Constanz in den Bedingungen der Tonerzeugung. Töne entstehen, wenn der tönende Körper eine Reihe gleichartiger Bewegungen oder Schwingungen macht, die Saite z. B. eine Reihe gleicher Erzitterungen, so schnell auf einander folgend, dass wir die einzelnen Bewegungen nicht, wohl aber den von ihrer Wiederholung hervorgebrachten Gesamteindruck wahrnehmen.

So steht im Allgemeinen die Wahrnehmung in nothwendiger Abhängigkeit von der Schallerzeugung.

289. Eigenschaften des Tones. — Am Tone am vollständigsten, unvollständiger am Geräusche und Knall, vermag das Ohr dreierlei Eigenschaften zu unterscheiden:

1) Die Höhe und Tiefe. Bringt man einen langen, einerseits eingeklemmten elastischen Stab am freien Ende aus seiner Stellung, so kann das Auge den Hin- und Herbewegungen folgen, das Ohr vernimmt einzelne Stösse, aber keinen Ton. Verkürzt man den Stab, so werden die Schwingungen schneller, es beginnt aus ihrer Verschmelzung ein tiefer Ton. Noch kürzer genommen, wird der Ton höher, dem Auge dagegen entgehen die Schwingungen bis auf die unbestimmte Grenze derselben. — Noch deutlicher ergibt sich die Beziehung zwischen der Höhe und der Wiederholung der Schwingungen aus der Anwendung der von Cagniard-Latour erdachten Sirene, von der weiterhin die Rede sein wird. Man kann mittelst derselben eine Reihe immer schnellerer Luft-

erschütterungen erzeugen und hört entsprechend einen höhern und höhern Ton. Somit hängt die Höhe und Tiefe des Tones von der schnellern oder langsamern Wiederholung der Schwingungen ab.

2) Die Stärke des Schalles. Der nämliche Ton kann stark oder schwach gehört werden. Bringt man eine Saite in grosse Schwingungen, so tönt sie stark; wie die Grenzen der Schwingungen sich vermindern, sinkt auch die Stärke des Tones und erlöscht, wenn die Saite dem Auge wieder scharf begrenzt erscheint. Die Stärke des Schalles hängt also nicht von der Zahl, sondern von der Grösse oder Stärke der Bewegungen ab; natürlich aber an der Stelle, wo die fortpflanzende Luft auf das Ohr wirkt.

3) Der Klang, den man gegenüber den beiden ersten, den quantitativen Eigenschaften auch die Qualität des Tones nennt, bezeichnet das in Worten nicht Ausdrückbare, was den gleich hohen und gleich starken Ton verschiedener Instrumente charakterisirt. Die Bezeichnungen klar, hell, schreiend, grell, metallisch, dumpf, hohl u. s. w. beziehen sich auf den Klang. Oft auch wendet man das Wort auf einen Ton an, der durch Geräusche verunreinigt ist.

Am besten lassen sich diese drei Eigenschaften bildlich versinnlichen. Stellt man die Zeit (Fig. 197) als eine horizontale Abscisse $a b$ dar, so lassen sich die successiven Schwingungen durch eben so viele gleiche Wellenlinien darstellen, enger gerückt beim hohen, weiter auseinander beim tiefen Ton (A und A'). Die Stärke würde der Höhe der Wellen entsprechen (B); der Klang bei gleicher Zahl und Höhe, der Form derselben (C), oder der Art des Uebergangs von der einen zur andern Grenze der Bewegung.

290. Ursprung der Töne. — Da die regelmässige Wiederholung hinlänglich rascher und starker Erschütterungen die einzige Bedingung für die Entstehung eines reinen Tones ist, so lässt sie sich auf mannigfache Weise erfüllen. So vorzüglich 1) durch eine schnelle Folge mechanischer Stösse, 2) durch Schwingungen begrenzter Luftmassen, 3) durch Schwingungen weich elastischer Körper, 4) endlich durch Schwingungen hart elastischer. Die drei letzten Arten der Tonerzeugung kommen in den musicalischen Instrumenten, von denen später die Rede sein wird, zur Anwendung; über die Töne aus mechanischen Stössen genügt es einiger Bemerkungen.

Es gehören zu dieser letzten Classe von Tönen:

1) Diejenigen der Sirene, durch schnelle Unterbrechungen eines Luftstromes hervorgebracht;

2) die von Savart untersuchten Töne, erhalten aus dem Durchgange von Radflügeln oder Speichen zwischen zwei nahe gerückten Brettern;

3) die Töne aus dem Anschlagen eines pulsirend abfliessenden Wasserstrales auf eine hohle Trommel, meist von Geräuschen sehr verunreinigt;

4) Die Töne aus dem Streifen eines Zahnrades an einer Feder, welche zu den sogenannten Klirrtönen aus harten Stössen, gehören;

5) die Trewelyan'schen Töne bei der Berührung warmer und kalter Metalle.

Bei allen diesen Tönen bildet jeder mechanische Stoss oder Schlag eine vollständige Erschütterung, entsprechend einem Hin- und Her-
gang einer schwingenden Saite.

291. Trewelyan'sche Töne. — Besonders merkwürdig ist die letzte Art der Tonerzeugung. Zufällig (1829) wurde bemerkt, dass ein heisser silberner Löffel mit den Rändern seiner Höhlung auf ein kaltes Metall, mit dem Ende des Griffes auf den Tisch gestützt, bisweilen zu tönen anfängt und so lange fortönt, als der Löffel hinlänglich heiss, die Unterlage hinlänglich kalt ist. Am besten gelingt der Versuch mit einer Barre (dem Wieger) aus Kupfer oder Silber A (Fig. 198), deren Kopf durch Verdünnung der Mitte a die Fähigkeit erhalten hat, auf zwei nahen Kanten oder auf zwei Stützen der Unterlage ruhend, leicht hin und her zu wackeln; die Unterlage B selbst (der Träger) besteht aus Blei. Ist der Ton tief, so erkennt man durch leises Annähern einer Feder, oft schon von blossem Auge, dass wirklich eine solche Bewegung vorhanden ist. Er beginnt auch nur dann, wenn bei günstiger Stützung die eine Seite schwach gehoben und nachher der Schwere überlassen wird.

Die Ursache, welche die kleinen Schwankungen um die stabile Gleichgewichtsstellung, oft Viertelstunden lang, unterhält, ist, wie Forbes, namentlich aber Seebeck nachgewiesen haben, die Wärme. Durch den Berührungspunkt der einseitig gehobenen Barre strömt nämlich in Menge Wärme über und bewirkt eine plötzliche Ausdehnung und Erhebung der kalten Berührungsstelle, wodurch diese Seite der Barre plötzlich in die Höhe geworfen wird. Gleich nachher geschieht dasselbe auf der andern Seite, während auf der erstern die Wärme sich im Blei verloren hat und der zurückfallenden Kante wieder eine kalte Stelle bietet, — was die Bedingung zur Wiederholung der Erscheinung ist.

Andere Umstände unterstützen diese Erklärung. Nach ihrer Vorzüglichkeit als Barre ordnet Forbes die Metalle folgendermaassen: Silber, Kupfer, Gold, Zink, Platin, Eisen, Zinn, Blei; während ihre Vorzüglichkeit als Träger nahe die umgekehrte ist. Die ersten Metalle sind diejenigen, welche die Wärme am leichtesten abgeben, sich dabei aber am wenigsten erkälten und contrahiren; die letzten die am stärksten sich ausdehnenden. Was die Ausdehnung der Stützpunkte im Sinne der Bewegung befördert, die Contraction der Wiegerpunkte hingegen vermindert, begünstigt die Schwingungen; daher bewährten sich kurze Drahtstützen mit ebener Wiegerfläche als besonders gut. Störungen der Schwingungen erhöhen meist den Ton, weil die Barre weniger gehoben wird und schneller zurückfällt. Anders aber verhält es sich mit dem Gewicht der Barre, indem die länger dauernde Berührung und stärkere Ausdehnung den Widerstand der Masse ausgleichen und übersteigen können.

Cap. 2. Fortpflanzung des Schalles.

292. Vorgang der Fortpflanzung. — Wir wollen von dem einfachsten Falle der Fortpflanzung, von derjenigen in der Luft und zwar

in einer geraden Röhre von constantem Querschnitte ausgehen. Theilt man der Luft am Anfang der Röhre, etwa durch Anschlagen eines Deckels, eine rasche Erschütterung mit, so gelangt letztere nach kurzer Zeit, wie das Flackern einer Flamme beweist, an das andere Ende, um so schneller, je kürzer das Rohr ist. Die Mittheilung der Anregung von Schicht zu Schicht durch die ganze Luftsäule lässt sich genau mit der Fortpflanzung eines Stosses durch eine lange Reihe gleicher vollkommen elastischer Kugeln vergleichen (207), nur denke man sich die Kugeln durch dünne Luftschichten, die Elasticität durch die Veränderungen der Expansivkraft ersetzt. Jede Schicht erhält Compression (oder Verdünnung) und Bewegung von der vorhergehenden und gelangt, dieselben an die folgende abgebend, selbst wieder zu Ruhe.

Man fasse ein Theilchen B ins Auge (Fig. 199), das zwischen den Theilchen A und C, alle von der gleichen Länge x , liegt. Das Theilchen A erleide plötzlich eine Compression von x auf $x - \delta x$, der Druck p (auf die Flächeneinheit) wird zu $p + \delta p$ werden und das Mariottische Gesetz gibt, unter Weglassung des unveränderten Querschnittes a

$$(p + \delta p)(x - \delta x) = p \cdot x \text{ oder } \delta p = p \frac{\delta x}{x} = p \frac{\delta d}{d} \quad (1)$$

Da die Dichtigkeit d sich offenbar proportional mit dem Drucke oder auch mit x verändert.

Der Druck auf das Theilchen B ist einerseits $a(p + \delta p)$, anderseits ap , so dass der Ueberschuss $a\delta p$ zur Bewegung einwirkt.

Nach einer kurzen Zeit δt habe das Theilchen A wieder den natürlichen Zustand, B hingegen die Verdichtung von A gewonnen. Die Verdichtung ist also vorgerückt um x in der Zeit δt , so dass man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit hat

$$U = \frac{x}{\delta t} \quad (2)$$

In diesem Augenblick wirkt zu beiden Seiten des Theilchens B, dessen Masse axd , der gleiche Druck ap . Die bewegende Kraft hat also von $a\delta p$ auf 0 abgenommen. Ihr mittlerer Werth $\frac{1}{2} a\delta p$ hat

dabei die Arbeit verrichtet $\frac{1}{2} a\delta p \delta x$. Anderseits bewegt sich der Schwerpunkt des Theilchens B, dessen Masse axd , in gleicher Zeit um $\frac{1}{2} \delta x$ und gewinnt mit gleichmässiger Beschleunigung (26) eine Geschwindigkeit, welche dem doppelten Wege, durch die Zeit dividirt, also $\frac{\delta x}{\delta t}$ gleich ist. Der Satz von der Gleichheit der Arbeit und der

halben lebendigen Kraft (36) führt daher auf die Bedingung

$$\frac{1}{2} a \cdot \delta p \cdot \delta x = \frac{1}{2} a \cdot x \cdot d \cdot \left(\frac{\delta x}{\delta t} \right)^2$$

Führt man aus (1) $\delta p = p \frac{\delta x}{x}$, aus (2) $\delta t = \frac{x}{U}$ ein, und streicht

beiderseits $\frac{(\delta x)^2}{x}$, so erhält man

$$p = d \cdot U^2 \text{ oder } U = \sqrt{\frac{p}{d}} = \sqrt{g \frac{p}{s}} \quad (3)$$

ein Ausdruck, der schon von Newton aufgestellt wurde. Die Geschwindigkeit wäre 1) direkt proportional der Wurzel aus dem Drucke p , 2) verkehrt der Wurzel aus dem specifischen Gewichte s oder der Dichte d .

293. Folgerungen. — Da dieser Ausdruck die anfängliche Verschiebung δx oder Verdichtung δd nicht enthält, so gilt er für jeden beliebigen kleinen Anstoss, also auch für eine Reihe derselben, für eine beliebige Bewegung des Bodens, oder für die Fortpflanzung aller Töne. Wirklich hört man die Töne eines Musikstückes, mögen sie hoch oder tief, stark oder schwach sein, auch aus der grössten Entfernung in der richtigen Reihenfolge, was mit einer ungleichen Geschwindigkeit nicht vereinbar wäre.

Für atmosphärische Luft im Normalzustande ist der Barometerstand $b = 0,76$ Met. und $p = b \cdot S$, $\frac{S}{s}$ aber das Verhältniss des Gewichtes des Quecksilbers zu dem des Wassers (160) 10517, endlich $g = 9,80605$ (78). Daraus folgt denn

$$U = 279,96 \text{ Met.}$$

Mit der Beobachtung verglichen, erwies sich diese Zahl gegen $\frac{1}{5}$ zu klein. Laplace fand die Ursache in den Vermehrungen und Verminderungen, welche die Expansivkraft durch die aus den Verdichtungen und Verdünnungen der Luft hervorgehenden kleinen Erwärmungen und Erkältungen erleidet. Er fügt daher einen Coefficienten bei und schreibt

$$U = \sqrt{k \cdot g \cdot \frac{P}{s}}$$

wo sich k nach direkten Versuchen von Masson über die Wärmeentwicklung bei Compression der Gase zu 1,419 bestimmte. Hieraus

$$U = 333,48 \text{ Met.}$$

Für ein anderes Gas hat man diesen Werth von U durch die Wurzel der auf Luft bezogenen Dichte d zu dividiren. Man erhält (161)

	d	U
Atm. Luft	1	333,48
Sauerstoff	1,105628	324,48
Stickstoff	0,971360	338,37
Wasserstoff	0,069268	1269,11
Kohlensäure	1,529084	269,68

294. Beobachtungen. — Ueber die Fortpflanzung des Schalles in der freien Luft wurden sehr viele Versuche angestellt. An dem Ende einer langen gemessenen Entfernung befanden sich zwei Beobachter. An der einen Station wird ein Feueergewehr, bei grösserer Entfernung eine Kanone losgebrannt; der Beobachter der andern Station zählt auf einer Tertienuhr die Zeit zwischen dem mit der Entstehung des Knalles gleichzeitigen Sehen des Rauches und dem spätern Hören desselben. Die Ent-

fernung durch die Sekundenzahl dividirt, gibt die Geschwindigkeit für den vorhandenen Zustand der Luft. Da der Wind, je nach seiner Richtung, die Geschwindigkeit durch Forttragen der Luftmasse vermehrt oder vermindert, so muss das Mittel gleich nach einander in entgegengesetzter Richtung gemachter Beobachtungen genommen werden.

Nach Bravais Zusammenstellung sind für trockene Luft bei 0° die genauesten Bestimmungen die folgenden:

Lacaille (Commiss. der Par. Acad. 1738)	332,9
Benzenberg (1809)	333,7
Goldingham (1821)	331,0
Arago (Commiss. der Par. Acad. 1822)	330,8
Moll und van Beck (1823)	332,5

Die letzten Versuche scheinen die vorzüglichsten und liefern ein von der Theorie nur um 1 Met. abweichendes Resultat.

Da durch Aenderung des Luftdruckes p und s proportional sich ändern, so folgt aus der Theorie, dass in der Höhe und Tiefe, nach oben und unten, die Geschwindigkeit bei gleicher Temperatur die gleiche bleiben soll. Direkte Versuche ergaben in der That

Stampfer (1822) Höhenunterschiede v. 1364 Met. 332,96

Bravais und Martin (1844), solche v. 2116 Met. 332,4

Hingegen vermindern bei gleichem Druck p , Erwärmung und Feuchtigkeit das spec. Gewicht s und vermehren die Geschwindigkeit; Erkältung und Trockenheit vermindern sie. Bezeichnet t die Temperatur, $\gamma = 0,00366$ den Coeff. der Luftausdehnung (158); ferner ϖ den Dampfdruck in Millim. $\beta = 0,0005$ einen vom Gewichte des Wasserdampfes bei Vergleichung mit Luft abhängigen Coeff., so hat man allgemein

$$s = s_0 \frac{1 - \beta \varpi}{1 + \gamma t} \text{ folglich } U = 332,5 \sqrt{\frac{1 + \gamma t}{1 - \beta \varpi}}$$

So fand Kendall, ein Begleiter des Capt. Franklin, bei $-20,5$ die Geschwindigkeit 331,2, bei -40°C dagegen nur 313,9. Umgekehrt erhält man für einen mittlern Luftzustand ($t = 12^\circ$)

$$U = 340,50 \text{ Met.}$$

Mit diesen Bestimmungen für eine nach allen Seiten sich ausbreitende Fortpflanzung, stimmen ziemlich diejenigen überein, welche Wertheim auf indirektem Wege für die Längenfortpflanzung erhielt. Aus den Tönen einer Pfeifenröhre, verglichen mit ihrer Länge, lässt sich nämlich, wie später gezeigt wird, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, freilich nicht mit der gleichen Sicherheit wie direkt, ermitteln. Wertheim erhielt aus seinen, bei verschiedenen Temperaturen ausgeführten Versuchen, nach Reduktion auf 0°, das nur um 1,6 Met. abweichende Mittel 330,92 Met.

295. Geschwindigkeit in Flüssigkeiten. — Bei festen und flüssigen Körpern spielt die Elasticität der Compression und Dilatation die nämliche Rolle wie die Vermehrung und Verminderung der Expansivkraft bei der Luft. Der Ausdruck für die elastische Kraft ϖ (195) (für P, L, A, λ sind hier $\varpi, x, 1, \delta x$ gesetzt) ist nämlich

$$\varpi = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\delta x}{x}$$

er entspricht demjenigen von $d p$ (292), wenn man $\frac{1}{\varepsilon}$ statt p einführt und gibt

$$U = \sqrt{\frac{g}{\varepsilon \cdot s}}$$

Versuche über die Fortpflanzung im süßen Wasser wurden von Colladon und Sturm (1827) bei 9° im Genfersee angestellt und zwar zur Nachtszeit. Der eine Beobachter liess unter dem Wasser einen Hammer A (Fig. 200) an eine Glocke B schlagen, wodurch zugleich mittelst einer Hebelverbindung eine brennende Lunte a auf eine Pulvermasse b traf. Der andere Beobachter, in bekannter Entfernung, zählte die Secunden vom Erscheinen der Flamme bis sein Ohr, an eine ins Wasser gesenkte Schaufel c von hartem Holze gehalten, den Schall vernahm, der durch seinen besondern Klang von dem durch die Luft fortgepflanzten sich unterschied. So ergab sich die Geschwindigkeit von 1435 Met., gegen 4 mal mehr als in der Luft. Beudant in Meerwasser erhielt 1500 Met.

Aus den Tönen mit Wasser gefüllter Röhren fand hingegen Wertheim bei 10—20° die ganz abweichende Zahl 1173,4 als Mittel zahlreicher Versuche und es würde demnach, abweichend von der Luft, die allseitige und die einseitige Fortpflanzung mit verschiedener Geschwindigkeit vor sich gehen, — was von der Art abhängen müsste, wie in beiden Fällen die elastischen Kräfte vorwärts und seitwärts sich äussern. Bezeichnet U die all-, U' die einseitige Fortpflanzungsgeschwindigkeit, so glaubt Wertheim, freilich ohne ganz entscheidenden Beweis,

$$U = U' \sqrt{\frac{3}{2}} = 1,2247 U'$$

annehmen zu sollen, was für Wasser 1437,1 Met. gibt. Andere Flüssigkeiten, in Röhren zum Tönen gebracht, führen auf folgende Werthe der beiden Geschwindigkeiten

		s	U'	U
Süßes Wasser (Seine)	15°	0,9996	1173,4	1437,1
Meerwasser (künstlich)	20	1,0264	1187,0	1453,8
Chlornatrium	18	1,1920	1275,0	1561,6
Schwefels Natron	20	1,1089	1245,2	1525,1
Kohlens. Natron	22,2	1,1828	1301,8	1594,4
Salpeters. Natron	20,9	1,2066	1363,5	1669,9
Alcohol	23	0,7960	947,0	1159,8
Weingeist (mit Wasser)	20	0,8362	1049,9	1285,9
Terpentin	24	0,8622	989,8	1212,3
Schwef. Aether	0	0,7529	946,3	1259,0

296. Geschwindigkeit in festen Körpern. — Die einzigen direkten Messungen hat Biot an einer langen leeren Röhrenleitung von Gusseisen ausgeführt. Sie bestand aus 376 Röhren, zusammen 951,25 Met. lang. Da die Leitung unterirdisch war, konnten keine Lichtsignale gegeben werden; dagegen hörte man einen am einen Ende auf das Rohr geführten Schlag, am andern Ende zweimal, zuerst durch das Eisen, nachher durch die Luft der Röhre. Man zählte nun die Zeit zwischen den beiden Schlägen und abgezogen von der leicht zu bestimmenden

durch die Luft ($\frac{951,25}{332,5} = 2,8609$ Sec.), erhält man diejenige für 951 Met. Eisen. So ergab sich 3488 Met., das $10\frac{1}{2}$ fache der Luft, ein Resultat, das aber wegen der vielen störenden Verbindungsstellen nicht genau sein kann.

Auf indirektem Wege, aus dem Tönen von Stäben hatte schon frühe Chladni die Geschwindigkeit in festen Körpern abgeleitet und folgende Zahlen, mit der Geschwindigkeit in der Luft verglichen, erhalten:

Zinn	7,5	Eichenholz	10,7
Silber	9,0	Buche, Birne	12,5
Messing	10,7	Ahorn	13,3
Kupfer	12,0	Ulme, Birke	14,4
Eisen	16,7	Linde, Kirsche	15,0
Gebrannte Erde	11,0	Weide, Fichte	16,0
Glas	16,7	Tanne	18,0

Neuere Versuche, von Wertheim, geben, mit Luft zu 332,24 M. verglichen, für gezogene Metalle folgende Werthe.

	s	U'		s	U'
Blei	11,169	4,257	Kupfer	8,933	11,167
Zinn	7,313	7,480	Platin	21,259	8,218
Cadium	8,665	7,903	Eisen	7,748	15,108
Gold	18,514	6,424	Gussstahl	7,717	15,108
Silber	10,369	8,057	Stahldraht	7,718	14,961
Zink	7,008	11,007			

Änderungen der Temperatur und des innern Gefüges, insofern sie auf die Dichtigkeit s und den Elasticitätscoefficient ϵ einwirken, ändern auch die Geschwindigkeiten der Fortpflanzung.

Bei festen Körpern lässt sich, mehr noch als bei Flüssigkeiten, eine Ungleichheit der Geschwindigkeit bei einseitiger und allseitiger Fortpflanzung erwarten. Allein die letztere entgeht der Beobachtung. Nach Cauchy's Berechnungen soll die Geschwindigkeit U' in einem dünnen Stabe zu derjenigen U in einer unbegrenzten Masse die Beziehung haben

$$U' = U \sqrt{\frac{8}{9}} = 0,9428 U$$

Wertheim aus seinen Versuchen leitet für die Geschwindigkeiten der Fortpflanzung U' , U'' und U , in einem Stabe einer Scheibe und einer Masse die Beziehungen ab

$$U'' = U \sqrt{\frac{8}{9}} = 0,9428 U, \quad U' = U \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,8164 \cdot U.$$

Lamé zeigt auf dem Wege der Theorie, dass es in einer homogenen, amorphen Masse (235) immer zwei Fortpflanzungsgeschwindigkeiten gibt, die eine U gehört Verschiebungen an nach der Richtung der Fortpflanzung und wird von Verdichtungen und Verdünnungen begleitet, die andere V solchen senkrecht zu dieser Richtung, ohne Dichtigkeitsänderungen. Für beide erhält man

$$U = \sqrt{\frac{(\alpha + 2\beta)g}{s}} \quad \text{und} \quad V = \sqrt{\frac{\beta \cdot g}{s}}$$

mit dem constanten Verhältniss

$$\frac{U}{V} = \sqrt{\frac{\alpha + 2\beta}{\beta}}$$

α und β sind die (203) genannten Hauptconstanten, von welchen sämtliche Elasticitätserscheinungen abhängen.

297. Schallwellen. — Jeder Ton entsteht aus einer Reihe Hin- und Herbewegungen des tönenden Körpers, von denen jede a b Fig. 201 erst verdichtend und vorwärts stossend, dann b a verdünnend und zurückziehend auf die Luft wirkt. Eine solche ganze Schwingung oder Oscillation, nach welcher der Körper sich wieder in seiner ursprünglichen Stellung befindet, kann aus einer Reihe ganz kleiner Anstösse zusammengesetzt gedacht werden, deren jeder der anliegenden Luft eine kleine Dichtigkeitsänderung und Verschiebungsgeschwindigkeit mittheilt. Alle diese Anstösse wandern hinter einander mit der gleichen Geschwindigkeit U fort und ergreifen successiv alle auf einander folgenden Theile auf gleiche Weise.

Hat der tönende Körper seine Schwingung in der Zeit T vollendet, so wird der erste Anstoss in eine Entfernung

$$l = U \cdot T$$

gelangt sein. l heisst die Länge der Schallwelle. Sie bezeichnet also den in der Schwingungszeit durchlaufenen, ihr proportionalen Weg und umfasst alle Bewegungszustände, welche die Lufttheilchen von allen Bewegungsstufen des tönenden Körpers erhalten haben und durch welche hinwieder ein jedes Theilchen in der Schwingungszeit T geht.

Die Schallwelle besteht demnach aus zwei Hälften, deren erste, wenn λ die Schwingungsweite der Anregung ist, die Länge $\frac{1}{2} l - \lambda$ hat, ihre Bewegung von der Vorwärtsbewegung des tönenden Körpers erhielt und im Zustande der Verdichtung und Vorwärtsbewegung sich befindet; während die zweite, bei einer Länge $\frac{1}{2} l + \lambda$ die entgegengesetzten Zustände aufweist. Die Punkte am Anfang, am Ende und zwischen beiden Halbwellen sind momentan in Ruhe und ohne Verdichtung oder Verdünnung; diejenigen in der Mitte beider Hälften im Maximo Dichtigkeitsänderung $+\zeta$ und $-\zeta$ und der Schwingungsgeschwindigkeit $+\nu$ und $-\nu$. (Fig. 201) stellt diese Zustände bildlich dar.

298. Schwingungszustand der Theilchen. — Vorerst besteht zwischen der Verdichtung $\zeta = \frac{\delta d}{d}$ und der Verschiebungsgeschwindigkeit

$\nu = \frac{\delta x}{\delta t}$ ein einfaches constantes Verhältniss; denn setzt man (292)

$\delta t = \frac{x}{U}$ und berücksichtigt, dass $\frac{\delta x}{x} = \frac{\delta d}{d}$, so folgt

$$\frac{\nu}{\zeta} = U.$$

Da der tönende Körper eine Reihe gleicher Schwingungen macht, so erlangen die Theilchen der Anregungsstelle auch wieder die gleichen Werthe der Verdichtung ζ und der Oszillationsgeschwindigkeit ν , wenn die Zeit t um $T, 2T, 3T \dots$ wächst. Da $\sin(2\pi \frac{t}{T})$ und $\cos$

$(2 \pi \frac{t}{T})$ diese Eigenschaft besitzen, so kann man sich jene Grössen durch Funktionen

$$\varphi(2 \pi \frac{t}{T})$$

soleher Sinus und Cosinus dargestellt denken.

Aus der Wiederholung der Schwingungen entstehen eben so viele Schallwellen, die hinter einander fortwandern und das gleiche Lufttheilchen eben so oft hin- und herbewegen. Der Bewegungszustand, den ein Theilchen zur Zeit t in der Entfernung r von der Anregungsstelle hat, ging von dieser Stelle um die Zeit $\frac{r}{U} = r \frac{T}{l}$ früher aus und wird also demjenigen

$$\varphi[2 \pi (\frac{t}{T} - \frac{r}{l})]$$

entsprechen.

Dieser Ausdruck umschliesst, wie es sein soll, eine doppelte Periodicität: 1) erstens an der gleichen Stelle, für ein gleiches r , erlangt er den gleichen Werth, wenn t um T , $2T$, $3T \dots$ wächst, 2) zu der gleichen Zeit t , für verschiedene Punkte, die um l , $2l$, $3l, \dots$ oder um ein Vielfaches der Wellenlänge von einander abstehen.

Cap. 3. Aenderungen der Fortpflanzung.

299. Reflexion eines Anstosses. — Gelangt eine Erschütterung, durch eine Röhre mit Luft fortwandernd, an einen festen Boden, so kehrt ein Theil der Bewegung wieder nach dem Anfang der Röhre zurück. Die letzte Luftschicht nämlich kann die Verschiebung nicht annehmen; der entsprechende Theil der Kraft wirkt zur Vermehrung der Dichtigkeits- und Druckänderung; in Folge dessen verliert die vorletzte Schicht nicht bloss ihre ganze Bewegung, sondern gewinnt sofort wieder Verschiebung mit Verdichtung im entgegengesetzten Sinne, welche als zurückgeworfene oder reflektirte Bewegung zurückwandert.

Um die Erscheinungen noch vollständiger aufzufassen, denke man sich einen Anstoss, der, nach dem Durchgang durch eine erste Reihe gleicher elastischer Schichten, an die Grenzstelle gelangt, wo eine zweite Reihe verschiedener, dichter oder dünner beginnt. Wie bei ungleichen elastischen Kugeln (207) gelangt die letzte Schicht der ersten Reihe in Folge ihrer Wirkung auf die erste Schicht der zweiten Reihe nicht zur Ruhe; gegen eine dichtere wirkend, geht sie zurück, gegen eine dünnere geht sie noch vorwärts und beide Wirkungen werden sich als Verdichtung oder Verdünnung durch die erste Reihe von Schichten rückwärts fortpflanzen. Ausserdem aber setzt der Anstoss mit einer der ursprünglichen analogen Veränderung durch die zweite Reihe der Schichten weiter.

300. Die Aenderungen der Bewegung. — Bezeichnen U , U' die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den beiden Medien, deren Dichte d

und d' ist; ferner v, v', v'' und ζ, ζ', ζ'' die grössten Verschiebungsgeschwindigkeiten und Verdichtungen des einfallenden, weiter gehenden und reflectirten Anstosses, so beweisen die Bedingungen (298)

$$\frac{v}{\zeta} = U, \quad \frac{v'}{\zeta'} = U', \quad \frac{v''}{\zeta''} = U'' = -U \quad (1)$$

dass im fortgehenden Strale v' und ζ' nothwendig gleiches Zeichen, im reflectirten v'' , ζ'' immer entgegengesetztes haben müssen. Bezeichnen also $+v$ und $+\zeta$ Vorwärtsbewegungen und Verdichtungen, $-v$, $-\zeta$ Rückwärtsbewegungen und Verdünnungen, so hat man

	Einfall. Beweg	Fortgeh. Beweg.	Reflectirte Beweg.
Reflexion am dichten Medium			
Anregung zur Verdichtung	$+\zeta, +v$	$+\zeta', +v'$	$+\zeta'', -v''$
» » Verdünnung	$-\zeta, -v$	$-\zeta', -v'$	$-\zeta'', +v''$
Reflexion am dünnen Medium			
Anregung zur Verdichtung	$+\zeta, +v$	$+\zeta', +v'$	$-\zeta'', +v''$
» » Verdünnung	$-\zeta, -v$	$-\zeta', -v'$	$+\zeta'', -v''$

Ausserdem gelten an der Grenzfläche noch zwei andere Bedingungen:

1) die Grenztheilchen, weil stets anliegend, haben gleiche Geschwindigkeiten. Daraus folgt

$$v + v'' = v' \quad (2)$$

3) Die lebendige Kraft einer einfallenden Welle muss sich wieder finden in derjenigen der weiter gehenden und reflectirten Welle. Bezeichnet nun $l = U \cdot T$ (297) die Wellenlänge im ersten Medium, $l' = U' \cdot T$ im zweiten, so ist die ganze lebendige Kraft, welche die Masse $a \cdot d \cdot l$ erhalten hat, indem alle Theilchen eine Geschwindigkeit von 0 bis v gewannen, $a d U T v^2$ und ähnlich für die fortgehende und reflectirte Welle. Nach Weglassung des gemeinsamen Faktors $a T$ erhält man

$$d U v^2 = d' U' v'^2 + d U v''^2 \quad (3)$$

Aus (2) und (3) ergibt sich dann

$$v' = v \frac{2 d U}{d U + d' U'} \quad \text{und} \quad v'' = v \frac{d U - d' U'}{d U + d' U'}$$

und weiter aus (1)

$$\zeta = \zeta' \frac{U}{U'} \cdot \frac{2 d U}{d U + d' U'} \quad \text{und} \quad \zeta'' = -\zeta' \frac{d U - d' U'}{d U + d' U'} \quad (4)$$

v'' und ζ'' werden $= 0$, es erfolgt keine Reflexion, wenn beide Medien gleich beschaffen sind.

301. Echo und Wiederhall. — Wie der einzelne Anstoss oder die einfache Welle, wird der aus einer Folge von Bewegungen entstehende Schall an der Grenze zweier Medien in zwei Bewegungen zerlegt, eine im zweiten Medium fortschreitende und eine in dem ersten zurückkehrende. Diese letztere, bei hinlänglicher Entfernung der Wand, um von der ursprünglichen unterschieden zu werden, bildet das Echo. Da das Ohr höchstens 9 — 10 der aller kürzesten Laute in 1 Sec. unterscheiden kann, so erfordert die getrennte Wahrnehmung des kürzesten Lautes als Echo einen Weg nach der Wand und zurück von wenigstens

$\frac{1}{10} U = 34$ Met. oder eine Entfernung der Wand von wenigstens 17 Met.

Eine Folge von Lauten von der Dauer von τ Secunden setzt als Echo eine Entfernung voraus von $\tau \cdot 170$ Met. voraus. Mauern, Felswände, Bergseiten, Waldränder, selbst die Wolken veranlassen Zurückwerfungen des Schalles und Echo's; wenn die Erscheinung sich mehrmals getrennt wiederholt, mehrfache Echo's; wenn ohne scharfe Trennung, ein Rollen, wie wir es bei entfernten Schüssen oder beim Donner beobachten.

Liegt die reflectirende Wand, wie es gewöhnlich in Zimmern, Gewölben, Höhlen der Fall ist, nicht weit genug, um die einzelne Silbe getrennt wieder zu geben, so wird das Echo zum Hall. Der Wiederhall hat auf das Hören der Rede einen doppelten Einfluss, eine Verundeutlichung, aus dem Uebergreifen der rückkehrenden Silben auf die folgenden direkt gehörten, eine Verstärkung aus dem Zusammenfallen zweier Wahrnehmungen. Je nachdem der eine oder andere Einfluss vorwaltet, kann der Wiederhall der Stimme nachtheilig oder günstig sein.

Die Stärke des Echo's, besonders aber des Halles, hängt wesentlich von der Beschaffenheit der reflectirenden Wände ab. Die Verschiebungsgeschwindigkeit v'' des rückkehrenden Schalles ist nämlich um so stärker, je mehr dU und $d'U'$ von einander abweichen, mit andern Worten, je verschiedenartiger die beiden Medien an Dichte und Elasticität von einander sind. Stein- und Gypswände hallen stärker als Holzwände, diese stärker als Verkleidungen von Tuch und Wolle, welche letztern den Schall gleichsam absorbiren.

302. Reflexion schiefer Richtungen. — Meist achtet man einzig des Echo's der eigenen Stimme, oder des zu seinem Ausgangspunkt zurückkehrenden Schalles, was voraussetzt, dass die Schallrichtungen (Schallstralen) nahe senkrecht gegen die Wand treffen. Mit einiger Aufmerksamkeit bemerkt man aber Echo's von Tönen eines abstehenden Ursprunges. Entfernt vor und seitwärts von einem einzelnen Hause stehend, an dem vorüber eine Strasse führt, hört man das Fahren eines herankommenden Wagens plötzlich stärker als vor- und nachher, dann nämlich, wenn die Schallrichtungen vom Wagen zum Hause und von diesem zum Beobachter gleiche Winkel mit der Mauer bilden, der Schall wird unter gleichem Winkel zurückgeworfen oder reflectirt.

Diess Gesetz erklärt sich auf ähnliche Weise wie die Reflexion einer elastischen Kugel an einer harten Platte (208). Die Wirkung, welche die letzte Luftschicht erleidet, zerlegt sich senkrecht und parallel zur Wand; die erstere verwandelt sich in eine rückkehrende, die mit der unveränderten parallelen combinirt, die Bewegung der zurückgeworfenen Schallrichtung zusammensetzt.

Aus dem Gesetze der Reflexion unter dem gleichen Winkel erklärt sich die Eigenschaft mancher Gewölbe, den Schall nach gewissen Seiten oder an gewissen Stellen besser als anderswo hören zu lassen. Von einem Kugelgewölbe wird der im Centrum erregte Schall nach gleicher Zeit auch wieder dem Centrum zugeführt. Den Eigenschaften der Ellipse zufolge gehen alle von dem einen Brennpunkte divergirenden Schallrichtungen, gleichfalls nach gleich langen Wegen, gegen den an-

dem Brennpunkt (146). Ein parabolisches Gewölbe wirft sie vom Brennpunkte ausgehend parallel zurück, eine ebene Wand so, als wäre der Ausgangspunkt ebenso weit hinter derselben, als er wirklich vor derselben liegt.

303. Stärke des Schalles. — Das Ohr empfängt seine Wahrnehmungen stets durch Vermittlung der Luft; selbst an Metall oder Holz gehalten, bleibt der die Wirkung empfangende Theil (das Trommelfell) stets durch eine Luftstrecke von dem leitenden festen Körper getrennt. Die Luft wirkt dann auf das bewegliche Trommelfell vermöge der Verdichtungen und Verdünnungen, der Geschwindigkeiten hin und her, welche jede Welle mit sich bringt. Aller Wahrscheinlichkeit nach hängt die Stärke der Wahrnehmung von der Stärke der mechanischen Wirkung oder von der lebendigen Kraft der anliegenden Luftschichten ab und ist daher proportional 1) der Dichte d oder dem Drucke p der Luft und 2) dem Quadrate der Verschiebungsgeschwindigkeit v . Man hätte also für die Intensität I des Schalles

$$I = \alpha \cdot d \cdot v^2$$

Die Erfahrung bestätigt, dass in dünner Luft, auf Bergen die Stärke des Schalles abnimmt. Schon Saussure bemerkte eine auffallende Schwäche des Knalles einer Pistole auf dem Montblanc. Ein niedriger Barometerstand, in Verbindung mit hoher Temperatur und Feuchtigkeit, genügen, bereits wahrnehmbare Unterschiede am gleichen Orte hervorzubringen.

Pflanzt sich der Schall durch eine Röhre fort, so wirkt jede Schicht auf eine andere von gleicher Masse und die Verschiebungsgeschwindigkeit bleibt sich, abgesehen von der Reibung an den Röhrenwänden, unverändert; der Schall pflanzt sich beinahe ungeschwächt fort, so dass z. B. das Picken einer Uhr am Ende einer selbst langen Röhrenleitung gehört wird. Mittelst Blechröhren, an denen man Ecken und Winkel möglichst vermeidet, wird die Stimme durch grosse Gebäude fortgetragen, ohne dass sie anderswo als an dem offenen Ende der Röhre vernommen würde.

Bei der Fortpflanzung im Freien dagegen, breitet sich der Schall nach allen Seiten aus und zwar gleichzeitig auf alle Theilchen einer immer grössern Kugelfläche. Da in der Entfernung r , die Kugelfläche $4\pi r^2$ ist, so wird eine Welle, deren Länge l , eine Masse $4\pi d l r^2$ enthalten und in der Schwingungszeit T eine lebendige Kraft $4\pi d l r^2 v^2$ gewonnen haben. Da diese Grösse für jede andere Entfernung r die gleiche ist, so erhält man

$$r^2 \cdot v^2 = r'^2 \cdot v'^2$$

woraus das Verhältniss der Intensitäten

$$i : i' = v^2 : v'^2 = r'^2 : r^2$$

verkehrt wie das Quadrat der Entfernung.

Da das Ohr die Stärke der Wahrnehmung nur höchst unvollkommen beurtheilt, man zudem bis jetzt wenigstens kein genaues Mittel zur Messung der Schallstärke besitzt, so fehlt diesem ohne Zweifel richtigen Gesetze die Bestätigung der Beobachtung.

Wie der Parallelismus der Schallrichtungen in einer Röhre, die Intensität erhält, die Divergenz sie schwächt, so wird die

Convergenz derselben von einer grössern auf eine kleinere Luftmasse sie verstärken. So wirken die obengenannten kugelförmigen, elliptischen, parabolischen Gewölbe durch Concentration der Wirkung auf einzelne Punkte, so verstärkt das Hörrohr vermöge seiner Trichter-gestalt, durch Uebertragung der Bewegung von der weiten Oeffnung auf die kleine Luftmasse der Spitze am Ohre, die Stimme u. s. f.

304. Stehende Schwingungen. — Huyghens hat zuerst das Gesetz klar ausgesprochen, dass kleine Bewegungen, welche, von verschiedenen Seiten herkommend, ein gleiches Theilchen ergreifen, ungestört weiter gehen und sich nur vorübergehend zu einer resultirenden Bewegung zusammensetzen. Dieser schon bei Gelegenheit der Wasserwellen (147) erläuterte Grundsatz der Coexistenz kleiner Bewegungen, findet vollständig seine Anwendung auf die kleinen Verdichtungen ζ und Geschwindigkeiten der Verschiebung v der zusammentreffenden Schallwellen.

Als einfachsten Fall denke man sich zwei Wellenzüge einander gerade entgegenlaufend, beide aus vollkommen gleichartigen Wellen gebildet. Seien T und l die gemeinsame Schwingungszeit und Wellenlänge (297) v' , v'' die Geschwindigkeit, ζ' , ζ'' die Verdichtungen der Theilchen irgend eines Punktes beider Züge. Nach dem obigen Grundsatz gehen die Wellenzüge ungestört durcheinander, wie es auch der gleichzeitige Fortgang des Schalles des verschiedensten Ursprunges durch die gleiche Luft beweist. Dauern die Wellenzüge fort, so entwickelt sich aus den Resultirenden der beiden Bewegungen ein Zustand stehender Schwingungen (147). Sind $A' B'$, $A'' B''$ (Fig. 202) die beiden Wellenzüge in einem beliebigen Momente, beide graphisch durch Wellenlinien, deren Ordinaten die Verdichtungen und Verdünnungen bezeichnen, dargestellt, so gibt es Stellen a , a' , $a'' \dots$ wo stets gleiche Verdichtungen ζ' , ζ'' und um $\frac{1}{2} l$ davon entfernt, andere b , b' , $b'' \dots$ wo gleiche Verdünnungen — ζ' , — ζ'' , zugleich aber in beiden Fällen entgegengesetzte Geschwindigkeiten $+v'$, — v'' oder — v' , $+v''$ zusammenfallen. Diese Stellen ohne Bewegung, aber mit doppelter Dichtigkeitsänderung von $+(\zeta' + \zeta'')$ zu — $(\zeta' + \zeta'')$ heissen auch hier Knoten. In der Mitte zwischen ihnen, also wieder um $\frac{1}{2} l$ auseinander, liegen andere Stellen c , c' , $c'' \dots$ und d , d' , d'' , wo stets Verdichtung und Verdünnung zusammentreffen, die Dichte also unverändert bleibt, hingegen die Geschwindigkeiten nach der einen und andern Seite von $+(v' + v'')$ bis — $(v' + v'')$ variiren. Es sind Bäuche der Bewegung. Die Linie $A B$ stellt für den genannten Augenblick den resultirenden Schwingungszustand dar.

305. Der Savart'sche Versuch. — Savart und vollständiger noch Seebeck haben den einfachsten Fall dieser Art untersucht. Einer ebenen freistehenden Wand gegenüber wurde ein andauernder Ton hervorgebracht. Die einfallenden Wellen werden dann, als von einem ebenso weit hinter

der Wand liegenden Centrum (302) herkommend, zurückgeworfen und auf der senkrechten Linie zur Wand, bilden sie einen dem direkten genau entgegenlaufenden Wellenzug. Mittelt eine sehr dünnen gespannten Haut von Gummi-elasticum A (Fig. 203), an der ein ganz kleines Pendelchen aus einem Coconfaden mit Siegellackkugeln herabhängt, untersuchte Seebeck die verschiedenen Stellen auf der Senkrechten. Die Membrane und das Pendelchen blieben an Stellen in Ruhe, die in gleichen Abständen von $\frac{1}{2}l$ aus einander und von der Wand entfernt lagen.

Savart, indem er dieselben Stellen mittelst des Ohres direkt aufsuchte, hatte zwar die Stellen, wo der Ton verschwand, gleichfalls um $\frac{1}{2}l$ auseinander, aber gegen die vorgenannten um $\frac{1}{4}l$ verschoben gefunden.

Seebeck klärte indess den Widerspruch dadurch auf, dass er eine Membran mit Pendel anwandte, die in der Oeffnung eines kleinen Gefässes in demselben angebracht war (Fig. 203 B). Die beiden Wellenzüge statt von beiden Seiten direkt auf die Membran zu wirken, thun es von der gleichen, der eine direkt, der andere nach Umbiegung. Bewegt sich nun die Luft stets in der Richtung der Fortpflanzung, indem die Schwingungsrichtung sich mit der Schallrichtung umbiegt, so folgt von selbst, dass die Knotenstellen, wo die gleichen Bewegungen entgegengesetzte waren und wo sie in gleichem Sinne wirken, zu Bäuchen werden, und umgekehrt. Die Beobachtung, diess bestätigend, dient hinwieder als Beweis für die gleichzeitige Umbiegung der Schwingungs- und Fortpflanzungsrichtungen. Dass indess bei scharfer Umbiegung keine Abweichungen beider Richtungen eintreten, darf nicht als experimentell entschieden betrachtet werden.

306. Interferenz des Schalles. — Wenn von zwei Punkten einem gleichen andauernden Tone zugehörnde kugelförmige Wellensysteme ausgehen, so werden sich dieselben im Raume schneiden und zu resultirenden Bewegungen combiniren oder interferiren. Die Durchschnittspunkte zweier bestimmter Kugelflächen liegen auf einem zu der Verbindungslinie der Centren senkrechten Kreise. Sind es zwei verdichtende oder zwei verdünnende Wellen, so entsteht auf diesem Kreise grössere Verdichtung und Verdünnung; die Verschiebungsgeschwindigkeit wird klein und nähert sich der Senkrechten zur Linie den Mittelpunkt. Sind es entgegengesetzte Dichtigkeitsänderungen, so heben sie sich ganz oder theilweise auf, während die starken Verschiebungen dem Parallelismus zu jener Linie sich nähern.

Verfolgt man im Verlauf seiner Bewegung einen einzelnen Kreisdurchschnitt zweier Kugelwellen $A'B'$, $A''B''$, so wachsen beide Radien in gleicher Zeit um gleich viel, und der wachsende Kreis beschreibt im Raume eine rings um die Centrallinie symmetrische krumme Hülle, für welche $r - r' = \text{Const.}$ sein wird, was die Gleichung einer Hyperbel ist, deren Brennpunkte den Ausgangspunkten a, a' der Wellen entsprechen. Der ganze Raum

wird demnach von hyperboidalen Flächen mit gemeinsamen Axen und gleichen Brennpunkten durchsetzt. Auf den einen, die Axe in Entfernungen l durchschneidend, sind grosse Wechsel der Dichte, aber geringe Verschiebungen; auf den andern, zwischen den vorigen liegend, das Umgekehrte.

Einen Fall der Interferenz zeigt die Stimmgabel, deren Zinken A, B (Fig. 204) beim Tönen abwechselnd gegen und von einander schwingen. Dreht man die tönende Gabel am nahe gehaltenen Ohre, so hört man den Ton stark gegenüber den 4 Hauptflächen (a und b), hingegen schwach oder gar nicht auf 4 Richtungen (c und d) die ungefähr den Kanten entsprechen. Diese Richtungen, die keine Geraden, sondern Hyperbeln sind, ändern sich mit den Querdimensionen der Zinken. Nach W. Weber bilden sie mit den Senkrechten zur Ebene der Zinken einen Winkel von $\alpha = 36^\circ$ und 46° , wenn das Verhältniss der Breite B zur Dicke D (in der Zinkenebene gemessen) $1 : 0,31$ oder $1 : 0,60$ ist. Die Aufhebung der Bewegung hat ihren Grund in der Interferenz der Wellensysteme, welche gleichzeitig von der Luft vor und hinter den Zinken und zwar mit entgegengesetzten Bewegungszuständen ausgehen, wobei man allerdings annehmen muss, dass die verdichtende und verdünnende Welle nicht ganz gleichzeitig ausgehen, sonst müsste die Interferenz, statt auf einer Curve, auf der zur Seitenfläche der Zinke senkrechten Linie sich zeigen.

307. Die Brechung des Schalles. — Wenn die Schallrichtungen schief an die Grenze eines Mediums von anderer Beschaffenheit und anderer Fortpflanzungsgeschwindigkeit gelangen, so scheinen sie ihre Richtungen zu verändern und gebrochen zu werden. Diese in der Optik viel wichtigere, beim Schall noch wenig bekannte Erscheinung wurde v. SONDHAUSS nachgewiesen. Er bildete aus zwei über einen Kreis gezogenen Membranen von Collodium A (Fig. 205) durch Anfüllen des Zwischenraumes mit Kohlensäure eine mehr als fussgrosse Linse, für welche also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit 267 statt 333 Met. (293) war. Liess man nun auf der einen Seite in a eine Uhr picken oder ein Instrument tönen, so hörte man den Schall auf der andern Seite auf der Axe b stärker als seitwärts davon, dann auf der Axe selbst stärker in einer gewissen Gegend b als näher an derselben oder weiter davon in b' oder b''. Diese Gegend entfernte sich bei Annäherung des tönenden Körpers. Es folgt daraus, dass die divergirenden Schallrichtungen beim Eintritt in die Kohlensäure und beim Wiederaustritt ihre Richtung verändern und gegen eine bestimmte Stelle der Axe convergirend werden.

Cap. 4. Von den Tonverhältnissen.

308. Die Schwingungszahl. — Von den drei Eigenschaften des Tones (289) hat keine grössere Wichtigkeit als die Höhe und Tiefe. Das Ohr ist dafür besonders empfindlich und erhält davon den Eindruck des Wohlklanges und Missklanges. Die Auswahl der in der Musik benutzten Töne, derjenigen nämlich, welche mit oder nach einander gehört

besonders gut klingen, beruht einzig auf der Wahrnehmung des Ohrs, unabhängig von der Art ihrer Erzeugung. Schon die Alten unterschieden die gegenwärtig benutzten Töne; später erst bestimmte man ihre Schwingungszahlen und erkannte die mathematischen Beziehungen, welche den Wohlklang begründen.

Die Höhe eines jeden Tones wird durch seine Schwingungszahl, die Anzahl seiner Schwingungen in 1 Sec., genau bezeichnet. Man bestimmt dieselbe direkt mittelst der bereits erwähnten (289) Sirene von Cagniard-Latour. Der Luftstrom *a* eines Gebläses geht durch die kreisförmig gestellten runden Oeffnungen einer festen Metallplatte *b* (Fig. 206), dann durch die entsprechenden aber schiefgeborten Oeffnungen einer drehenden Scheibe *c*. Befinden sich die Löcher genau über einander, so geht der Luftstrom, einen Stoss gegen die äussere Luft ausübend, durch, setzt zugleich aber durch seinen Druck auf die Wände der schiefgeborten Oeffnungen die Scheibe in Drehung. Entsprechen sich die Oeffnungen nicht, so ist der Strom unterbrochen. Erst hört man nur einzelne Stösse, bei stärkerem Winde und schnellerer Drehung tritt ein wahrnehmbarer Ton hervor, der ohne Sprung durch alle möglichen Höhen gesteigert wird. Die Scheibe dreht sich um eine verticale Axe *d*, in deren Schraube ohne Ende man, z. B. am Anfange einer Minute, ein mit 100 Zähnen versehenes Rädchen *e* eingreifen lässt und am Ende der Minute wieder auslöst und hemmt. Ein zweites Rädchen *f* mit Zeiger macht 1 Umdrehung für 50 Umdrehungen des ersten Rädchens oder 5000 der Scheibe oder endlich, wenn letztere 20 Löcher hat, für 100,000 Schwingungen. Die so bestimmte Anzahl Schwingungen durch 60 dividirt liefert die auf 1 Sec. gerechnete Schwingungszahl des Tones unter Annahme einer gleichen Fortdauer desselben.

Kennt man die Schwingungszahl *m* eines Tones, so ist die Dauer Einer Schwingung $T = \frac{1}{m}$, folglich die Wellenlänge (294) bei mittlerem Luftzustand $l = \frac{U}{m} = \frac{340}{m}$ Met. Die Wellenlänge eines jeden Tones berechnet sich also aus seiner beobachteten Schwingungszahl, durch Division in die Fortpflanzungsgeschwindigkeit *U*.

309. Die Octavtöne. — Der Ton, der für das Ohr mit einem andern am vollständigsten zusammenstimmt, ihn gleichsam nur verstärkt und verschärft, heisst der Octavton. Mit der Sirene geprüft findet man das Verhältniss der Schwingungszahlen 2 : 1. Der Octavton des ersten Octavtones macht wieder doppelt so viel Schwingungen als dieser; also mit dem Grundton verglichen 4 : 1. Fährt man so fort, so erhält man nach oben und unten — die Schwingungszahl des Grundtones *C* zu 1 angenommen —, folgende Reihe der Octavtöne

Octavtöne	...	$\underline{\underline{C}}$	$\underline{\underline{C}}$	$\underline{C}$	<i>C</i>	<i>c</i>	$\overline{c}$	$\overline{\overline{c}}$	...
Schwingungszahl	..	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16 ..

Das Ohr beurtheilt die Entfernung dieser Töne von einander, das Tonintervall, als gleich; letzteres entspricht also nicht der Differenz der Schwingungszahlen, sondern dem durch Division erhaltenen Quotienten. Je mehr das Verhältniss für zwei Töne von 1 abweicht, desto entfernter steht sich die Höhe derselben.

Da die obige Zahlreihe den positiven und negativen Potenzen von 2 entspricht, so hat der n te Octavton eines Tones, dessen Schwingungszahl m_0 ist, selbst die Schwingungszahl

$$m = m_0 2^n$$

Was den absoluten Werth der in der Musik vorkommenden Octavtöne betrifft, so betrachtete Chladni die einfache Schwingung (eine Hin- oder Herbewegung) in 1 Secunde, oder die halbe ganze Schwingung (Hin- und Hergang), als ersten Ton der Reihe. Dann bezeichnet der 5te Octavton oder $2^5 = 32$ die Zahl einfacher Schwingungen des tiefsten in der Orgel musicalisch benutzten Tones, das C und man erhält für die Zahl einfacher Schwingungen m' und ganzer m , so wie für die Länge einer ganzen Welle l (einer ganzen Bewegung entsprechend) in Meter, bei mittlerem Luftzustand, folgende Zahlen:

		m'	m	l			m'	m	l
32 füssiges	C	32	16	21,281.	Eingestr.	c	512	256	1,330
Contra	C	64	32	10,640.	Zweigestr.	c	1024	512	0,665
Grosses	C	128	64	5,320.	Dreigestr.	c	2048	1024	0,332
Ungestr.	c	256	128	2,660.	Viergestr.	c	4096	2048	0,166

Die Chladnische Bestimmung ist indess rein conventionel, und daher begreift sich, dass in Ermangelung einer allgemeinen Autorität und eines absoluten Bestimmungsmittels, demselben c z. B. von verschiedenen Verfassern und an verschiedenen Orchestern eine abweichende Schwingungszahl beigelegt wurde, wie die folgende aus den benutzten A Gabeln berechnete Zusammenstellung beweist

	m'		m'
Chladni und Marloye	512,0	Berliner Orchester	524,4
Dulong	500,4	Paris. Grosse Oper	517,2
Sauveur	523,2	Ital. Oper	508,8
Weber	518,4	Com. Oper	513,6
Hallström	537,6	Wiener Orchester	529,0
Scheibler	527,2		

310. Die diatonische und chromatische Tonreihe. — In den Zwischenraum zweier Octavtöne schaltet die Musik, dem Wohlklange folgend, vorerst noch 6 Haupttöne ein, deren Zahlverhältniss oder Intervall vom Grundton und unter sich durch folgende Bruchzahlen ausgedrückt wird

Intervall			vom Grundton		unter sich
Prim	C	1	1,0000		
Secund	D	$\frac{9}{8}$	1,1250	$\frac{9}{8}$	1,1250
Terz	E	$\frac{5}{4}$	1,2500	$\frac{10}{9}$	1,1111

Intervall			vom Grundton		unter sich
Quart	F	$\frac{4}{3}$	1,3333	$\frac{16}{15}$	1,0667
Quint	G	$\frac{3}{2}$	1,5000	$\frac{9}{8}$	1,1250
Sext	A	$\frac{5}{3}$	1,6667	$\frac{10}{9}$	1,1111
Septime	H	$\frac{15}{8}$	1,8750	$\frac{9}{8}$	1,1250
Octave	c	2	2,0000	$\frac{16}{15}$	1,0667

Es folgt hieraus, dass die musicalisch bestklingenden Tonverhältnisse den einfachsten Verhältnissen der Schwingungszahlen entsprechen. Die Quinte, die Quarte, die Terze, die Sexte sind in dieser Beziehung wichtiger als die Secunde und Septime. Hingegen weichen die auf einander folgenden Töne um ungleiche Intervalle ab. Das Intervall $\frac{9}{8}$ eines grossen ganzen Tones kommt 3 mal vor, dasjenige $\frac{10}{9}$ eines kleinen ganzen 2 mal, das kleinste $\frac{16}{15}$ eines grossen halben Tones ebenfalls 2 mal.

Die Musik verlangt eine noch grössere Mannigfaltigkeit von Tönen, daher wird die diatonische Tonreihe durch Einschalten von Halbtönen in die 5 grössern Intervalle zu der chromatischen mit 12 Halbtönen ergänzt. Würde aber die Einschaltung nach einem grossen Halbton ($\frac{16}{15}$) vorgenommen, so fiel der Ton nicht gegen die Mitte

des Zwischenraumes; man wählt daher das Intervall $\frac{25}{24} = 1,0416$ eines kleinen Halbtones. Bei der Einschaltung kann man entweder durch Multiplication mit $\frac{25}{24}$ von dem tiefern Tone ausgehen, was die ange-

hängte Silbe is andeutet; oder durch Multiplication mit $\frac{24}{25}$ von dem höhern, was durch es angezeigt wird. Die beiden so eingeschalteten Töne stehen nahe genug, dass man sie in der praktischen Musik, d. h. mit Rücksicht auf die Unvollkommenheit unseres Organs, als zusammengehörend betrachten darf. Die grösste Entfernung der Töne is und es wird durch Division von $\frac{25}{24}$ in $\frac{24}{25} \cdot \frac{9}{8}$ erhalten werden und sein $(\frac{24}{25})^2 \cdot \frac{9}{8} = 1,0368$.

311. Die Temperatur der Töne. — Die chromatische und diatonische Tonreihe leiden an dem Uebelstande, dass die Intervalle der auf einander folgenden Töne ungleich sind, was unmöglich macht, von jedem der Töne auszugehen und ein beliebiges Intervall ein- oder mehrmal zu nehmen. Um diess für die wichtigern Intervalle des Musikstückes zu können, werden die Töne temperirt, d. h. um das noch kleinere Intervall eines Comma $\frac{81}{80} = 1,0125$ erhöht oder vertieft.

Diess Verfahren lässt sich nur bei Instrumenten mit beliebig veränderlichen Tönen, wie die Violine, anwenden, bei solchen mit festen Tönen, wie das Piano, die Orgel etc. hingegen nicht. Man stimmt diese Instrumente auf die gleichschwebende Temperatur,

indem man das wichtigste Intervall, die Octave, rein erhält, den Zwischenraum aber, statt in 12 ungleiche, in 12 gleiche Halbtöne theilt. Das gegenseitige Verhältniss dieser Halbtöne, unter sich und zum Grundton, wird nicht mehr durch einfache ganze Zahlen ausgedrückt, ist genau genommen nicht mehr das bestklingende, allein der Vortheil leichter Anwendbarkeit auf alle Musikstücke überwiegt.

Da das Intervall x der gleichschwebenden Tonreihe 12 mal wiederholt 2 geben soll, so hat man

$$x = 2^{1/12} = 1,059463$$

hieraus ergeben sich die in der folgenden Tafel aufgeführten Näherungszahlen der verschiedenen Töne.

Reine Tonreihe				Gleichschweb. Tonreihe.			
Bezeichnung	Benennung	Verhältniss		Success. Interv.	Schw. Zahl — c bis c	Benennung	Potenz Verhältn. v. 2. z. Grundt.
		Gem. Br.	Decim. Br.				
C	ut	1 : 1	1,00000		512,00	Prim	$0/12$ 1,00000
Cis	ut [#]	25 : 24	1,04167	1,0417	533,33 {	kleine Sec.	$1/12$ 1,05946
Des	re ^b	27 : 25	1,08000	1,0368	552,96 {		
D	re	9 : 8	1,12500	1,0417	576,00	Grosse Sec.	$2/12$ 1,12246
Dis	re [#]	75 : 64	1,17187	1,0417	600,00 {	kleine Terz	$3/12$ 1,18921
Es	mi ^b	6 : 5	1,20000	1,0240	614,40 {		
E	mi	5 : 4	1,25000	1,0402	640,00 {	Grosse Terz	$4/12$ 1,25992
Fes	fa ^b	32 : 25	1,28000	1,0173	655,36 {		
Eis	mi [#]	125 : 96	1,30208	1,0240	666,66 {	Quart	$5/12$ 1,33484
F	fa	4 : 3	1,33333	1,0240	682,66 {		
Fis	fa [#]	25 : 18	1,38889	1,0417	711,11 {	Verm. Quint	$6/12$ 1,41421
Ges	sol ^b	36 : 25	1,44000	1,0367	737,28 {		
G	sol	3 : 2	1,50000	1,0417	768,00	Quinte	$7/12$ 1,49831
Gis	sol [#]	25 : 16	1,56250	1,0417	800,00 {	kleine Sexte	$8/12$ 1,58740
As	la ^b	8 : 5	1,60000	1,0240	819,20 {		
A	la	5 : 3	1,66667	1,0417	853,33	grosse Sexte	$9/12$ 1,68179
Ais	la [#]	125 : 72	1,73611	1,0417	888,89 {	kleine Sept.	$10/12$ 1,78100
B	si ^b	9 : 5	1,80000	1,0368	921,60 {		
H	si	15 : 8	1,87500	1,0417	960,00 {	grosse Sept.	$11/12$ 1,88775
Ces	ut ^b	48 : 25	1,92000	1,0172	983,04 {		
His	si [#]	125 : 64	1,95313	1,0240	1000,00 {	octave	$12/12$ 2,00000
c	ut ₂	2 : 1	2,00000	1,0240	1024,00 {		

312. Accorde. — Man bezeichnet mit dem Worte Accord (Drei- oder Vierklang) eine Vereinigung von Tönen, die dem Ohre mit einander besonders gut klingen, daher unter sich möglichst einfache Verhältnisse haben. Die wichtigsten Tonverbindungen dieser Art sind:

Der Duraccord, als Vierklang, enthält folgende Töne und Verhältnisse:

1) Die Tonica.	Grundton	C	1	1) u. 2) Grosse Terze	$\frac{5}{4}$
2) Mediante.	Gr. Terze	E	$\frac{5}{4}$	2) u. 3) kl. Terze	$\frac{6}{5}$
3) Dominante.	Quinte	G	$\frac{3}{2}$	3) u. 4) Quarte	$\frac{4}{3}$
4)	Octave	c	2	1) u. 3) Quinte	$\frac{3}{2}$
				2) u. 4) kl. Sexte	$\frac{8}{5}$

Der Mollaccord, bestehend aus

1) Tonica	Grundton	C	1	1) u. 2) kleine Terze	$\frac{6}{5}$
2) Mediante	kl. Terze	Es	$\frac{6}{5}$	2) u. 3) grosse Terze	$\frac{5}{4}$
3) Dominante	Quinte	G	$\frac{3}{2}$	3) u. 4) Quarte	$\frac{4}{3}$
4)	Octave	c	2	1) u. 3) Quinte	$\frac{3}{2}$
				2) u. 4) gr. Sexte	$\frac{5}{3}$

Dur- und Mollaccorde unterscheiden sich nur durch die Verschiedenheit der Mediante, wodurch die beiden ersten Intervalle, grosse und kleine Terze, sich umgekehrt ordnen.

Multipliziert man die Töne eines Accordes alle mit einem gleichen Tonverhältniss, der Quarte z. B. $\frac{4}{3}$, so erhält man neue Accorde, die man Duraccord und Mollaccorde der Quarte nennt und mit den Duraccorden und Mollaccorden des Grundtones combiniren kann.

Harmonische Tonreihe heisst man die Reihe von Tönen, deren Schwingungszahlen der natürlichen Zahlreihe 1, 2, 3, 4 . . . entsprechen. In ihr kommen natürlich alle einfachen, weil alle möglichen Verhältnisse einfacher Zahlen vor; sie spielt überdiess als häufig vorkommend, in der Acustik eine wichtige Rolle. Sie besteht aus folgenden Tönen:

Schwingungszahlen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ton	C	c	g	c̄	ē	ḡ	a ^{is} + c̄	d̄	ē	f ^{is} — ḡ		

Mit Ausnahme der beiden Primzahlen 7 und 11, fallen die 12 ersten Töne der harmonischen Tonreihe auf ganze Töne der auf 4 Octaven ausgedehnten diatonischen Tonreihe.

313. Combinationstöne. — Werden zwei Töne, deren Schwingungszahlen m und m' sind, zugleich gehört, so sendet jeder einzeln dem Ohr seine verdichtenden und verdünnenden Wellen und kann daher mit dem andern interferiren. Es treten nämlich in regelmässiger Wiederkehr Momente ein, wo für eine oder vielmehr eine Reihe von Schwingungen die Verdichtungen oder Verdünnungen und die entsprechenden Verschiebungsgeschwindigkeiten beider Wellenzüge ganz oder nahe zusammenfallen und dann wieder andere, wo Verdichtungen mit Verdünnungen und entgegengesetzte Verschiebungen sich am Ohre begegnen. Im ersten Fall wird dasselbe durch Interferenz (305) stärker, im zweiten schwächer affizirt werden und die Wiederholung dieser Erscheinung macht auf dasselbe den Eindruck einer Reihe von Stössen oder Schwebungen.

Bezeichnet x die Zahl solcher Coincidenzen in 1 Sec., also $\frac{1}{x}$ die Dauer einer derselben, und geht man von einer derselben aus, so wird die nächste wieder eintreten, nachdem der höhere Ton, dessen Schwingungszahl m , 1 Schwingung mehr als der tiefere m' gemacht hat. In der Zeit $\frac{1}{x}$ macht aber der erste Ton eine Zahl $\frac{1}{x} : \frac{1}{m} = \frac{m}{x}$, der andere eine solche $\frac{1}{x} : \frac{1}{m'} = \frac{m'}{x}$ Schwingungen. Man hat daher, wenn $m > m'$ ist

$$\frac{m}{x} = 1 + \frac{m'}{x} \text{ woraus } x = m - m'$$

Die Anzahl der Coincidenzen in 1 Sec. ist gleich der Differenz der Schwingungszahlen, um so grösser also, je verschiedener diese Zahlen.

Die Schwebungen sind, seit Scheibler namentlich, das schärfste Mittel geworden, die Identität oder Verschiedenheit zweier Töne zu beurtheilen, deren Unterschied das Ohr nicht mehr erfasst. Kennt man nämlich die Schwingungszahl m eines Tones und gibt derselbe mit einem andern, auf eine Secunde berechnet, eine Anzahl x Schwebungen, so ist die Schwingungszahl des zweiten, $m' = m + x$.

Folgen sich die Schwebungen so schnell, dass man sie einzeln nicht unterscheidet, weil deren mehr als 32 auf die Secunde fallen, so entwickelt sich aus ihnen ein dritter, der Combinationston, der natürlich tiefer als die beiden ursprünglichen ist. Wären z. B. die beiden Töne c und c , wofür $m' = 512$ (Halbschw.), $m = 640$, so wird $x = 128$, was den zweiten tiefern Octavton C bezeichnet, der also gleichzeitig vernommen werden würde. Der erste Combinationston kann sich dann wieder, wie Hallström erläutert, mit den ursprünglichen Tönen nach der nämlichen Regel zu neuen Combinationstönen zusammensetzen, deren Zahl für ein geübtes Ohr sich noch dadurch vervielfältigt, dass die Haupttöne mancher Instrumente stets von schwachen Nebentönen begleitet sind, die mittelst Combination sich oft mehr als gewöhnlich geltend machen.

314. Schwingungen verschiedenen Ursprungs. — Savart hielt dafür, die Schwingungen verschiedenen Ursprunges könnten sich nicht zu einem einzigen Tone von grösserer Schwingungszahl verbinden. Zwei gleiche Zahnräder mit einander drehend, aber so gestellt, dass die Lücken des einen den vollen Theilen des andern entsprechen, gaben, an eine Feder streifend, ungeachtet die Zahl der Schwingungen die doppelte war, dem Ohr dennoch den Ton des einzelnen Rades und nicht die Octave.

Seebeck hat jedoch erwiesen, dass bei hinlänglich gleichartigen und hinlänglich genau eintreffenden Schwingungen diess allerdings der Fall ist. Eine mit geraden Löchern versehene Sirenscheibe (308) wurde mittelst eines fallenden Gewichtes und eines Flügel-

rades in gleichförmiger Drehung erhalten. Blies man von der gleichen Seite mittelst zweier Röhren, welche um die halbe Entfernung der Löcher aus einander standen, oder mittelst zwei Röhren auf zwei Löcherreihen die abwechselten, so trat in beiden Fällen, in Folge einer doppelten Zahl von Stößen, die Octave hervor. Dagegen nicht, wenn das eine Rohr von entgegengesetzter Seite wirkte als das andere, weil die entgegengesetzten Wirkungen am Ohr die ursprüngliche Zahl der Dichtigkeits- und Geschwindigkeitsänderungen nicht verändert. — Umgekehrt gelang es, durch entgegengesetztes Blasen gegen 2 verschiedene Löcher einer einzigen oder zweier gleicher Löcherreihen, den Ton zu vernichten, indem die gleichzeitig entgegengesetzten Wirkungen, am Ohr interferirend, sich aufhoben. Es kommt überhaupt immer nur auf die Aenderungen an, welche die am Ohr befindliche Luft erleidet.

315. Tonänderung durch Translation. — Das letztere wird namentlich auch durch die Höhenänderung erwiesen, welche der gleiche Ton für einen Beobachter erleidet, der sich mit grosser Geschwindigkeit, z. B. auf einer Locomotive, der Tonquelle nähert oder von ihr entfernt. Im ersten Fall erscheint ihm der Ton höher, im zweiten tiefer als er wirklich ist.

Sei U die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Schalles (340 Met.) u die Geschwindigkeit, mit der der Beobachter sich entfernt. Der Ton

habe die Schwingungszahl m , so dass $\frac{1}{m}$ die Dauer Einer Schwingung ist. In dieser Zeit entfernt sich der Beobachter um $\frac{u}{m}$, wozu der Schall

eine Zeit $\frac{1}{m} \frac{u}{U}$ nöthig hat. Während die wahre Zeit zwischen zwei Schwingungen $\frac{1}{m}$ ist, wird sie für den Beobachter $\frac{1}{m} (1 + \frac{u}{U})$; die wahre und scheinbare Schwingungszahl werden demnach sein

$$m \text{ und } m' = \frac{m}{1 \pm \frac{u}{U}}$$

Würden z. B. zwei Locomotiven, die eine die Tonquelle, die andere den Beobachter tragend, sich, jede mit 10 Met. Geschwindigkeit, von einander entfernen, so wäre $\frac{u}{U} = \frac{20}{340} = \frac{1}{17}$, also $m' = \frac{17}{18} m$, bei

Annäherung hingegen $m' = \frac{17}{16} m$. Der Ton würde also, bei der Kreuzung der Locomotiven um $\frac{16}{18} = \frac{8}{9}$ oder um eine ganze Secunde sinken.

Auch diese Folgerungen haben Beobachtungen von Buys-Ballot bestätigt.

Cap 5. Blasinstrumente.

316. Vorbemerkung. — In den Blasinstrumenten ist die Luft der tönende Körper, doch erlangt sie diese Eigenschaft nur, wenn ihre Schwingungen ungewöhnlich stark und durch äussere Anregung beständig unterhalten werden. Die erste Bedingung verlangt, dass die Luftmasse geeignet sei in dauernde stehende Schwingungen (304) zu gelangen, welche viel stärker als die einfach fortschreitenden werden können. Ohne die zweite Bedingung ginge ein zu grosser Theil der Bewegung an die umgebende Luft über, als dass ein wahrnehmbares Fortschwingen möglich wäre. So besteht denn jedes Blasinstrument aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen: dem Mundstücke, das die Schwingungen erzeugt und unterhält und der Röhre, welche die tönende Luftmasse einschliesst. Als Mundstück kann jede Vorrichtung dienen, welche mit denen der Röhre gleichartige Schwingungen erzeugen kann, als Rohr jede Luftmasse, welche hinlänglich starker stehender Schwingungen fähig ist.

317. Das Mundstück. — Die Mundstücke der meisten Blasinstrumente ordnen sich unter drei Classen:

1) Das Lippenmundstück (Fig. 207 A) besteht aus einer einfachen Kante, der Lippe a, an der ein Luftstrom sich bricht. Aus den Wirkungen des Druckes, den er auf die Luft an der Kante hervorbringt und der Rückwirkung, welche die Expansivkraft der Compression zur Folge hat, entstehen Schwingungen, welche die Luft der Röhre ergreifen können. Die Natur dieser Schwingungen an der Lippe ist aber mannigfach veränderlich und daher von der Beschaffenheit des Rohres selbst abhängig, wesshalb eine gleiche Lippe für verschiedene Töne und Röhren dienen kann; stärkeres Blasen hingegen macht, aus leichtbegreiflichen Gründen, die Luft geneigt, schnellere Schwingungen zu machen.

Bei der Panpfeife und der Flöte hat das Lippenmundstück die einfachste Gestalt eines vom Mund angeblasenen scharfen Randes. Zusammengesetzter ist es bei den Pfeifen. Der Wind wird durch den Stiefel oder das Zuleitungsrohr a (Fig. B) in die Kammer b geleitet, von wo er auf regelmässige Weise durch die Ritze c auf die an dem Auge befindliche Lippe d getrieben wird, ohne in das Rohr selbst einzudringen. Meist sind Lippe und Blasöffnung seitlings, können aber mit Vortheil auch unten am Rohr angebracht werden.

2) Das Zungenmundstück (C) unterscheidet sich von dem vorigen dadurch, dass nicht die Luft allein, sondern ein festes hölzernes oder metallenes Blättchen b, die Zunge, hin- und herschwingt und dadurch den Eintritt der in das Rohr strömenden Luft abwechselnd öffnet und schliesst. Das Blättchen heisst an- oder durchschlagend, je nachdem es von der Schlussstelle nur nach einer oder nach beiden Seiten schwingt.

Die Zunge, vermöge ihrer starken Elasticität, schwingt ziemlich selbstständig, tönt daher für sich allein, und wirkt vollkommen gut nur

mit Röhren, welche denselben oder einen in einfachem Verhältniss stehenden Ton zu geben fähig sind. Mittelst der Krücke *c* jedoch kann man die Länge der Zunge und damit auch ihre Schwingungen etwas verändern.

Zu den Instrumenten mit einfacher Zunge gehören das Clarinett und die Zungenpfeifen, zu denen mit doppelter Zunge das Fagott und die Schnabelpfeife.

3) Das Hornmundstück (D) besteht aus einem einfachen Trichter *a*, der im Grunde aber nur den die Schwingungen auffangenden, nicht den dieselben erzeugenden Theil des Mundstückes darstellt. Die Schwingungen entstehen nämlich an den auf angemessene Weise gestellten und gespannten Lippen des Blasenden. Insofern der geblasene Wind an den etwas getrennten und gespannten Rändern derselben hingeht, ähnelt diess Mundstück dem eigentlichen Lippenmundstück, insofern jene Ränder aber durch die Spannung vorgeschriebene, selbst tönende Schwingungen machen, und der Wind durch das tönende Rohr strömt, den Zungenpfeifen. Die Art des Blasens, so wie die Stellung und Spannung der Lippenränder, also eine gewonnene Uebung, sind das Bestimmende des Tones; doch werden nur diejenigen Töne rein erklingen, deren auch die Röhre fähig ist.

Mit diesem Mundstücke sind alle hornartigen Instrumente versehen, Wald- und Posthorn, Trompete, Posaune etc.

318. Töne langer Röhren. — Dass das Tönende der Blasinstrumente wirklich die Luft und nicht die Wand der Röhre ist, wird dadurch erwiesen, dass es gleichgültig ist, aus welchem, wenn nur hinlänglich festem Stoffe die letztere besteht. Gleiche Röhren aus Metall, Holz, Papiermasse, Gyps u. s. f. geben den gleichen Ton.

Bei etwas langen und engen Röhren erfolgen die Luftschwingungen, wie man an Glasröhren, die mit Rauch gefüllt sind, erkennt, longitudinal, mit Ausnahme eines kleinen Theiles jedoch, zunächst der Blasöffnung, in welchem die Schwingungen, von der Lippe divergirend, eine unregelmässigere Richtung haben.

Eine solche Röhre auf eine Windlade (Fig. 208) aufgestellt, kann in doppelter Weise, entweder offen oder gedeckt zum Tönen gebracht werden und ist in jedem dieser Zustände fähig, durch allmählig stärkeres Blasen sprunghaft eine ganze Reihe, oft von 7 und 8 Tönen, zu geben. Die offene Pfeife lässt so die harmonische Tonreihe (312), die gedeckte, eine Octave tiefer beginnend, die Tonreihe der ungeraden Zahlen hören. Man hat also

Offene Pfeife, Schwingungszahlen	1, 2, 3, 4, 5 . . .
Gedeckte Pfeife "	$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$. . .

Es erklären sich diese Tonreihen, wenn man auf die Bedingungen zurückgeht, welche die zur Erzeugung stehender Schwingungen erforderlichen entgegengesetzten Wellenzüge hervorbringen (304). Haben sich die vom Mundstücke erregten Schwingungen durch die Röhre bis zum andern Ende fortgepflanzt, so erfolgt daselbst theilweise Zurückwerfung (299), in der offenen Pfeife an der freien Luft, die, nach allen

Seiten ausweichend, ein beweglicheres Mittel als die longitudinal-schwingende der Röhre darstellt, in der gedeckten an dem festen unbeweglichen Boden. Die reflektirten Wellen durchkreuzen die direkt fortschreitenden, werden dann wieder unten, dann wieder oben reflektirt u. s. f. und so entsteht eine stets unterhaltene Steigerung der stehenden Wellen, welche das Tönen bewirkt. Der Anregungsstelle entspricht nothwendig eine Stelle starker Bewegung, ein Bauch der Schwingung; dem andern Ende bei offener Pfeife, ein zweiter Bauch, bei geschlossener ein Knoten der Bewegung: die übrige Eintheilung im Innern ist nicht vorgeschrieben und kann daher durch die Neigung der Lippe, je nach dem Anblasen langsame oder schnellere Schwingungen zu geben, verändert werden.

Die Windlade Fig. 208 besteht aus einem mittelst der Pedale *a* getriebenen Gebläse *A*, welches den Wind durch das Rohr *b* in die Windkammer *B* treibt und mittelst des Stabes *c* beliebig gepresst wird. An der Windkammer *B* befinden sich erstens 8 Oeffnungen *d* zum Aufstecken von Röhren, zweitens, den Oeffnungen *d* entsprechend, Tasten *e*, bei deren Druck erstere den Wind erhalten.

319. Weitere Folgerungen. — Bei stehenden Schwingungen (304) beträgt die Entfernung zwischen einem Knoten und einem Bauche $\frac{1}{4}$ der Länge l einer ganzen fortgepflanzten Welle. Bezeichnet ferner m die Zahl ganzer Schwingungen des zugehörigen Tones, so ist (308)

$$m = \frac{U}{l}$$

Unter Wahrung der Grenzbedingungen entsprechen nun der Zahl von 1, 2, 3, 4 . . . n Knoten in der offenen Pfeife 2, 4, 6, 8 . . . $2n$ obiger Abtheilungen. Fig. 209 stellt diese Schwingungszustände dar, wobei die Knoten durch kleine Striche, die Bäuche der Bewegung durch Punkte angedeutet sind. Bezeichnet L die Länge des Rohres, so erhält man für den allgemeinen Fall von n Knoten

$$L = 2n \cdot \frac{l}{4}, \text{ folglich } m = \frac{nU}{2L}$$

In der gedeckten Pfeife gehören zu 0, 1, 2, 3 . . . n innere Knoten (Fig. 210) 1, 3, 5, 7 . . . $2n + 1$ Abtheilungen, so dass hier

$$L = (2n + 1) \frac{l}{4} \text{ und } m = \frac{(2n + 1)U}{4L}$$

welche beiden Ausdrücke, durch Einführen der Werthe von n , die oben genannten Tonreihen darstellen. Dass diese Eintheilungen in der Röhre wirklich vorhanden sind, wird dadurch erwiesen, dass an jeder Knotenstelle, ohne Aenderung des Tones ein Schieber oder Stempel, an jeder Bauchstelle eine Oeffnung angebracht werden kann, während an jeder andern Stelle der Ton sich verändern würde.

Hiernach ist die Schwingungszahl einer gegebenen Röhre in allen Fällen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit U direkt, der Röhrenlänge L verkehrt, endlich im einen Fall der Knotenzahl n , im andern der Grösse $2n + 1$ direkt proportional.

Die für den Grundton beider Röhren geltenden Beziehungen

sind es, welche indirekt, aus der gemessenen Röhrenlänge L und der durch die Sirene bestimmten Schwingungszahl m die Fortpflanzungsgeschwindigkeit U ergeben haben (294). Die Messung von L stösst jedoch an der Unkenntniss über den unregelmässig schwingenden Theil zunächst am Mundstücke auf eine Unsicherheit. Von dem bekannten Werthe von U ausgehend, hat umgekehrt Wertheim die Grösse der Correction bestimmt, deren die wirkliche Länge L bedarf, um die richtige Geschwindigkeit zu liefern, gelangte hierbei aber auf kein einfaches Gesetz.

320. Schwingungen cubischer Pfeifen und Flaschen. — Wenn die eine Dimension über die beiden andern nicht weit vorherrscht, so ist der Schwingungszustand kein so einfacher mehr; die von dem Mundstück ausgehenden Schwingungen pflanzen sich gegen die Wände fort, werden mehrfach reflectirt und vereinigen sich mit den Longitudinalbewegungen zu gemischten Schwingungen, welche die Theorie bisher nicht zu entwirren vermocht hat. Dann auch ändert sich der Ton mit der Breite und Dicke der Luftsäule und mit der Breite und Höhe der Blasöffnung. Mittelst Rauch hat Fermond erkannt, dass selbst drehende Bewegungen, vermuthlich aus Unregelmässigkeiten der Anregung, entstehen können.

Für den Grundton solcher, sogenannter Cubischer Pfeifen hat Savart aus Versuchen die beiden Regeln abgeleitet: 1) dass die Schwingungszahl m bei Pfeifen von ähnlicher Gestalt und Blasöffnung, den entsprechenden Dimensionen verkehrt proportional ist; 2) dass bei ähnlichen Blasöffnungen in ganzer Breite die Schwingungszahl von der Breite unabhängig, wohl aber der Wurzel aus der Länge und Dicke der Luftmasse verkehrt proportional ist.

Sondhauss hat das Resultat anderer Versuche über das Tönen kugel- und flaschenartiger Luftmassen unter folgende Formel gebracht, welche die Schwingungszahl m (ganze Schwingung) aus dem Vol. V der Luftmasse (ohne Hals) und der Fläche a der Blasöffnung genähert berechnen lässt:

$$m = \frac{\alpha}{2} \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{V}}$$

wo α constant ist. Für eine Cubische Pfeife, deren Dimensionen L , B , D sind, deren Blasöffnung die Breite B und Höhe h hat, wird dieser Ausdruck da $a = B \cdot h$ und $V = L \cdot B \cdot D$

$$m = \frac{\alpha}{2 \sqrt{L D}} \cdot \sqrt[4]{\frac{h}{B}}$$

und umfasst die Savart'schen Regeln.

Wertheim aus einer weit grössern Zahl von Beobachtungen, in welchen die Luftmasse am Boden der Röhren angeblasen wurde, gelangt auf einen umfassendern aber weniger einfachen Ausdruck. L , B , D sind die Länge, Breite und Dicke der Luftmasse (Fig. 211), S , s' , s'' der Querschnitt des Prismas und die Flächen der obern und untern Oeffnung.

$$m = \frac{U}{2 [L + c (B + D) k]}$$

c ist ein Coefficient, der für offene Pfeifen 0,187 ist, für gedeckte mit der Substanz der Wände sich ändert. k aber hat den Werth

$$k = 2 + \frac{S - s'}{\sqrt{S s'}} + \frac{S - s''}{\sqrt{S s''}}$$

Bei langen und engen Röhren verschwindet der zweite Theil des Nenners neben L . Bei kürzeren nimmt die Schwingungszahl ab, wenn Breite und Dicke wachsen und die beiden Oeffnungen abnehmen. Keines dieser Gesetze darf, wie Zamminer gezeigt hat, auf allgemeine Gültigkeit Anspruch machen, sondern passt genauer nur für die speciellen Umstände der Versuche.

Ueberdiess hat die Natur der Wände, wenn sie dünn und beweglich sind, einen grossen Einfluss auf den Ton. Meist vertieft er sich, im Vergleich mit dem Ton fester Röhren von gleicher Grösse. Sondhauss hat indess gezeigt, dass diess nicht immer der Fall ist, dagegen die vermuthlich streng richtige Regel aufgestellt, dass bei einem Tone Rohr und Wand ihre individuellen Schwingungszustände modificiren, um übereinstimmend zu schwingen; wo diess nicht geschieht, hört man mehrere oder unreine Töne.

321. Aenderungsmittel der Töne. — In den Blasinstrumenten ändert man die Töne durch folgende nun leicht erklärliche Mittel:

1) Aenderung der Dimensionen, namentlich der Länge. Enge und lange Röhren geben leichter höhere Töne und Abtheilungen als den Grundton. Je länger und enger zugleich, desto mannigfacherer Eintheilung wird das Rohr fähig; desto leichter wird es, durch verschiedenes Anblasen, wie bei den Blechinstrumenten namentlich, den Ton zu ändern. Die Pfeifen der Orgeln sind nur für den Grundton bestimmt, zu dem Ende erhalten sie verhältnissmässig grössere Querdimensionen und eine Länge, welche der Schwingungszahl nahe verkehrt proportional ist (320).

2) Verschiedenes Anblasen, theils hinsichtlich der Stärke des Windes, theils, beim Hornmundstück, der Art des Anblasens. Je stärker der Wind, desto mehr steigt der Ton, vorerst allmähig bis zu einem gewissen Punkte, dann durch einen plötzlichen Sprung auf den folgenden Ton der Reihe.

3) Decken der Oeffnung. Ein theilweises Decken, bei den Orgelpfeifen z. B. zum Stimmen derselben benutzt, vertieft den Ton allmähig bis auf die tiefern Octave, indem die Bauchstelle am Ende zum Knoten wird.

4) Anbringen von Seitenöffnungen mit Klappen. — Eine solche Oeffnung gestattet der Luft ein leichteres Ausweichen und hindert daher die Entstehung von Knoten. Die Entfernung zweier Oeffnungen, die einzeln geöffnet den Ton nicht ändern, gleich wie diejenige zweier Stellungen eines genau schliessenden Stempels, die es ebenfalls nicht thun, bezeichnet die Länge $\frac{1}{2}l$ einer stehenden Welle.

5) Ein ausgebogener Trichter am Ende der Röhre macht, dass die Grenze des Rohres weniger scharf vorgeschrieben ist und daher die Schwingungsweise im Innern von der Art des Anblasens mehr abhängig wird; daher auch erhalten vorzugsweise die langen Röhren der Blechinstrumente, deren Töne nur durch verschiedenes Anblasen verändert werden, solche Trichter, die man ausserdem mit der Hand mehr oder weniger decken kann.

Cap. 6. Weichelastische Körper.

322. Fortgepflanzte Schwingungen. — Als weich elastische Körper betrachtet man solche, welche wegen geringer elastischer Kraft oder Kleinheit der Dicke, der Biegung geringen Widerstand entgegensetzen und daher nur vermöge der Elasticität des Zuges Schwingungen machen. Dahin gehören Saiten und Membranen, wobei die Bewegung der Theilchen entweder transversal, senkrecht zur Längen- oder Flächenausdehnung des Körpers, oder longitudinal, längs der Länge und Fläche erfolgen kann.

Wenn an einer Stelle eines langen gespannten Seiles, z. B. durch einen Schlag oder eine Erschütterung, eine Einbiegung hervorgebracht wird, so sieht man dieselbe, von einer Ausbiegung nach der andern Seite gefolgt, längs dem Seile hinlaufen und, gleich einer Wasserwelle an fester Wand, vom festen Ende zurückgeworfen, wieder zurückkehren. Auch hier nehmen alle Stellen nacheinander alle successiven Bewegungszustände an und vollenden Eine Schwingung hin und her, in der Zeit, in welcher die Welle um ihre Länge fortschreitet. Wiederholt man die Erschütterungen in taktmässiger Folge, die zweite wenn die erste vollendet ist, so entstehen Wellenzüge, welche direkt und reflektirt fortlaufend sich kreuzen und auch hier, wie in der Luft stehende Wellen mit Knoten, ohne, und Bäuchen mit starker Bewegung, hervorbringen. Damit dieser Schwingungszustand, den man also nicht als einfachen, sondern als zusammengesetzten zu betrachten hat, sich erhalte und zum Tönen steigere, müssen die festen Enden als Knoten auftreten und die Abtheilungen einer halben ganzen fortschreitenden Welle ohne Rest in der Länge L enthalten sein.

324. Transversalschwingungen. — Unabhängig von seiner Entstehungsweise, kann man den Vorgang der Transversalschwingungen folgendermaassen sich denken:

Die Saite $a b$ (Fig. 212) habe die Länge L und den Querschnitt $a = \frac{\pi}{4} D^2$ und sei mit der Kraft P gespannt. Bringt man die Saite aus ihrer geraden Richtung, so wirkt die Spannung zur Wiederverkürzung oder zur Zurückführung in die Gerade; die Theilchen bewegen sich transversal. Die hiebei wirkende Kraft kann 1) der Spannung P und 2) der Ablenkung n der Mitte (194) direkt, endlich 3) der Länge umgekehrt proportional angenommen werden, oder

$$Q = \alpha P \frac{x}{L} \quad (1)$$

wo α ein constanter Coeffic. ist.

Diese Kraft nimmt mit der Ablenkung x bis o ab und theilt daher der Saite eine abnehmend beschleunigte Bewegung mit (26), welche ihr Maximum der Geschwindigkeit in der Geraden erlangt und von da die Saite auf die andere Seite treibt, wo die Bewegung mit zunehmender Verzögerung sich wieder erschöpft. Das Gleiche wiederholt sich nun im umgekehrten Sinne. So entstehen Schwingungen, analog denen eines Pendels, welche theoretisch betrachtet ins Unendliche fort-dauern müssten, in der Wirklichkeit aber 1) wegen Mittheilung von Bewegung an die Luft 2) wegen Abgabe von Bewegung an die Befestigungspunkte und endlich 3) in Folge der Druckdifferenz beider Seiten, allmählig erlöschen.

Ist die Saite nach einer Zeit t von Anfang der Schwingung mit ihrer Mitte in die Entfernung x gelangt und hat daselbst die Geschwindigkeit u gewonnen, so kann man annehmen, ein in der Entfernung y vom Ende befindliches Theilchen, dessen Masse $\frac{s}{g} a \delta y$, habe

genähert die mit u proportionale Geschwindigkeit $\frac{2y}{L} \cdot u$. Die Menge Bewegung (30) der ganzen Seite wird genähert sein

$$4 \frac{s}{g} \cdot \frac{a u}{L} \cdot S(y \delta y) = \frac{1}{2} \frac{s}{g} a L u \quad (2)$$

wenn $S(y \delta y)$ von $y = o$ bis $y = \frac{L}{2}$ genommen und verdoppelt wird.

(Formel II.)

Die Bedingung, dass die in der Zeit δt von der Kraft mitgetheilte Bewegungsmenge $q \delta t$ der von der Saite gewonnenen, der Beschleunigung δu entsprechenden $\frac{1}{2} \frac{s}{g} a L \delta u$ gleich sei (74) führt auf die Bedingung

$$\delta u = - 2 \alpha \frac{g}{s} \cdot \frac{P}{a L^2} \cdot x \delta t \quad (3)$$

wo das — Zeichen andeutet, dass wachsende u abnehmenden x entsprechen.

Dieser Ausdruck ist demjenigen (8) des zusammengesetzten Pendels (74) analog, wenn für α , ω und Q die Grössen x , n , $2 \alpha \frac{g}{s} \cdot \frac{P}{a L^2}$ gesetzt werden. Er führt daher auf die Zeit einer einfachen Schwingung

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{Q}} = \frac{\pi \cdot L}{\sqrt{2 \alpha}} \cdot \sqrt{\frac{s a}{g P}} \quad (4)$$

und, da durch höhere Rechnung $\sqrt{2 \alpha} = \pi$ gefunden wird, auf die Schwingungszahl (ganze Schw.)

$$m = \frac{1}{2 T} = \frac{1}{2 L} \cdot \sqrt{\frac{g P}{s a}} = \frac{1}{2 L D} \sqrt{\frac{g P}{\pi s}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g P}{L p}} \quad (5)$$

wenn man noch das Gewicht der Saite $p = a L s$ einführt.

Demzufolge ist die Schwingungszahl einer Saite verkehrt proportional 1) der Länge L , 2) der Dicke D , 3) der Wurzel aus dem specifischen Gewichte s und direkt proportional 4) der Wurzel aus der Spannung P .

325. Versuche. — Man prüft diese Gesetze mittelst des Sonometers (oder Monochordes) (Fig. 213), an welchem die Länge des schwingenden Theiles $a c$ durch einen auf Eintheilung verschiebbaren Steg c , die Spannung aber durch die Gewichte P , die man an das eine über eine Rolle gehende Ende d der Saite hängt, geändert wird. Während das Gesetz der Länge sich bei Darm- und langen Metallsaiten befriedigend bestätigt, ist diess für dasjenige der Dicke weniger der Fall, bei Metallsaiten, weil mit der Dicke meist die Cohäsion sich ändert, bei Darmsaiten wegen ihres Mangels an Homogeneität. Noch weniger genau endlich bestätigt sich das Gesetz der Spannung, theils weil die Bedingung vollkommener Biegsamkeit nie erfüllt ist, theils weil bei grösserer Spannung ein kleiner Theil der Saite über den Steg hinausrückt.

Aus Versuchen findet Savart, dass man die richtige Schwingungszahl M aus der obenberechneten m mittelst eines Ausdrucks

$$M^2 = m^2 + m'^2$$

finden könne, wo m' die Schwingungszahl der Saite ohne Spannung, vermöge der Biegunselasticität allein, darstellt.

Da die Elasticität der Metalldrähte weit grösser als die der Darmsaiten ist, klingen erstere länger nach und halten länger aus als letztere, wie z. B. an den Pianofortesaiten beobachtet wird. Eine zwischen festen Punkten gespannte Metallsaite verstimmt sich etwas durch Wärme und Kälte; im ersten Falle sinkt, im zweiten steigt der Ton. Noch veränderlicher aber erweist sich die Stimmung der Darmsaiten unter dem Einflusse der Luftfeuchtigkeit, welche die Saite schlaffer macht; es genügt der Uebergang aus einem Zimmer in ein anderes oder die Nähe vieler Personen, um in Kurzem eine Violone zu verstimmen.

326. Abtheilungen. — Der Ton, mit welchem die Saite als Ganzes schwingt, ist ihr tiefster Grundton; da an ihrem Bewegungszustande aber nichts als die Ruhe der Endpunkte vorgeschrieben ist, so vermag sie, wie eine Luftsäule (319) noch eine Reihe höherer Töne, entsprechend einer ganzen Zahl von Knoten getrennter Abtheilungen, hervorzubringen (Fig. 214). Für n Knoten theilt sich die Länge L in $n + 1$ Abtheilungen, die für jeden Augenblick abwechselnd entgegengesetzt

schwingen und die zu einer Länge $\frac{L}{n + 1}$ gehörende Schwingungszahl

$$m = \frac{n + 1}{2 L D} \sqrt{\frac{g P}{\pi s}}$$

haben. Für $n = 0, 1, 2, 3 \dots$ erhält man die harmonische Tonreihe (312).

Man ruft diese Eintheilungen auf verschiedene Weise hervor 1) durch Klingenlassen des nämlichen Tones an einem nahen andern Instrumente, da dann die Luft die Anregung mittheilt und ein leises

Mitklingen veranlasst; — 2) indem man die Saite in einem aliquoten Theile ihrer Länge stützt und diesen Theil zum Schwingen bringt. An dem Abwerfen kleiner Papierstückchen von den Bäuchen, an dem Liegenbleiben auf den Knoten der Bewegung, erkennt man, dass die ganze Saite solche Abtheilungen annimmt. — 3) Eine leise Führung des Violinbogens an der einen oder andern Stelle, besonders in der Nähe der Stege, bestimmt die Saite, sich in zahlreiche Abtheilungen zu theilen und höhere Töne zu geben. Namentlich in der Mannigfaltigkeit und der Reinheit dieser hohen Flageolettöne bezeugt sich die Geschicklichkeit des Violinisten.

Wird der Grundton einer Saite, zumal wenn sie lang und dick ist, stark angestimmt, so unterscheidet das Ohr ganz gut, besonders beim Ausklingen, eine Reihe harmonischer Nebentöne. Die Entstehung der letztern scheint sogar eine Mitbedingung des kräftigen Erklingens der Saite. So erklärt Delezenne, dass eine Saite den Grundton nicht gehörig gibt, wenn man den Violinbogen genau auf die Mitte setzt oder mit zwei Bogen gleich entfernt von derselben in gleichem Sinne streicht, weil dann der Knoten des Octavtones sich nicht bilden kann, — während eine Anregung seitwärts oder mit zwei entgegengeführten Bogen den Ton erzeugt. Betrachtet man überhaupt die schwingende Saite über einem schwarzen Grunde mittelst der Loupe, so erscheint sie dem Auge doppelt, weil dasselbe nur die beiden Grenzstellungen eines längern Verweilens deutlicher unterscheidet. Meist aber sieht man sie mehrfach, als Beweis, dass verschiedene Schwingungszustände gleichzeitig ungestört bestehen können. Die Saite (Fig. 215), die neben dem Grundton die Octave hören lässt und von der Gestalt $a b c d e$ ausgeht, zeigt vorerst diese Linie, Grenzstellung beider Schwingungsarten, ebenso diejenige $a' b' c' d' e$ der andern Seite; ausserdem undeutlicher, nach der Mitte verschwindend, in einem nach b'' liegenden Durchschnittspunkte scharf, eine Linie $a b'' c'' d'' e$, auf welcher die entgegengesetzten Geschwindigkeiten beider Schwingungsarten sich nahe aufheben.

327. Saiteninstrumente. — Aus dem Gesagten erklären sich die folgenden Mittel der Tonveränderung an Saiteninstrumenten: 1) Benutzung ungleich dicker und ungleich beschaffener Saiten; dünnere für höhere, dickere für tiefere Töne; — 2) Aenderung der bis zum Steg zu rechnenden Saitenlänge durch Andrücken des Fingers oder Auswahl ein grössern Zahl ungleicher Saiten wie bei der Harfe oder dem Piano-forte; — 3) Aenderung der Spannung, das Hauptmittel des Stimmens, was namentlich die grosse Mannigfaltigkeit der Töne der Violenarten bedingt; — 4) die geschickte Führung des Violinbogens zur Weckung von Eintheilungen, wie bei den Flageolettönen.

Hinsichtlich ihrer Anregungsweise theilen sie sich in solche, die angeschlagen oder gekniffen werden, jenes beim Piano, dieses bei Guitarre und Harfe. Der Ton ist dann ein plötzlicher ausklingender, der bei Metallsaiten, um nicht zu lange zu dauern, durch Druck gedämpft werden muss. Die violenartigen Instrumente werden durch die Reibung des Violinbogens zu anhaltenden Tönen angeregt. Gehörig

gespannt und beharzt, reisst derselbe die Saite immer wieder aus ihrer Lage, ohne den ihr angemessenen Schwingungszustand zu ändern; zugleich bestimmt er die Stärke des Tones und dient hinwieder zur Dämpfung desselben.

Bei der Aeolsharfe, gleich wie bei langen Telegraphendrähten geht der Ton aus einer leisen und veränderlichen Anregung des Windes hervor. Lange Saiten schwach angeregt, theilen sich, oft gleichzeitig, verschiedenartig und veränderlich ein und daraus erklärt sich die eigenthümliche Combination harmonischer Töne, das Schwellen, Sinken und Rauschen, welche das wunderbare Spiel der Aeolsharfe auszeichnen.

328. Längenschwingungen. — Nach der Länge gerieben, kann eine Saite $a b$ (Fig. 212) auch mit Longitudinalschwingungen tönen, wiewohl man diese Töne nicht benutzt und selten rein erzeugen kann. Beim tiefsten Tone bewegen sich alle Theile, das der Mitte am stärksten, nach dem einen Ende, wobei die eine Hälfte gedehnt, die andere komprimirt wird; im nächsten Augenblick bewegen sie sich entgegengesetzt.

Bezeichnet x die Verschiebung der Mitte zur Zeit t , so entwickelt sich dadurch (195) eine elastische Kraft, die man durch

$$q = \frac{\alpha}{\varepsilon} \cdot \frac{a}{L} \cdot x \quad (1)$$

darstellen kann, wo a den Querschnitt, L die Länge und α einen constanten Coefficienten bezeichnen.

Sei n die Schwingungsgeschwindigkeit der Mitte; für einen Punkt der um y vom Ende entfernt ist, wird sie genähert sein $\frac{2y}{L} \cdot u$. Mit der

Masse $\frac{s}{g} \cdot a \cdot \delta y$ des Theilchens multiplicirt, erhält man dessen Bewegungsmenge und daraus diejenige der ganzen Saite

$$\frac{4s}{g} \cdot \frac{a \cdot u}{L} \cdot S(y \delta y) = \frac{s}{2g} \cdot a \cdot L \cdot u \quad (2)$$

wenn man die zweifache Summe von $y = 0$, bis $y = \frac{L}{2}$ nimmt (Formel II)

die Gleichheit der von der Kraft mitgetheilten und von der ganzen Masse der Saite gewonnenen Bewegung führt auf ähnliche Weise wie (324) auf den Ausdruck

$$\delta u = - \frac{2\alpha}{\varepsilon} \cdot \frac{g}{s} \cdot \frac{1}{L^2} \cdot x \delta t \quad (3)$$

der wieder analog der Pendelformel (8) in (74) ist, wenn für Q die Grösse $\frac{2\alpha}{\varepsilon} \cdot \frac{g}{s} \cdot \frac{1}{L^2}$ gesetzt wird. Die Schwingungszahl (ganze Schwingungen) wird dann

$$m = \frac{\sqrt{Q}}{2\pi} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{g}{\varepsilon \cdot s}} \quad (4)$$

indem höherer Rechnung zufolge $\sqrt{2\alpha} = \pi$ zu setzen ist, — ein Aus-

druck, welcher 1) vom Querschnitt unabhängig ist, 2) sich zur Länge L und zur Wurzel aus dem specifischen Gewichte umgekehrt verhält.

Die Schwingungszahlen m, m' der nämlichen Saite transversal und longitudinal schwingend, verhalten sich hiernach

$$m : m' = \sqrt{\frac{P}{a}} : \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \quad (5)$$

eine Beziehung, welche man benutzen könnte, um aus den beobachteten m, m' , und gemessenen P, a den Elasticitätscoefficienten (195)

$$\varepsilon = \frac{m^2}{m'^2} \cdot \frac{a}{P} \quad (6)$$

zu finden.

Da m mit L verkehrt proportional ist, vermag die Saite durch Eintheilung die harmonische Tonreihe zu geben.

329. Weich elastische Flächen — werden in dem Tambourin, der Trommel, der Pauke, gleichsam nur als Lärminstrumente mit ihrem tiefsten Tone benutzt. Der noch grössere Einfluss der Luftfeuchtigkeit auf die poröse Membrane hindert noch mehr als bei den Saiten die Bewahrung einer bestimmten Stimmung. Reinere und mannigfachere Töne gestattet das Marx'sche Instrument (Fig. 216), bestehend aus einer über ein cylindrisches Gefässe c gespannten Haut a b z. B. von Gummi-elasticum, gegen welche eine Röhre d einen Luftstrom führt. Die schnelle Verstimmung verlangt aber eine stete Veränderung in der Stellung der Membrane a b zur Windröhre d .

Cap. 7. Hartelastische Körper.

330. Transversalschwingungen. — Hartelastische Körper entwickeln bei jeder Gestaltänderung starke Kräfte und sind daher auch mehrfacher auch tönender Schwingungsarten fähig. Bei Stäben z. B. lassen sich Töne durch Transversal-, Longitudinal- und drehende Schwingungen erhalten, entsprechend den drei Hauptarten der Elasticität (194).

Am häufigsten und leichtesten werden die Transversalschwingungen benutzt. Als einfachsten Fall denke man sich einen Metallstab a b (Fig. 217), der in a eingeklemmt, mit dem freien Ende b abgelenkt, als Ganzes schwinde. Aehnliche Betrachtungen wie bei den Saiten führen auf die Schwingungszahl. Seien nämlich L, B, D Länge, Breite und Dicke des vierkantigen Stabes, letztere in der Ebene der Biegung gemessen, so entspricht einer Ablenkung x des freien Endes (199) eine elastische Kraft

$$q = \frac{1}{4\varepsilon} \cdot \frac{B D^3}{L^3} \cdot x$$

Das Element $\frac{s}{g} \cdot B D \delta y$, in der Entfernung y vom festen Ende, wird als erste Annäherung eine Geschwindigkeit $\frac{y}{L} u$ haben, wenn u

diejenige am Ende ist. Daraus folgt für die ganze Bewegungsmenge von $y = 0$, bis $y = L$, (Formel II)

$$\frac{s}{g} \cdot \frac{B D}{L} \cdot u \cdot S(y \delta y) = \frac{s}{2 g} \cdot B D L \cdot u. \quad (2)$$

und diess gibt die Bewegungsgleichung

$$\delta u = - \frac{g}{2 \varepsilon \cdot s} \cdot \frac{D^2}{L^4} \cdot x \delta t \quad (3)$$

Man hätte in die Pendelformel (8) in (74) für Q zu setzen $\frac{g}{2 \varepsilon s} \cdot \frac{D^2}{L^4}$ und erhielte für die Schwingungszahl (ganze Schwingung)

$$m = \frac{\sqrt{Q}}{2 \pi} = \frac{1}{2 \pi} \cdot \frac{D}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \varepsilon s}} \quad (4)$$

Wegen Vernachlässigung der Krümmung des Stabes und ihres Einflusses auf die Geschwindigkeit, ist dieser Ausdruck ungenau. Dieser Einfluss, genau in Rechnung gebracht, ändert jedoch die Form des Ausdruckes nicht, nur muss derselbe mit dem Zahlcoefficienten 1,4278 multipliziert werden.

Die Schwingungszahl ist also: 1) unabhängig von der Breite B , 2) proportional der Dicke D ; verkehrt proportional, 3) der Länge L , 4) der Wurzel aus dem specifischen Gewichte s und 5) aus dem Elasticitätscoefficienten ε .

331. Andere Fälle. — Der Stab als Ganzes schwingend gibt den tiefsten Ton; durch Berühren angemessener Stellen kann er aber zum Schwingen in Abtheilungen, mit höhern Tönen, gebracht werden (Fig. 218); wobei die Grenzbedingungen, Stelle ohne Bewegung am festen, Bauch der Bewegung am freien Ende, bewahrt bleiben. Seebeck fasst alle Fälle unter einen Ausdruck

$$m = \frac{\beta^2 \cdot \pi}{4} \cdot \frac{D}{L^2} \sqrt{\frac{g}{3 \cdot \varepsilon \cdot s}}$$

zusammen, in welchem β für verschiedene Eintheilung einen verschiedenen Werth hat. Dieser Werth und die Entfernung der Knoten vom freien Ende, in Theilen der Stablänge ausgedrückt, sind die folgenden:

Ton	Knotenzahl	β	Entfernung der Knoten				letzter.
			1	2	3	k	
1	0	0,59686	—	—	—	—	—
2	1	1,49418	0,2261	—	—	—	—
3	2	2,50025	0,1321	0,4999	—	—	—
4	3	3,49999	0,0944	0,3558	0,6439	—	—
:							
n	$n-1$	$\frac{2n-1}{2}$	$\frac{1,3222}{4n-2}$	$\frac{4,9820}{4n-2}$	$\frac{9,0007}{4n-2}$	$\frac{4k-3}{4n-2}$	$\frac{4n-7,0172}{4n-2}$

Die Werthe von β verhalten sich, abgesehen von den beiden ersten Tönen die mehr abweichen, nahe wie die Zahlen $1/2, 3/2, 5/2 \dots \frac{2n-1}{2}$ die Schwingungszahlen also wie die Quadrate der ungeraden Zahlen.

Der Werth von β ändert sich überdiess mit der Befestigungs-

weise des Stabes und hat nach Seebeck für je den tiefsten Ton folgenden Werth:

	β
1) Ein Ende festgeklemmt, das andere frei	0,59686
2) Beide Enden frei oder festgeklemmt	1,50562
3) Ein Ende gestützt, das andere frei oder fest	1,24987
4) Beide Enden gestützt	1,00000

Für den letzten Fall, gestützter Enden, werden alle Abtheilungen gleich. Der Ton n verlangt $n-1$ Knoten, β wird $= n$ und die Knoten stehen gleich auseinander um $\frac{L}{n}$. Die Tonreihe entspricht dem Quadrate der natürlichen Zahlen, $1, 2^2, 3^2, 4^2 \dots$

Versuche von Strehlke und Seebeck haben die Richtigkeit der von Dan. Bernoulli begründeten, namentlich aber von Euler und Poisson ausgeführten Theorie vollkommen bestätigt.

332. Anwendungen. — Stäbe werden entweder durch einfaches Anschlagen oder mittelst eines Luftstromes zum Schwingen und Tönen gebracht. Ersteres geschieht z. B. 1) beim Triangel, ein offenes Dreieck, das je nach der Seite, die man anschlägt, 3 harmonische Töne gibt; 2) bei den Stabglocken, aus langen und dicken, schraubenförmig gestalteten Stahlstangen, welche, am einen Ende befestigt, an dem andern, freien, mittelst Hammer angeschlagen, starke nachklingende Töne hören lassen; 3) bei der Glasharmonika endlich, in welcher ungleiche lange Glasstreifen mit zwei Knotenstellen auf Schnüren befestigt, durch Anschlagen die Tonreihe entwickeln.

Das wichtigste dieser Vorrichtungen ist die Stimmgabel, geeignet, einen bestimmten unveränderlichen Grundton anzugeben, was weder mittelst Luftsäulen, noch durch Saiten mit gleicher Sicherheit zu erhalten ist. Beim tiefsten Ton, dem einzigen den seiner Gestalt nach das Instrument leicht gibt, schwingen beide Zinken gleichzeitig gegen und von einander; an der Wurzel derselben entstehen zwei Knoten, so dass der gekrümmte mittlere Theil, gleichzeitig, allerdings kleinere, Schwingungen auf und nieder macht. Der schwache Ton kleiner Gabeln wird durch Verstärkungsmittel hörbar gemacht.

Zu der zweiten Klasse von Instrumenten gehören die als Mundstück benutzten Zungen (317); dann die aus durchschlagenden Blättchen gebildeten Mund- und Handharmonikaarten. Sind die Blättchen oder Zungen gut gewählt, was leicht zu erlangen ist, da Länge und Dicke in entgegengesetztem Sinne wirken (330), so können in kleinem Raume die Bedingungen stark und gut klingender Töne vereinigt werden, wobei stets nur die tiefsten Töne benutzt werden.

333 Longitudinal-Schwingungen. — Lange Glasstäbe, in der Mitte oder am Ende gehalten, werden durch Reiben zwischen den feuchten Fingern oder mittelst eines feuchten mit Bimsteinstaub bestreuten Tuchlappens, longitudinal schwingend zum Tönen gebracht, wobei der Befestigungspunkt natürlich einen Knoten, das freie Ende einen Bauch der Bewegung darstellt.

Da hier die Elasticität auf ähnliche Weise wie bei den Längenschwingungen der Saiten wirkt (328), so bewegt sich ein beiderseits festgeklemmter Stab, wie eine beiderseits befestigte Saite und ein einseitig festgeklemmter wie jede Hälfte der letztern oder wie eine Saite von der Länge $2L$. Der dort gegebene Ausdruck für die Schwingungszahl wird also

$$m = \frac{1}{4L} \cdot \sqrt{\frac{g}{\varepsilon \cdot s}}$$

Die Tonreihen des beidseitig und einseitig eingeklemmten Stabes entsprechen denjenigen der offenen und gedeckten Pfeifen (318), d. h. sie folgen den Zahlreihen $1, 2, 3, 4 \dots$ und $1/2, 3/2, 5/2, 7/2 \dots$

Zwischen der Zahl m der Longitudinal und der m' der Transversalschwingungen (330), beides bei einem einseitig festgeklemmten Stab, besteht das Verhältniss

$$\frac{m}{m'} = \frac{\sqrt{3}}{\pi \beta^2} \cdot \frac{L}{D} = 1,5476 \cdot \frac{L}{D} \quad (2)$$

Dasselbe ist nicht constant, sondern von den Stabdimensionen abhängig. Da zudem L gegen D in der Regel gross ist, so sind die Longitudinaltöne weit höher als die der Transversalschwingungen.

334. Zusammengesetzte Schwingungen. — Die Abtheilungen schwingender Stäbe macht man, wenn diese rund sind, durch bewegliche Papierringe, wenn flach, durch aufgestreuten Sand sichtbar. Solche leichte Körper werden in der Bewegungsrichtung der oberflächlichen Theilchen fortgeschleudert und hüpfend von den Stellen starker Bewegung nach den Knoten hinversetzt. Auf diesem Wege fand Savart, dass longitudinal schwingende Stäbe Knoten entwickeln, die viel kleineren Abtheilungen, als den Longitudinalschwingungen entsprechen, zugehören, die mehr oder weniger regelmässig an beiden Stabseiten abwechseln und seitwärts sich durch Längslinien zu einer unregelmässigen Schraube verbinden (Fig. 219). Da der Stab transversal, mit den beobachteten Knoten zum Schwingen gebracht, den gleichen Ton wie longitudinal hören lässt, so rühren die Knoten nicht direkt von den Längenschwingungen her, sondern von gleichzeitig entstehenden, den gleichen Ton gebenden Transversalschwingungen, welche mehr oder weniger gut sich entwickeln, je nachdem die Stabdimensionen (333) eine solche Eintheilungsweise für den gleichen Transversaltönen mehr oder weniger gut gestatten.

Von der Abwechslung der Knoten, welche bei reinem Transversaltönen sich nicht zeigt, hat Seebeck eine einfache Erklärung gegeben. Bezeichnen (Fig. 220) für einen bestimmten Augenblick die Pfeilspitze auf A die Schwingungsrichtung des Longitudinaltones, die Curvenordinaten die Schwingungsgeschwindigkeiten des Transversaltönen, so geben die Resultirenden in a b und c d eine Bewegung, welche die Theilchen abhebt und nach b und d versetzt; in b c aber werden die Theilchen angedrückt und bewegen sich nicht. Auf der andern Stabseite umgekehrt, gehen die Theilchen b' c' nach c', während a' b' und c' d' angepresst werden. Der nächste Augenblick kehrt alle Pfeilspitzen um B,

dann wandern auf der ersten Stabseite die Theilchen $c b$ nach b , $a b$ und $c d$ bleiben liegen; auf der andern wandern $b' a'$ und $d' c'$ nach a' und c' , während $b' c'$ unbeweglich bleiben. So werden auf der einen Seite b und d , auf der andern a' und c' zu Stellen der Anhäufung.

Zusammengesetzte Schwingungen dieser und ähnlicher Art sind nicht nur eine bisweilen entstehende Erscheinung, sondern treten in Folge von unvermeidlichen Unregelmässigkeiten der Anregung und Befestigung oder der innern Beschaffenheit und Elasticität der Stäbe beinahe immer ein und tragen vermuthlich wesentlich zum Klänge des Tones bei (289).

335. Drehende Schwingungen. — Auch die Torsionselasticität kann tönende Schwingungen veranlassen, wenn man z. B. einen runden Glasstab im Sinne des Umfanges zwischen den Fingern hin und her dreht. Wie früher gezeigt wurde (202) ist das Moment der elastischen Kraft eines runden Stabes von der Länge L , und Dicke D , der mit seinem freien Ende um einen Winkel φ gedreht worden ist,

$$\frac{\pi}{32 \cdot \tau} \cdot \frac{D^4}{L} \varphi$$

Durch Multiplication mit δt erhält man das Moment der in der Zeit δt mitgetheilten Bewegungsmenge.

Theilt man anderseits den Stab in cylindrische Röhrenelemente, so wird ein Ring von der Höhe δy und dem ringförmigen Querschnitte $2 \pi \varrho \delta \varrho$ eine Masse $2 \pi \frac{s}{g} \cdot \varrho \delta \varrho \cdot \delta y$ haben. Erhält die untere Fläche des Stabes im Augenblicke δt die Winkelbeschleunigung δw , so beträgt die Beschleunigung in jenem ringförmigen Elemente $\frac{y}{L} \varrho \delta w$.

Das ringförmige Element gewinnt also während δt ein Moment der Bewegungsmenge

$$2 \pi \frac{s}{g L} \cdot y \delta y \cdot \varrho^3 \delta \varrho \cdot \delta w$$

der ganze Stab die Summe solcher Grössen, genommen (Formel II) von $y = 0$, bis $y = L$, nachher von $\varrho = 0$, bis $\varrho = \frac{D}{2}$ oder

$$\frac{\pi}{64} \cdot \frac{s}{g} \cdot L D^4 \delta w.$$

Die Bewegungsgleichung wird so

$$\delta w = - \frac{2 g}{\tau \cdot s} \cdot \frac{1}{L^2} \varphi \delta t$$

In dem Ausdrücke (8) der Pendelschwingung (74) hat man $Q = \frac{2 g}{\tau \cdot s} \cdot \frac{1}{L^2}$ zu setzen und erhält für die Schwingungszahl (ganze Schwingungen)

$$m = \frac{\sqrt{Q}}{2 \pi} = \frac{1}{\pi L} \cdot \sqrt{\frac{g}{2 \tau \cdot s}}$$

welche nur die Länge, nicht die Dicke des Stabes enthält.

Zwischen dieser Zahl m und derjenigen m' der Longitudinalschwingungen (333) besteht ein von den Dimensionen unabhängiges Verhältniss

$$\frac{m}{m'} = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \varepsilon}{\tau}}$$

wogegen das Verhältniss zu den Transversalschwingungen ein mit denselben veränderliches ist.

336. Klangfiguren. — Homogene Scheiben aus Glas und Metall (geschlagenes Kupfer) sind in hohem Grade fähig, transversal schwingend, mannigfache Töne zu geben. Man klemmt einen Punkt a mittelst einer Schraube b (Fig. 221) fest, und streicht, unter Berührung einer andern Stelle mit dem Violinbogen den Rand. Streut man Sand auf die schwingende Platte, so werden ihre Abtheilungen durch die Anhäufung desselben auf den Knotenlinien sichtbar. Ein reiner und starker Ton hat immer eine bestimmte scharfe Klangfigur zur Folge. Alle Abtheilungen schwingen in gleicher Zeit und zu beiden Seiten einer Knotenlinie nothwendig entgegengesetzt.

Durch Veränderung des Befestigungspunktes der Anregungs- und Berührungsstelle, welche immer jene einem Bauche, diese einem Knoten der Bewegung entspricht, kann man der nämlichen Scheibe eine Reihe verschiedener Töne und Klangfiguren entlocken. Eine runde Scheibe z. B. (Fig. 222) central gehalten, kann ein doppeltes System von Knotenlinien entwickeln: 1) concentrische Ringe A , wenn die Erschütterung vom Centrum ausgeht, indem die Scheibe central an einem verticalen Stabe von angemessener Länge befestigt wird, den man in longitudinale Schwingungen (333) versetzt; 2) gleich entfernte radiale Durchmesser B , wenn man am Rande in a erschüttert und eine halbe Abtheilung weiter in b die Scheibe stützt. Die theoretische Bestimmung der Schwingungszahl ist schwieriger als bei Stäben; experimentell fand Chladni, dem man die Kenntniss der Klangfiguren (1787) vorzüglich verdankt, für die gewöhnliche Eintheilung nach Durchmessern, folgende Tonreihe, verglichen mit dem Tone des geraden Kreuzes:

Zahl der Durchmesser	2	3	4	5	6	7	8 . .
Zahl der Sektoren	4	6	8	10	12	14	16
Bezeichnung des Tones	C	d	c	g	cis	fis	b
Schwingungszahl	1	$\frac{9}{4}$	4	6	$\frac{25}{3}$	$\frac{100}{9}$	$\frac{72}{5}$

Bei einer recht homogenen Scheibe lässt sich das gerade Kreuz des tiefsten Tones durch Aenderung der zugehörenden Anregungs- und Berührungsstelle nach allen Richtungen gleich leicht und vollkommen hervorrufen. Bei einer ungleichartigen radial eingesägten oder wie Holz aus parallelen Fasern gebildeten Scheibe, hat das Kreuz stets eine Neigung sich nur in Einer Richtung gut zu entwickeln, entsprechend den zu einander rechtwinklichten Richtungen leichtester und schwerster Biegsamkeit. Auf diesem Wege erkannte Savart die Ungleichheit der Elasticität und die Richtungen grösster und kleinster Elasticität der Kristallplatten (242).

An allen Klangfiguren, wie zusammengesetzt sie übrigens auch sein

mögen, bestätigen sich zwei einfache Regeln: 1) die Zahl der Abtheilungen, am Rande herum gezählt, ist stets gerade, nur dann wird jeder Knoten eine Trennungsstelle entgegengesetzter Bewegungen sein; 2) keine Knotenlinie kann im Innern enden, entweder bildet sie eine ganz geschlossene Figur, oder reicht als Durchmesser von Rand zu Rand. Entgegengesetzte Bewegungen können sich unmöglich in Einen Schwingungszustand vereinigen.

337. Theorie von Wheatstone. — Die zahllosen Klangfiguren einer nämlichen quadratischen Scheibe, — Savart hat deren mehrere hundert hervorgebracht — wurden von Wheatstone auf eine sinnreiche Weise geordnet und theilweise erklärt. Er betrachtet nämlich die Klangfigur als das Resultat der Coexistenz (oder Uebereinanderlegung) zweier einfacher gleicher oder harmonischer Schwingungsarten, entsprechend der Biegung nach zwei rechtwinklichten Richtungen parallel den Seiten oder den Diagonalen des Quadrates. Jede einfache Schwingungsart folgt den Gesetzen eines einfach gebogenen Stabes (330), mit parallelen nach der Breite hin entwickelten Knotenlinien, von deren Zahl die Zusammengesetztheit der resultirenden Figur abhängt.

Seien z. B. (Fig. 223) A und B die beiden einfachen Schwingungszustände, jeder mit 2 Knoten a, a', b, b' versehen, und man bezeichne mit + und — für den gleichen Augenblick die Schwingungen nach oben und unten. Die Bewegung A kann sich nun combiniren mit derjenigen von B oder B' , die um eine halbe ganze Schwingung abweichen. Das Resultat ist ein anderes und somit auch die Richtung der Knotenlinien, die nothwendig da durchgeht, wo gleiche + und — zusammenfallen. So entsteht aus A und B die Figur C, mit einem Kreuz; aus A und B' diejenige C' mit diagonalem Quadrate und beide, weil aus den gleichen einfachen Schwingungszuständen hervorgegangen, gehören dem gleichen Tone an.

Aehnlich verhält es mit Schwingungszuständen höherer Ordnung. Wheatstone weist nach, dass man zu jedem erhältlichen Tone zwei Klangfiguren hervorbringen kann, in deren einer Durchmesser parallel den Seiten, in der andern parallel den Diagonalen vorwalten. Doch durchschneiden sich diese Durchmesser nicht unter scharfen Winkeln, sonder gehen durch hyperbolische Curven in einander über, welche überdiess durch die kleinste Veränderung der Anregungs-, Befestigungs- und Berührungsstelle sich zu hin und her gekrümmten oder geschlossenen Figuren lösen.

Diese einfache Theorie genügt indess, wie Savart's Versuche beweisen, nicht; die wirklichen Schwingungszahlen sind nämlich grösser als die der einfachen Bewegungsarten und weichen um so mehr ab, je höherer Ordnung letztere angehören. Zudem lassen sich Figuren erzeugen, deren einfache Schwingungsarten einer ungleichen Knotenzahl entsprechen, also verschiedenen Tönen zugehören. Da keine zwei Töne gehört werden, muss eine gegenseitige Accommodation zu einem gemeinsamen dritten Zustande statt gehabt haben.

338. Glocken. — Noch verwickelter werden die Schwingungsgesetze bei gekrümmten Flächen, namentlich weil von Stelle zu Stelle, Krümmung

und Dicke der Fläche sich ändern, daher an jeder Stelle, senkrecht zu einander, Richtungen leichtester und schwerster Biegsamkeit vorhanden sind.

An ihrem Pole befestigte Rotationsflächen, wohin Glocken, grosse Becher mit Fuss, Flaschen mit dickem Boden u. s. f. gehören, theilen sich ähnlich wie runde Scheiben durch Knotenlinien ein, welche meridional vom Rande nach dem Pole hinlaufen. Auch hier ist die Zahl der Abtheilungen am Rande stets eine gerade (336) und folgt für höhere Töne der von 4 aufsteigenden Reihe. An grossen Bechern (Fig. 220), welche un- gemein starker Töne fähig sind und sehr lange nachklingen, macht man die Eintheilungsweise sichtbar, entweder indem man die Flächen benetzt und mit Sand bestreut, der sich den Knoten zu verschiebt, oder durch theilweises Anfüllen mit Wasser, das an den Bäuchen kleine, oft bis zum Emporspritzen von Wassertröpfchen zu verstärkende Wellen annimmt.

Mit Glocken besonders nimmt das Ohr eine Erscheinung wahr, welche an ebenen Scheiben, wo dasselbe stets die Wirkung der ganzen Fläche, nicht diejenige einzelner Theile nur, empfängt, nicht beobachtet wird, nämlich ein periodisches Anschwellen und Sinken des Tones. An den Bewegungen leichter über die Glocke herabhängender Korkkugeln erkennt man, dass diess von einem peripherischen Hin- und Herschwanken, oft sogar von einer vollständigen Rotation der Knoten und Bäuche herrührt, wodurch dem Ohre bald schwach, bald stark schwingende Stellen vorgeführt werden. Bei ganz regelmässiger Anregung und homogener Beschaffenheit der Fläche fällt die Erscheinung weg, tritt hingegen bei Ungleichheit der innern Masse, so wie durch eine schiefgerichtete kräftige Anregung, in Folge einer peripherischen Verschiebung der Theilchen, oft sehr auffallend hervor.

339. Staubfiguren. — Streut man statt grober Sandtheilchen feinen Staub, wie Licopodium, auf die schwingende Scheibe, so sammelt sich derselbe nicht ausschliesslich nur auf den Knotenlinien, sondern bildet eine andere ganz abweichende Art der Anhäufung auf den Stellen starker Bewegung. Wenn nämlich die Wirbelbewegung des Staubes beim Verklingen der Platte aufhört, bleiben regelmässige rundliche Staubbäufchen, an Grösse von der stärkstbewegten Stelle nach Aussen abnehmend (Fig. 224 A), zurück. Diese Häufchen haben nichts mit der Höhe und Tiefe des Tones, noch mit der Gestalt der Abtheilungen gemein; sie bilden sich auf gleiche Weise auf einem gespannten Papier, auf einem erschütterten Brette, auf den flachen Zinken einer Stimmgabel aus.

Faraday wies nach, dass unter der Luftpumpe die Erscheinung aufhört, daher eine Folge der Luftbewegung über den schwingenden Stellen ist. Statt als Masse den Auf- und Niederbewegungen der Scheibe zu folgen, scheint sie, durch Ungleichheiten der Oberfläche und ihrer Bestäubung veranlasst, in einzelnen Wirbeln sich zu bewegen. Die Aufwärtsbewegung treibt den Staub auf- und auswärts, die Niederbewegung zieht ihn nach unten und innen. Bei fortdauernder Erschütterung wandern die Häufchen (Fig. 224 B) allmähig nach der Stelle stärkster Bewegung und die daselbst befindliche Ansammlung wächst an Umfang. Es begreift sich hiernach, dass in einem dichtern Medium, wie Wasser

z. B., selbst schwere Theilchen von Sand der Bewegung folgen und Häufchen bilden können.

Eine gewisse Aehnlichkeit mit den Staubhäufchen haben die kleinen stehenden Wellen, die auf einer mit Flüssigkeit bedeckten Platte, gleichfalls an den Stellen starker Bewegung entstehen. Da die Schwingungszeit der Wasserwellen mit ihrer Grösse in Beziehung steht (141. 147), so entsprechen die Kräuselungen der Schwingungszahl des Tones, sind kleiner bei hohen, grösser bei tiefen Tönen. Auch hier ist also die Grösse der kleinen Wellen nicht direkt Folge der Gestalt der Abtheilungen, wohl aber Folge der Schwingungszahl. Auf der schwingenden Platte sind sie analog wie neben derselben, wenn man sie tönend in Wasser taucht.

Cap. 8. Mitschwingende Körper.

340. Tonstärke der Instrumente. — Wie früher erläutert wurde (303) hängt die Stärke der vom Ohre wahrgenommenen Töne von der Fortpflanzungsweise, nämlich von der Ausbreitung, Concentration und Interferenz der Wellen ab; dann zweitens aber in mehrfacher Hinsicht von dem tönenden Körper selbst.

1) Vermuthlich hat die Richtung der Schwingungen Einfluss, nicht dass die Bewegung der Luft in einiger Entfernung von dem Ursprunge des Schalles anders als in der Richtung der Fortpflanzung selbst erfolgen könnte (305), sondern weil transversale Schwingungen einer Fläche auf die anliegende Luft stärker verdichtend und verdünnend einwirken, als solche, welche längs der Oberfläche vor sich gehen.

2) Grossen Einfluss hat die Ausdehnung der schwingenden Fläche. Alle Stellen einer dem Beobachter zugewandten Fläche senden Schallrichtungen nach seinem Ohre; die Wirkung, die es empfängt, ist genau genommen, das Resultat der Interferenz aller dieser einzelnen Wirkungen, und nähert sich ihrer Summe, wenn die Richtungen nicht zu ungleich und der Unterschied der Entfernungen neben der Wellenlänge nicht gross ist. Sie wird um so stärker sein, je grösser die Fläche und je gleichartiger alle Bewegungen sind. Darum hören wir die Töne der Stäbe stärker als diejenigen dünner Saiten, noch stärker diejenigen der Flächen. Die Wirkungen der Pauke verglichen mit der Trommel, des Tamtams der Chinesen neben den Zimbeln, der grossen Glocken verglichen mit kleinen beruht grossentheils auf der Ausdehnung der schwingenden Flächen.

3) Endlich wirkt ein Schall, der anhält, mächtiger auf das Ohr, als ein sogleich verklingender. Die Eigenschaft des Fortklingens hängt mit der Stärke der elastischen Kräfte und der Grösse der schwingenden Masse zusammen, auf welche die Widerstände der Luft und der Befestigungsstellen geringern Einfluss üben. Stäbe und Scheiben von Glas und Metall klingen länger als Saiten und Membranen, und diese länger als die tönende Luft.

341. Mitschwingen fester Körper. -- Alle Verstärkung der schwachen Instrumente, vornehmlich der dünnen Saiten und kleinen Stäbe,

beruht auf der Mittheilung der Bewegung an andere feste Körper oder an Luftmassen von günstiger Beschaffenheit.

Verbindet man eine runde Scheibe A (Fig. 225) an einem Punkte a ihres Umfanges mit einer zweiten gleichen B, so erhält man, wenn in b gestrichen wird, die Klangfigur der einzelnen Scheiben (das gerade Kreuz), indem die Verbindungsstelle in eine gemeinsame Knotenlinie fällt. Für andere Anregungsstellen b' entwickeln sich eigene der einzelnen Platte fremde Figuren (A' und B'), die zu dem System beider als Ganzes gehören. Sind die Platten ungleich, und geben für sich einen verschiedenen Ton, so modifiziren sich ihre beidseitigen Schwingungen zu einem neuen dritten Tone, der nur dann klar gehört wird, wenn sich auch die Klangfigur, aus lauter gleichschwingenden Abtheilungen bestehend, scharf zeichnet (Fig. 226). Die Schwingungen einer sehr grossen Platte werden dabei von einer kleinen wenig verändert, während diejenigen einer kleinen von einer grossen bedeutend leiden.

Savart hat die Mittheilung der Schwingungen von einem angeregten durch eine Reihe anderer Körper auf mannigfache Weise geprüft. Befestigt man z. B. (Fig. 227) in der Verlängerung einer gespannten Saite ein dünnes elastisches Holzbrettchen, so zeigt der aufgestreute Sand die Figuren A, B, C, D, je nachdem der Violinbogen in einer der Richtungen a, b, c, d an der Saite hingeführt wird. Die Schwingungsrichtungen des Brettchens stimmen mit denen der Saite nahe überein. Die Anordnung des Sandes an Vorrichtungen (Fig. 228) aus rechtwinklicht verbundenen Brettchen beweist, dass die Transversalschwingungen von A sich auch in den parallelen Brettchen A' , A'' transversal wiederholen, durch die Verbindungsbrettchen B, B' aber longitudinal gehen. Durch ein solches System also bewährt sich der Parallelismus der Schwingungsrichtung.

Dem Gesetze der parallelen Uebertragung der Bewegungen darf keine zu absolute Gültigkeit beigemessen werden. Es gilt vorzüglich 1) für sehr kleine Bewegungen, 2) für Zwischenkörper, wie Stäbe, von einfacher Gestalt, 3) für mitschwingende Körper, die der übertragenen Schwingungen selbst fähig sind. Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so erfolgen Rückwirkungen, Veränderungen der ursprünglichen Bewegung, bedeutende Schwächungen oder Trübungen des Tones. Der eine Körper darf nicht mehr für sich, sondern muss als Theil eines zusammengesetzten Systems aufgefasst werden.

342. Resonanzflächen. — Dünne elastische Resonanzflächen (von Holz gewöhnlich) von dem tönenden Körper in Schwingungen versetzt, sind ein Hauptmittel der Tonverstärkung. Um mit vielen Tönen gut zu wirken, müssen sie mannigfacher Schwingungszustände fähig sein, was bei regelmässiger Gestalt meist nur bei grösserer Ausdehnung, bei geringerer Grösse nur bei unregelmässiger Gestalt der Fall ist. So verstärkt die ausgedehnte Fläche eines Sonometers (325) mehr oder weniger gut den Ton einer jeden aufgestützten Stimmgabel; dasselbe findet statt mit den kleinern unregelmässigen Flächen der Violine, wenigstens innerhalb eines gewissen Umfanges von Tönen.

Am vortheilhaftesten wird eine Resonanzfläche wirken, wenn sie

so mit der Saite verbunden ist, dass sie, wenn parallel, auch transversal schwingt. Da die Saiten meist im Kreise schwingen, genügt es dieselben parallel, sei es über der Fläche, wie bei den Violinen und der Guitarre, sei es auf ihrer Verlängerung, wie in der Leier der Alten zu befestigen. Weniger gut ist die schiefe Resonanzfläche der Harfe gegen die verticalen Saiten gestellt.

Die Uebertragung der Bewegung von den Saiten an die Fläche geschieht gewöhnlich vermöge der Longitudinalschwingungen des auf hohlem Raume stehenden Steges. Gerade Stäbe von Holz, von Glas, von Metall sind sehr geeignet, gleichviel beinahe welches ihre Länge, kleine Schwingungen überzutragen. Wheatstone hat z. B. den nicht hörbaren Ton einer Stimmgabel durch Vermittlung von Holzstäben auf mehr als 50 Meter an die Fläche eines Pianoforte abgegeben und hörbar gemacht.

Weniger vollständig kann die Uebertragung der Bewegung auch durch die Luft erfolgen. So bemerkt man, wenn von zwei auf den gleichen oder einen harmonischen Ton gestimmten Saiten, die eine stark angeregt wird, dass die andere nach einigen Augenblicken gleichfalls in Schwingungen geräth und beim Hemmen der ersten leise ausklingt. Hält man nahe über einer schwingenden Platte ein auf einen Rahmen gespanntes Papier von passender Grösse, so bewirkt dasselbe eine sehr bedeutende Verstärkung des Tones; ist die tönende Platte gross und dünn, da dann gewöhnlich eine Combination mehrerer Töne entsteht, so wirkt die Verstärkung vorzugsweise auf einzelne Töne und hebt sie zwischen den andern gleichsam hervor.

343. Resonanzkasten. — Zur Verstärkung schwacher Töne werden zweitens Luftmassen benutzt, welche, in stehende und darum stärkere (316) Schwingungen versetzt, der äussern Luft Bewegung mittheilen. Wenn der schwache Ton der kleinen Maultrommel vor der Mundhöhle gehört wird, so kann die Verstärkung bei der Weichheit der Wände, nur von der Luftmasse derselben herrühren. In den meisten Fällen jedoch sind Wände und Luftmasse gleichzeitig thätig, unterstützen sich gegenseitig und es ist unmöglich, den Einfluss der einen und andern auf Stärke und Klang des Tones zu trennen.

Natürlich müssen Wände und Luftmasse mit dem tönenden Körper harmonisch schwingen können. Unter zahlreichen Glasfläschchen findet man zufällig eines, das den Ton einer über der Oeffnung gehaltenen Stimmgabel ungewöhnlich verstärkt. Durch Befestigung auf einem richtig gewählten Resonanzkasten (Fig. 229) hat Marloye die Stimmgabel fähig gemacht, sehr laut und nachhaltig zu tönen. Die stärksten Wirkungen dieser Art erhielt Savart mit dicken und weiten Metall-Cylindern A (Fig. 230), die in einem Punkte a gehalten und mittelst eines beweglichen Bodens b gestimmt werden. Der Ton einer passenden Platte oder eines Bechers wird dann in Folge der Reflexionen und Luftschwingungen sowohl, als der Ausdehnung und Stärke der Metallwände zum Unerträglichen gesteigert.

Manches indess an der Gestalt und dem Baue der gebräuchlichen Resonanzkasten beruht mehr auf Empirie als auf angebbaren acusti-

schen Gründen. Besonders auffallend ist der als vorzüglich betrachtete Kasten der Violine (Fig. 230). Der Umriss ist sonderbar ausgeschnitten, beiderseits ausgebuchtet; die Hauptflächen erheben sich rückenartig; im Innern unter dem einen Fusse des Steges befindet sich die Seele *a*, eine von Fläche zu Fläche reichende Stütze, unter dem andern der Balken *bb'*, eine longitudinale Verstärkung der obern Fläche. Vermuthlich haben Rücksichten der Bequemlichkeit bezüglich auf die Führung des Bogens, so wie der Solidität, bei einem so dünnwandigen Gehäuse, zur Auswahl der eigenthümlichen, schwer herzustellenden Form ebensoviel mitgewirkt, als eigentlich acustische Gründe. Die Vorzüglichkeit alter Violinkasten erklärt sich aus einer dem Mitschwingen günstigen Art des Austrocknens des Holzes.

344. Interferenz bei Resonanz. — Wenn eine abgeschlossene Luftmasse von zwei Oeffnungen her Bewegung erhält, so kann es geschehen, dass die eindringenden Wellen sich durch Interferenz entweder aufheben oder umgekehrt verstärken (306). Hält man eine zweiseitenlichte Röhre *A* (Fig. 232) mit ihren Oeffnungen *a, b* über die gleichschwingenden Abtheilungen einer mit dem diagonalen Kreuze schwingenden Platte *B*, so kommen in *c* stets gleiche Wirkungen zusammen, hat jeder Schenkel überdiess die Länge eines Viertels der ganzen fortschreitenden Luftwelle (297), so unterstützen sich die Bewegungen auch in den Oeffnungen *a* und *b* und die Resonanz wirkt in hohem Grade zur Verstärkung ein. Ueber entgegengesetzt schwingenden Abtheilungen der gleichen Platte hingegen heben sich die Schwingungsbewegungen in *a* und *b* auf und die Resonanz verstummt. Eine Röhre *B* aus zwei parallelen Schenkeln *a* und *b*, mit Oeffnungen, zwischen welche die schwingende Platte gebracht wird, verstummt bei einer Schenkellänge von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge, wenn die Platte genau in der Mitte liegt, da dann wie im vorigen Falle entgegengesetzte Bewegungen zusammen kommen, wirkt aber wieder, sobald man die Platte der einen oder andern Oeffnung nähert. Kane hat verschiedene Fälle dieser Art angegeben, die auf die Wirksamkeit oder Unwirksamkeit von Resonanzröhren ihre Anwendung finden.

345. Theoretische Folgerungen. — Besonders hat sich Seebeck, auf theoretischem Wege, von dem Einfluss Rechenschaft gegeben, den die Umgebung eines widerstehenden Mediums und die Einwirkung anderer Körper auf die Schwingungen eines gegebenen haben.

In erster Hinsicht findet er 1) dass der Umfang der Schwingungen, ähnlich wie bei einem Pendel (189), nach einer geometrischen Progression abnimmt; 2) dass auch die Dauer der Schwingungen, durch das der Bewegung stets entgegenwirkende Hinderniss, verlängert, daher der Ton, verglichen mit der Schwingungszahl des Vacuums, vertieft werde. Diesen letztern Punkt hatte schon Savart experimentell erkannt. Eine runde Scheibe, central an einem Glasstabe gehalten, wurde durch Longitudinalschwingungen des letztern, transversal zum Schwingen gebracht (336). Unter Wasser, das grössern

Widerstand darbietet, war der Ton merklich tiefer als in der Luft. Er fand ferner, dass diese Tonveränderung, wie begreiflich, von der Gestalt und den Dimensionen des tönenden Körpers abhängt, und für transversale Schwingungen bedeutender als für longitudinale ist.

Wirkt, zweitens, auf einen schwingenden Körper eine constante Kraft, so werden Periode und Form der Schwingungen nicht verändert, nur erfolgen die Bewegungen um eine andere Mittelstellung des Körpers. Wirkt eine periodische Kraft, so nimmt er gleichzeitig, nach dem Grundsatz der Coexistenz kleiner Bewegungen (304) beide Bewegungen an, von denen die ursprüngliche, wenn nicht unterhalten, bald durch die Widerstände erlöscht. Erhält ein ausschlagender Körper, z. B. durch die Luft die Bewegung eines gleichfortschwingenden (342), so nimmt er anfänglich eine aus den Perioden beider zusammengesetzte Bewegung, die sich bald auf die Periode des letztern reducirt. Sind beide Schwingungsarten der Periode und Form nach nahe übereinstimmend, so wächst ihr Umfang bis nahe auf die Bewegung einer entsprechenden Luftmasse; sind die Perioden bedeutend verschieden, so findet ein merkliches Mitschwingen nur bei Flächen statt, die, im Vergleich zu ihrer Masse, bedeutend sind. Die Schwingungen aber, welche ein Körper von einem andern erhält, gewinnen in ihm, bei gleicher Schwingungszahl, eine andere Form, so dass in dieser Beziehung ein Unterschied zwischen den empfangenen und wieder ausgesandten Wellen besteht, der auf Klang und Stärke Einfluss hat. Uebrigens scheint ein Körper, der selbstständig schwingend nur wenige Schwingungsarten aufweist, sehr vielartiger, schwacher mitgetheilte Schwingungen fähig zu sein.

Cap. 9. Die acustischen Organe des Menschen.

346. Vorbemerkungen. — Der Mensch besitzt zwei acustische Organe, das Stimmorgan zur Erzeugung, das Gehör zur Wahrnehmung der Töne. Beide wirken mit einer Schärfe, einer Mannigfaltigkeit und Vollkommenheit, dass ein hohes Interesse darin liegt, zu untersuchen, welcher Mittel sich die Natur zur Erfüllung dieser Bedingungen bedient hat. Darf man einerseits erwarten die acustischen Gesetze, nach welchen die Erzeugung und Veränderung der Töne vor sich geht, auch hier verwirklicht zu finden, so schliesst von der andern Seite die organische Natur gewöhnlich einfache geometrische Verhältnisse aus, wie wir sie bei tönenden Luftsäulen, Saiten oder Platten anwenden, und erreicht ihre Zwecke auf Wegen, die unsern künstlerischen Hilfsmitteln ganz entgehen.

Eine Tonerzeugung durch Stimme beginnt in der Reihe der Thiere erst bei den Bactraciern. Die von den Insekten hervorgebrachten Töne, das Zirpen der Grille, das Singen der Cicade, das Schnarren einiger Heuschrecken sind andern Ursprunges und rühren von der Reibung harter Körper und Flügeltheile her. Alle Kiementhiere, Mollusken und Fische, sind gleichfalls stumm. Erst wo ein Einziehen und Ausstossen grösserer Luftmengen, eine Luftathmung durch eigentliche Lungen, statt hat, findet sich ein wahres Stimmorgan, -- wovon wir die Analogie dem natür-

lichsten in den gleichfalls die Luft benutzenden Blasinstrumenten suchen werden.

In der That lässt das Stimmorgan der Vögel die Haupttheile und die Einrichtung eines Blasinstrumentes erkennen. Die aus den Bronchien getriebene Luft, drängt sich unten am Halse (die Ente schreit noch nach Abschneiden des Kopfes) durch eine aus zwei vortretenden sehnigen Rändern gebildete Stimmritze; die da entstandenen Schwingungen ergreifen die in der langen Luftröhre befindliche Luftmasse und bringen sie zum Tönen (316). Die Stellung und Spannung der Stimmritzenbänder bestimmt die Schwingungszahl des Tones, daher die Töne um so mannigfacher erscheinen, je zusammengesetzter der bezügliche Muskelapparat ist. Während die Enten und Gänse eine beinahe unveränderliche Stimmritze zeigen, haben die Raubvögel, die Eulen, der Kuckuk wenige Muskeln, der Papagei hat 3 Muskelpaare, die Singvögel haben 5 zur Veränderung derselben. Entsprechend besitzt die aus unabhängigen, elastisch verbundenen Knorpelringen gebildete Luftröhre die Eigenschaft, sich der Mannigfaltigkeit der Töne gemäss mehr oder weniger zu verlängern. Hingegen kann die beinahe unveränderliche, aus hornartigen Theilen gebildete Höhle des Schnabels von keinem bedeutenden Einfluss auf die Tonerzeugung sein.

347. Der menschliche Kehlkopf. — Weniger vollständig lässt sich die Vergleichung bei dem menschlichen Stimmorgane durchführen. Der Erregungsapparat, der Kehlkopf (Larynx), liegt nicht mehr unten, sondern oben an der Luftröhre, daher diese nicht mehr als tönende Luftsäule, sondern lediglich als Zuleitungsröhr (317) der ausströmenden Luft dient. Jenseits des Kehlkopfes folgt noch die sehr unregelmässige und veränderliche Erweiterung der Schlund- und Mundhöhle, wovon unsere Instrumente nichts Analoges aufweisen. Es fehlt also die den Ton bestimmende eigentliche Luftsäule und der Kehlkopf hat die Eigenschaft, wie die aus festen schwingenden Theilen gebildeten Zungen und Hornmundstücke (317), selbstständig zu tönen.

Seinem Baue nach besteht der Kehlkopf aus verschiedenen Knorpeln (Fig. 233): 1) dem Schildknorpel *a* (Cart. thyroïdes), aus zwei vorn verwachsenen, hinten aus einander stehenden Flügeln, welche mittelst der längern Processe *b* frei am Zungenbein aufgehängt sind; — 2) dem Ringknorpel *c* (C. cricoïdes), der unter- und innerhalb des Schildknorpels liegt, sich hinten zu einem breiten Rücken erhebt und unterhalb durch dehnbare Häute mit den Halbringen der Luftröhre *d* verbunden ist; — 3) den Giesskannen oder Schnepfknorpeln *e* (C. arytaenoides) in Gestalt gebogener Pyramiden mit beweglicher Spitze, die Santorinischen Knorpel, beiderseits auf dem Rücken des Ringknorpels aufsitzend.

An und zwischen diese Knorpel legt sich ein sehr zusammengesetzter Muskelapparat, der die mannigfachsten kleinen Stellungsänderungen derselben zulässt, vorzüglich eine Verschiebung des Ringknorpels gegen den Schildknorpel, vor- und rückwärts, auf und nieder, endlich im Sinne verticaler Drehung, dann eine Verstellung der Giesskannenknorpel auf dem Rücken des Ringknorpels, vor- und rückwärts, gegen

und von einander, eine Drehung derselben um eine gegen jenen Rücken senkrechte, oder um eine schief horizontal gestellte Axe. Von den beiden Giesskannenknorpeln gehen dann zwei fleischige Bänder aus, deren etwas schief gegen den innern Winkel des Schildknorpels gerichteten Ränder die Stimmritze *f* (Glottis) bilden. Ueber denselben erweitert sich der durch die fleischigen Theile gebildete Raum innerhalb der Schildknorpelflügel zu den Kehlkopfhöhlen *g*, die oben von der schwachen unveränderlichen Verengung der falschen Stimmritze begrenzt werden.

Der Kehldeckel *h* (Epiglottis) endlich, aus einem Knorpel gebildet, der mit elastischem Bande am obern Winkel des Schildknorpels befestigt ist, dient zum Schutze der ungemein zarten und reizbaren Bekleidung des innern Kehlkopfraumes. Namentlich wenn beim Schlingen die Speisen zu der hinterliegenden Speiseröhre gleiten, legt er sich hermetisch schliessend auf die Oeffnung des Kehlkopfes und hindert das Eindringen fremder Gegenstände.

348. Der Ursprung der Töne. — Ueber den Ursprung der Töne im Kehlkopfe sind zwei Ansichten aufgestellt worden. Die eine, namentlich von Savart ausgeführt, vergleicht den Hohlraum, gebildet von den Kehlkopfhöhlen *a* (Fig. 234) der falschen Stimmritze *b* und der wahren *c* mit der Jägerpfeife (Fig. 235), die aus einem kurzen Luftcylinder mit zwei Oeffnungen in der Mitte der runden Grenzflächen besteht. Diese kleine Vorrichtung, ihrer Gestalt nach in die Classe der cubischen Pfeifen gehörend (320), weicht von den eigentlichen Blasinstrumenten darin ab, dass ihre Töne in keiner Beziehung zu der Grösse des Luft-raumes stehen und, einzig durch verschiedenes Blasen, in ziemlichem Umfange ohne Sprung veränderlich sind. Savart betrachtet die Gestalt der Luftmasse und die Kraft des Luftstromes als die Ursache der Töne, welchen dann die Stimmritze als mitschwingender Körper sich accomodirt. Die Theorie der Jägerpfeife und namentlich die Rolle der beiden Oeffnungen sind aber noch zu wenig aufgeklärt, um als Anhaltspunkt dienen zu können.

Allgemeiner wird der entgegengesetzten Ansicht gehuldigt, dass nämlich die Schwingungen der Stimmritzenbänder das Tonbestimmende sind und die Kehlkopf-, Gaumen- und Mundhöhle mitschwingende Luftmassen darstellen, deren Rückwirkung mehr die Stärke und den Klang, als die Höhe und Tiefe des Tones modifizirt. In der That lässt sich am todten Kehlkopfe die Stimmritze, unabhängig von den genannten Höhlen, künstlich zum Tönen bringen und man ahmt dasselbe mittelst einer auf Glasröhre gezogenen Röhre von Gummielasticum nach, die man von zwei Seiten zu einer Ritze aus einander zieht. Mit dieser vorzüglich von Joh. Müller entwickelten Ansicht steht die grosse Veränderlichkeit, deren die Bänder der Stimmritzen fähig sind, in natürlicher Beziehung. Indem Länge, Dicke und Spannung derselben zugleich mit der gegenseitigen Stellung und Entfernung mannigfach variiren können, ergibt sich in bedeutendem Umfang die Möglichkeit aller erdenklicher Schwingungszahlen und diess erklärt den Reichthum der menschlichen Stimme im Vergleich mit den einzelnen musicalischen In-

strumenten. Dass beim einfachen Athmen die Ränder weit und gerundet zurückstehen, bei tiefen Tönen dick und rund sind, bei höhern dem Luftstrome scharf und gespannt entgegentreten, ist durch Beobachtung an Thieren wirklich nachgewiesen worden.

349. Die menschliche Stimme. — Der Umfang der menschlichen Stimme reicht selten auf mehr als 2 Octaven, doch sind bei Sängern einzelne Fälle von 3 Octaven und mehr bekannt. Den musicalischen Hauptstimmen pflegt man ungefähr folgenden Umfang der Töne und Schwingungszahlen (ganze oder Doppelschwingungen) (309) zuzutheilen.

Bass	E — a	80—213	Alt	f — $\overline{f}$	170—683
Baryton	A — $\overline{f}$	106—341	Mezzo Sopran	$\overline{e}$ — $\overline{a}$	320—854
Tenor	c — $\overline{a}$	128—427	Sopran	$\overline{c}$ — $\overline{c}$	256—1024

Die Reinheit und Annehmlichkeit der Stimme hängt aber nicht allein von der Wirkung der Stimmritze, sondern von allen mitschwingenden Theilen, der Gestalt der Luftmassen und der, wenn auch geringen, Elasticität ihrer weichen Wände ab. Mit Hinsicht auf den Klang ist die Stimme wohl einer eben so grossen Mannigfaltigkeit und Ausbildung fähig als in Bezug auf Höhe und Tiefe der Töne; denn die zahlreichen Laute, woraus sich die Sprache zusammensetzt, sind ein Klang, der dem Tone von den einen oder andern Theilen der Mundhöhle mitgetheilt wird. Willis wies nach, dass durch Anbringen verschiedener Erweiterungen mit verschieden gestalteten Oeffnungen oben an einer Zungenpfeife, der Charakter der Vocallaute (Selbstlauter) hervorgebracht werde, so dass man diese als einen von der Gestalt der Mundhöhle und ihrer Oeffnung herrührenden Klang anzusehen hat. Bei den Consonanten (Mitlautern) hinwieder werden, dauernd oder vorübergehend, einzelne feste Theile der Mundhöhle in Mitleidenschaft gezogen; vorübergehend die Lippen bei *b* und *p*, Zunge und Zähne bei *d* und *t*; dauernd Gaumen und Zunge bei *r*, die Zähne bei *s*, Zunge und Zähne bei *z* u. s. f. Bald scheint die entstehende Modification in einem wirklichen Klang (Gestalt der Schallwelle) (289) zu bestehen, bald in der Beimischung eines selbstständigen Geräusches.

Dass übrigens auch andere Theile der Mundhöhle zum Klang der Stimme beitragen, das Gaumenseegel, die Nasenhöhle, die Kehldeckelränder, die falsche Stimmritze u. s. f. beweist die Veränderung, welche die Stimme bei krankhaftem Zustande dieser Theile erleidet. Selbst die hohen Töne der Kopfstimme, einer gewissen Reinheit und Mannigfaltigkeit fähig, sollen der wahren Stimmritze fremd sein und aus den Schwingungen des Randes des Gaumenseegels entstehen. Worauf endlich das Eigenthümliche der Bauchrednerstimme beruht, ist noch nicht aufgeklärt; absichtlich, aber unbewusst wie, weiss der Bauchredner seiner Stimme verschiedene Arten des Klanges zu geben, welche in Verbindung mit äussern Umständen die Täuschung über den Ausgangspunkt derselben veranlassen. Möglich, dass hierbei die Luftröhre und ihre Luftsäule anders mitwirken als es sonst der Fall ist.

350. Das Gehör im Allgemeinen. — Die scharfe Unterscheidung der Töne ist, gleich wie die reine Hervorbringung derselben, an ein eigens gebautes Organ, das Ohr, gebunden und erreicht erst bei den höhern Wirbelthieren grosse Vollkommenheit. Die ersten Spuren eines besondern Apparates, geeignet die Schwingungen des Schalles direkt an die Nerven überzutragen, oder eines innern Ohres, zeigen sich bei den höhern Weichthieren und den Gliederthieren. Möglich jedoch, dass bei einigen der letztern, bei der für musicalische Töne empfänglichen Spinne z. B., auch die ganze zarte Körperhaut einer Wahrnehmung der Lufterschütterung fähig ist. Bei den Fischen haben diese Theile bereits eine bedeutende Entwicklung, allein ihre Lage in der gemeinsamen Gehirnhöhle, ohne besondere schützenden und die Wahrnehmung regulirenden Nebentheile deutet immer noch auf eine niedere Stufe der Empfindung. Mit den Reptilien beginnen auch diese letztern Theile, das mittlere Ohr, und legen sich zwischen die ganz unregelmässige äussere Einwirkung und den ungemein feinen perceptirenden Apparat. Bei den Säugethieren endlich vervollständigt sich das bei den Vögeln schon sehr ausgebildete Organ durch ein auf die Schallwellen der Luft berechnetes äusseres Ohr. Denn, vermag man auch mittelst der Zähne und festen Schädeltheile die Schwingungen eines berührenden Körpers, z. B. den Schlag einer Uhr wahrzunehmen, so hängt doch die reine und scharfe Auffassung der Töne, als Frucht langer Uebung und Gewohnheit, ausschliesslich von der regelmässigen Zusammenwirkung aller Ohrtheile und von der Abgabe der Schwingungen von Seiten der äussern Luft ab (303).

Wir wollen die Haupttheile des menschlichen Ohres kurz betrachten und sehen, wie weit sich nach acustischen Gesetzen ihre Rolle beim Hören erklären lässt.

351. Die Theile des menschlichen Ohres. — Man unterscheidet am menschlichen Ohre die folgenden Haupttheile:

1) Das äussere Ohr, vom äussern Luftmeere bespült, besteht aus

a) der Ohrmuschel a (Fig. 236 A), welche bei den feinhörenden und furchtsamen Thieren (wie Fledermaus und Hase) einen grossen Trichter darstellt, dabei beweglich ist und dem Ursprunge des Schalles sich zuwendet. Offenbar dient sie, ähnlich dem Trichter des Hörrohres, zum Sammeln der Schallrichtungen nach der Tiefe des Trichters (303). In dieser Beziehung steht das platte unbewegliche Ohr des Menschen zurück, indem die von verschiedenen Seiten kommenden Schallrichtungen von den mehr entwickelten Windungen nur unvollkommen nach der Oeffnung

b) des Gehörganges b (Fig. 236 A u. B) geworfen werden. Der letztere, von knorpeligen und knöchernen Wänden gebildet, dringt, hinter der Kieferarticulation, nach dem Innern des Kopfes vor und wird durch das häutige

c) Trommelfell c schräg geschlossen. Die von Aussen gesammelten Schallrichtungen setzen offenbar in dem halbgeschlossenen Raume des Gehörganges die Luft in starke (theilweise stehende) Schwingungen,

deren Verschiebungen und Druckänderungen direkt die zartelastische Haut des Trommelfells zum gleichartigen transversalen Mitschwingen bringen.

2) Das mittlere Ohr, bereits ganz im Innern des Kopfes liegend, besteht aus:

a) der Paukenhöhle d von gerundet buchtiger Gestalt. Ihre Luftmasse nach Grösse und Form ganz geeignet, mannigfache Schwingungen mitzumachen, ohne dieselben selbst zu bestimmen, empfängt ihre Bewegung wieder durch das

b) Trommelfell c , das nichts anderes als eine aus den Bekleidungen der Paukenhöhle und des Gehörganges gebildete, auf einen Knochenring gespannte zarte Doppelmembrane ist.

c) die Gehörknochen d, e , in der Paukenhöhle beweglich aufgehängt, bilden eine Verbindung fester Theile zwischen dem Trommelfell und der Membrane des nach dem innern Ohre führenden ovalen Fensters. Das erste Knöchelchen, der Hammer α (Fig. 237) ist mit dem einen Fortsatze am Trommelfell festgewachsen, mit dem andern an der Wand der Paukenhöhle befestigt und hebelartig beweglich. Sein Kopf wirkt auf das zweite Knöchelchen, den Ambos β , der auf ähnliche Weise mittelst des einen Fortsatzes hebelartig sich stützt, mittelst des andern auf das dritte, das Linsenknöchelchen γ und durch dieses auf den Steigbügel δ wirkt. Die Platte des letztern endlich schliesst sich an das ovale Fenster.

Man hat den Gehörknöchelchen eine doppelte Rolle zugeschrieben. Sie leiten vorerst die Erzitterungen des Trommelfelles auf festem Wege dem innern Ohre zu, wobei nach der Gestalt der Gelenkfläche zwischen Hammer und Ambos nur die zum ovalen Fenster senkrechten Bewegungen zu demselben gelangen sollen. Die sonderbare Gestalt der Gehörknochen und das Dasein weich bekleideter Gelenkflächen sind dieser Rolle nicht ganz günstig. Zweitens dann scheinen sie die Spannung des Trommelfells auf die Schwingungszahl des Tones zu reguliren und zugleich die Töne zu dämpfen. Jedenfalls muss die Verbindung der beiden Membranen und der Gehörknochen als ein zusammenwirkendes Ganzes, einerseits von Luft, anderseits von Flüssigkeit bespült, aufgefasst werden;

d) die Eustach'sche Trompete f endlich ist ein von der Pauken zur Schlundhöhle führender Canal, dessen krankhafte Verschlussung den nachtheiligsten Einfluss auf das Hören ausübt. Sie scheint gleichfalls einen mehrfachen Zweck zu erfüllen, vorzüglich aber zur Ableitung aller Ausschwitzungen der Paukenhöhle, zur steten Erneuerung ihres Luftinhaltes, endlich zur Ausgleichung des Luftdruckes zu dienen. Während die Temperatur und der davon abhängige Feuchtigkeitszustand der Paukenhöhle in Folge ihrer Lage im Innern des Kopfes ohnehin constant sind, erhält die Eustach'sche Trompete auch die chemische Beschaffenheit ihrer Luft und den gleichartigen Zustand ihrer Wände. Damit ist die Paukenhöhle von allen Variationen der äussern Luft unabhängig und zu einer stets gleichen und regelmässigen Uebertragung der Schwingungen geschickt gemacht.

352. Fortsetzung. — So weit lässt sich eine ziemlich befriedigende

Deutung des Ohres geben; anders verhält es sich aber mit dem wichtigsten Theile,

3) dem innern Ohre oder Labyrinth (Fig. 236 g und Fig. 238), welches die Wahrnehmung durch die Nerven vermittelt. In einem sehr harten Knochen, dem Felsenbeine, eingeschlossen, bildet dasselbe eine (in der Figur vortretend dargestellte) Höhlung von verwickelter Gestalt. Man unterscheidet an ihr

a) den Vorhof α , den constantesten Theil, welcher durch die Membrane des ovalen Fensters ϵ von der Paukenhöhle, d. h. von der Platte des Steigbügels getrennt ist;

b) die 3 Bogengänge (halbkreisförmige Canäle) β , der eine in einer horizontalen, die beiden andern in rechtwinklicht verticalen Ebenen liegend. Die Canäle gehen von dem Vorhofe aus und münden wieder in denselben, doch nur mit 5 Oeffnungen, da die beiden verticalen Canäle sich vor ihrer Einmündung in Einen vereinigen;

c) die Schnecke γ endlich, von ihrer Aehnlichkeit mit der Höhlung eines Schneckengehäuses aus $2\frac{1}{2}$ Windungen so benannt, hat den zusammengesetztesten Bau. Sie wird nämlich durch ihre ganze Länge, von einer halb knöchigen, halb häutigen Scheidewand in zwei Zellen getheilt, die einzig im obersten Punkte communiciren. Die eine öffnet sich wieder in den Vorhof, die andere durch die eigene Oeffnung des runden Fensters ζ , an deren Membran die Luftschwingungen der Paukenhöhle direkt schlagen, in letztere.

Alle diese Höhlungen sind mit zarten Häuten bekleidet, und mit einer wässrigen Flüssigkeit angefüllt. Theils an den Wänden, theils an zwei membranösen Blasen, die in der Flüssigkeit schwimmen, vertheilen sich zahlreiche feine Nerven, deren durch die Flüssigkeit mitgetheilte und an den Wänden reflectirte Erzitterungen den Ursprung der Wahrnehmung bilden müssen. Ueber die Wirkung der einzelnen Theile beim Hören, gleichwie über die Deutung der so auffallenden Form derselben hat man kaum einige Vermuthungen. Der unerlässlichste Theil scheint der Vorhof; die 3 Canäle zeigen sich jedoch durch die ganze Reihe der Wirbelthiere, selbst noch in den Fischen; die Schnecke, wenigstens mit ihrer eigenthümlichen Gestalt, gehört ausschliesslich den Säugethieren und dem Menschen an, findet sich jedoch, einfacher, noch bei den Vögeln. In ihr sucht man die Hauptbedingung für die Feinheit und den Reichthum der Tonwahrnehmung, da kein Theil einen künstlichen und merkwürdigern Bau hat. Fig. 239 stellt den vergrösserten Durchschnitt der die beiden Zellen trennenden Scheidewand dar. Der Knochen-theil derselben α endet vorn in einer Doppelreihe von Zähnen β und γ , durch eine Rinne getrennt. Der Nerv δ zieht sich an der untern Zelle (Zelle des runden Fensters), deren Bekleidung sich als häutige Scheidewand verlängert, durch den Knochen und tritt unter γ durch kleine Oeffnungen als feine Fasern (Corti'sche Fasern) in die obere, Vorhofzelle, wo diese Fasern theils in freischwimmende gestielte Nervenzellen ϵ , theils in feine Spitzen ζ ausgehen. Solcher Fasern liegen, regelmässig und immer kleiner werdend, gegen 2000 neben einander; an ihnen hin verlaufen die Erschütterungen, die vom Vorhofe kommen, um

an der Spitze der Schnecke mit den direkt vom runden Fenster eintretenden zu interferiren.

353. Die Wahrnehmungen des Ohres. — Das Ohr vermag an dem Schalle Verschiedenes zu unterscheiden, doch zeigt es für die verschiedenen Eigenschaften desselben weder die gleiche Schärfe, noch die gleiche Bildungsfähigkeit.

1) Ueber die Richtung des Schalles vorerst urtheilen wir nur mit geringer Sicherheit, theils weil sich unsere Vorstellung immer aus den Eindrücken zweier ganz verschieden gestellter Organe zusammensetzt, theils weil die Schallrichtungen, um zum Trommelfell zu gelangen, wesentlich verändert werden. Mit geschlossenen Augen täuschen wir uns ungemein über die Gegend, woher der Schall kömmt und halten uns besonders an die ungleiche Stärke beim Drehen des Kopfes.

2) Mit ziemlicher Sicherheit entscheidet das Ohr, welcher von zwei gleich hohen, gleich nacheinander gehörten Tönen der stärkere ist; diess aber ist nicht mehr der Fall, wenn dieselben der Höhe nach abweichen oder das Gedächtniss mitwirken muss. Vollends fehlt dem Ohre jeder Maassstab für eine quantitative Bestimmung der Tonstärke, wie überhaupt diese Eigenschaft des Tones bis jetzt jeder genauen, selbst objectiven Messung entgangen ist (303).

3) Für Beurtheilung der Klangverschiedenheit verräth das Ohr einen hohen Grad von Uebungs- und Bildungsfähigkeit. Man denke an die feine Unterscheidung der Sprachlaute, deren Zahl bei manchen Dialekten und manchen z. B. den slavischen Sprachen ungemein gross ist. Die Vollkommenheit des Ohres hält in dieser Beziehung gleichen Schritt mit derjenigen des Sprachorgans.

4) Es ist kein Zweifel, dass eine jede Wiederholung von Erschütterungen, stark genug, unser Organ zu affiziren und hinlänglich rasch um zu Einer Wahrnehmung zu verschmelzen, — welcher Art übrigens die Erschütterungen sein mögen —, als Ton gehört wird. Die Grenze der Wahrnehmung nach der Tiefe und Höhe hin wurde von verschiedenen Beobachtern bei der folgenden Zahl von Schlägen oder ganzen Schwingungen festgesetzt:

	Tiefe	Höhe
Chladni	15—16	6000
Young	—	9—10000
Weber	15	15000
Savart	7—8	24000
Despretz	—	36800

Die sehr weiten Grenzen von Savart beziehen sich nicht auf die gewöhnlichen musicalischen Töne, für welche man die Chladni'schen Grenzen anzunehmen pflegt, sondern auf Töne besondern Ursprunges. Je weicher nämlich die Uebergänge der Schwingungen sind, wie z. B. wenn die Speichen eines Rades ohne Berührung durch eine Lücke schlagen, bei desto geringerer Schwingungszahl soll das Ohr eine tonähnliche Wahrnehmung erhalten. Andere Beobachter bezweifeln jedoch mit Grund die Möglichkeit wahrer Töne, wenn die Schwingungen, wie hier, einzeln unterschieden werden. Hingegen hört man die scharfen und harten Stösse eines Zahnrades gegen eine streifende Feder,

so wie die verstärkten Schwingungen der Stimmgabeln, noch bis zu Schwingungszahlen, welche diejenigen der Saiten- und Blasinstrumente weit übertreffen. Jedenfalls aber weicht in dieser Beziehung die Schärfe des Gehörs verschiedener Personen bedeutend ab.

5) Was endlich die Unterscheidung der Tonintervalle betrifft, so hängt sie theils von der Individualität, theils von der Uebung, theils endlich von den Tönen selbst ab. Ein gewöhnliches gutes Ohr unterscheidet $\frac{1}{2}$, ein geübtes $\frac{1}{4}$ Comma ($\frac{161}{160}$ und $\frac{321}{320}$). Delezenne setzt die Schärfe des musicalischen Ohres beim Einklang auf $\frac{1}{4}$, bei der Octave auf $\frac{1}{8}$ Comma ($\frac{641}{640}$); Seebeck bei wiederholter Gleichstimmung einer Saite und Stimmgabel irrte nie um $\frac{851}{850}$ und nahm selbst bei $\frac{1}{15}$ Comma ($\frac{1201}{1200}$) noch eine Verschiedenheit wahr.

Es ist die wichtigste Bestimmung der Urinsäure, welche die Menge der Urinsäure im Urin bestimmt. Die Urinsäure ist ein wichtiger Bestandteil des Urins und ihre Bestimmung ist von großer Wichtigkeit für die Diagnose von Krankheiten.

Die Urinsäure wird durch die Oxidation der Harnsäure gebildet. Die Harnsäure ist ein wichtiger Bestandteil des Urins und ihre Bestimmung ist von großer Wichtigkeit für die Diagnose von Krankheiten.

Die Urinsäure wird durch die Oxidation der Harnsäure gebildet. Die Harnsäure ist ein wichtiger Bestandteil des Urins und ihre Bestimmung ist von großer Wichtigkeit für die Diagnose von Krankheiten.

Die Urinsäure wird durch die Oxidation der Harnsäure gebildet. Die Harnsäure ist ein wichtiger Bestandteil des Urins und ihre Bestimmung ist von großer Wichtigkeit für die Diagnose von Krankheiten.

Die Urinsäure wird durch die Oxidation der Harnsäure gebildet. Die Harnsäure ist ein wichtiger Bestandteil des Urins und ihre Bestimmung ist von großer Wichtigkeit für die Diagnose von Krankheiten.

Die Urinsäure wird durch die Oxidation der Harnsäure gebildet. Die Harnsäure ist ein wichtiger Bestandteil des Urins und ihre Bestimmung ist von großer Wichtigkeit für die Diagnose von Krankheiten.

Die Urinsäure wird durch die Oxidation der Harnsäure gebildet. Die Harnsäure ist ein wichtiger Bestandteil des Urins und ihre Bestimmung ist von großer Wichtigkeit für die Diagnose von Krankheiten.

Die Urinsäure wird durch die Oxidation der Harnsäure gebildet. Die Harnsäure ist ein wichtiger Bestandteil des Urins und ihre Bestimmung ist von großer Wichtigkeit für die Diagnose von Krankheiten.

Die Urinsäure wird durch die Oxidation der Harnsäure gebildet. Die Harnsäure ist ein wichtiger Bestandteil des Urins und ihre Bestimmung ist von großer Wichtigkeit für die Diagnose von Krankheiten.

Die Urinsäure wird durch die Oxidation der Harnsäure gebildet. Die Harnsäure ist ein wichtiger Bestandteil des Urins und ihre Bestimmung ist von großer Wichtigkeit für die Diagnose von Krankheiten.

Die Urinsäure wird durch die Oxidation der Harnsäure gebildet. Die Harnsäure ist ein wichtiger Bestandteil des Urins und ihre Bestimmung ist von großer Wichtigkeit für die Diagnose von Krankheiten.

Die Urinsäure wird durch die Oxidation der Harnsäure gebildet. Die Harnsäure ist ein wichtiger Bestandteil des Urins und ihre Bestimmung ist von großer Wichtigkeit für die Diagnose von Krankheiten.

Fig. 1.

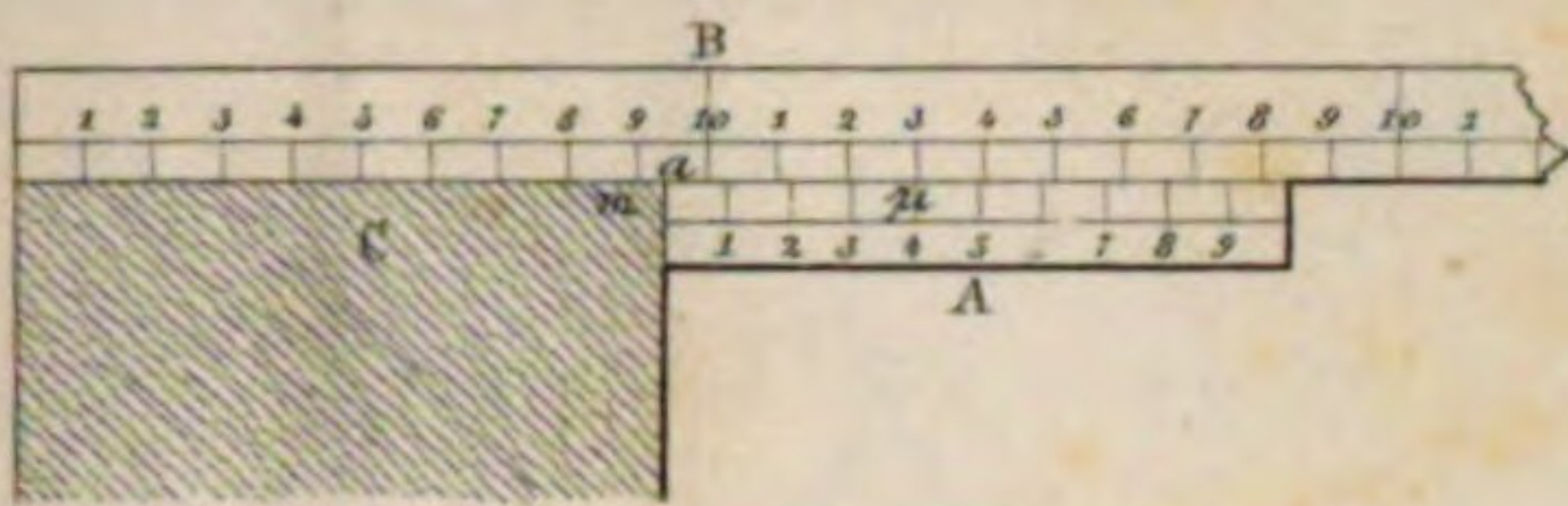


Fig. 3.

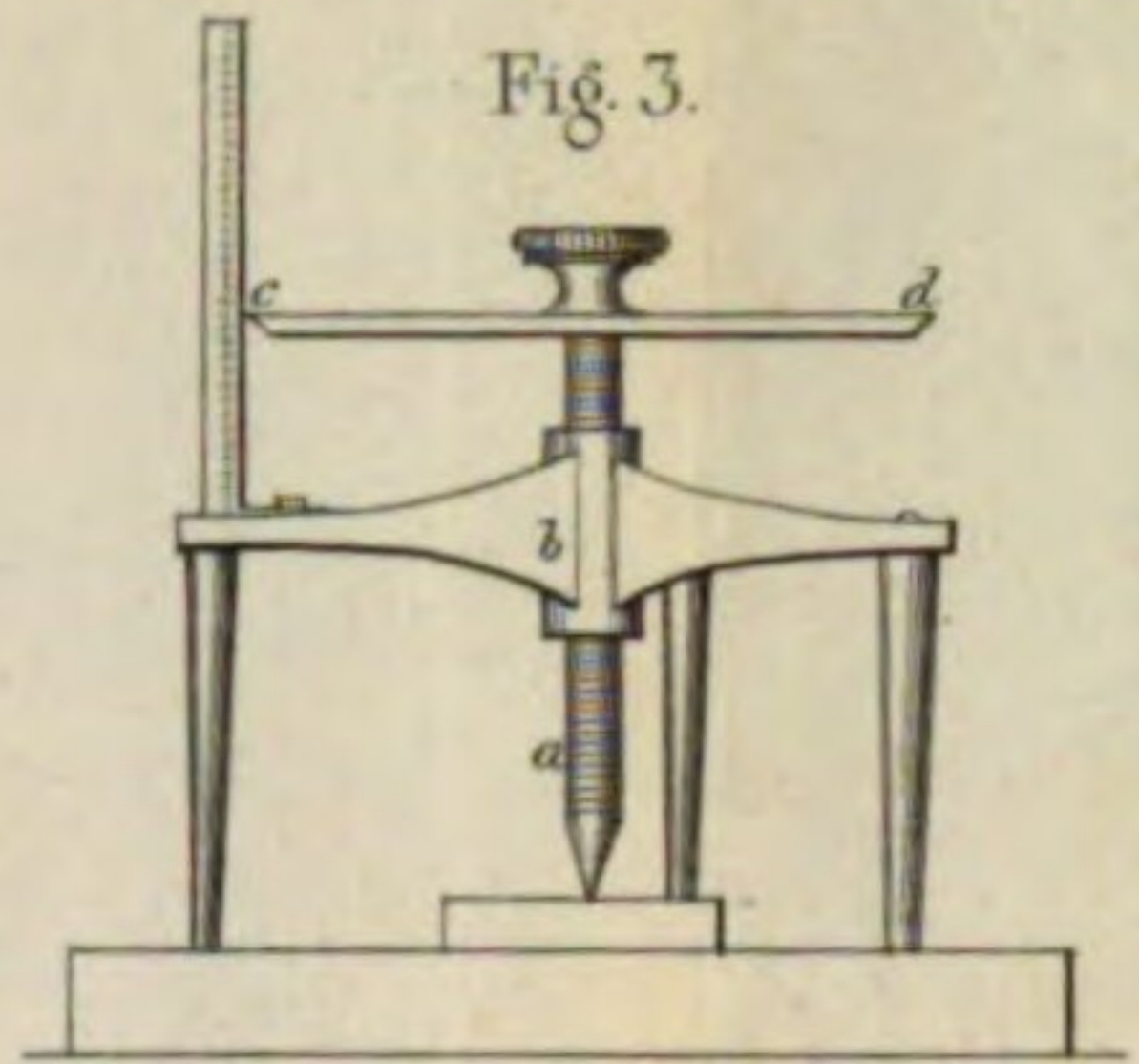


Fig. 4.

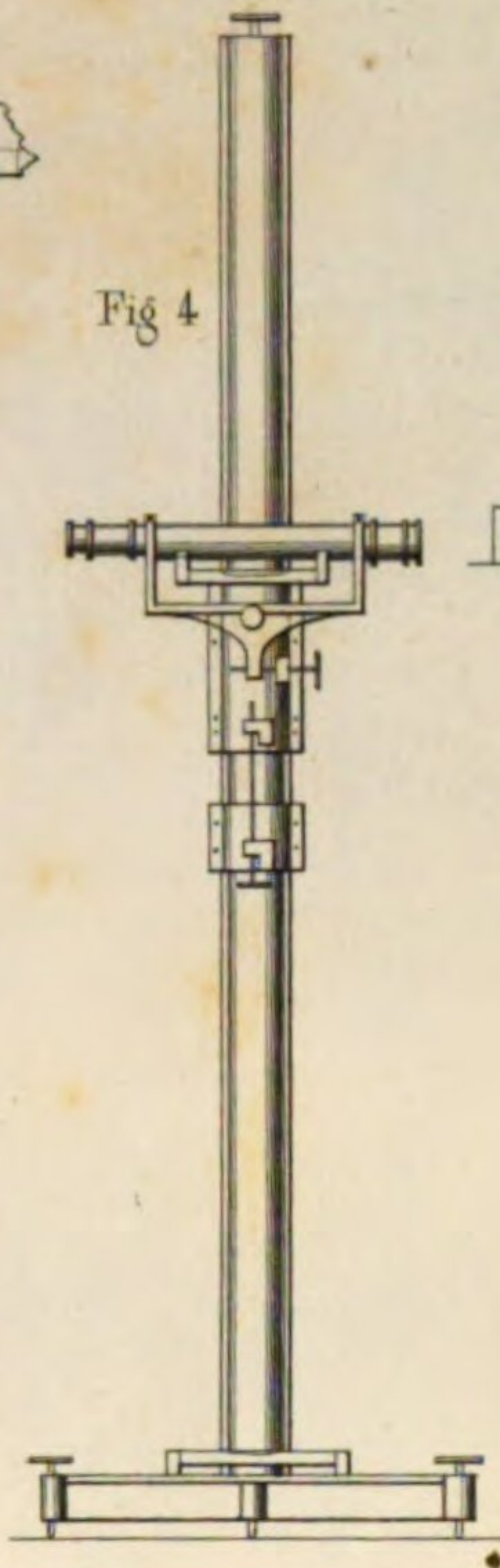


Fig. 4.

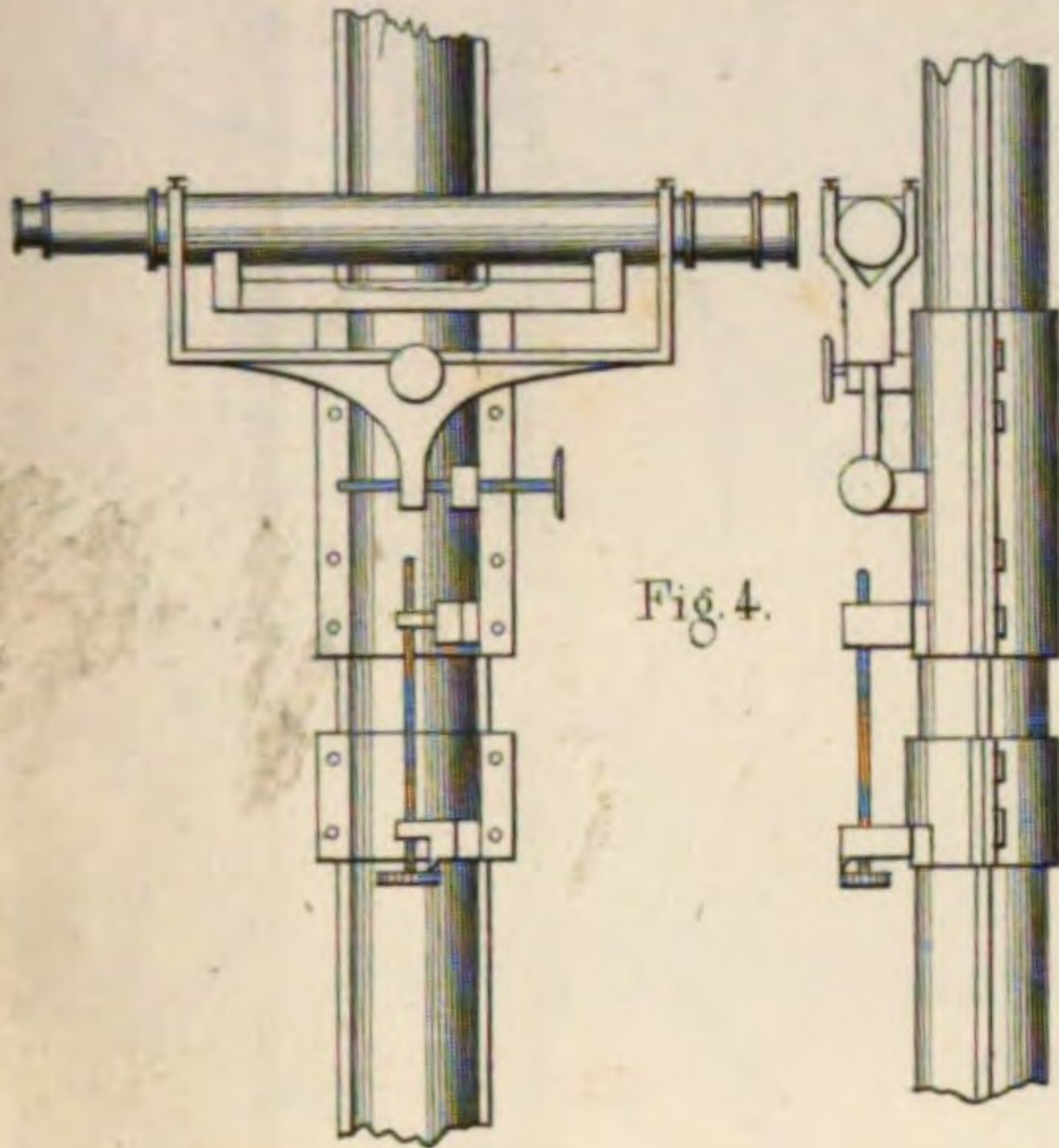


Fig. 7.

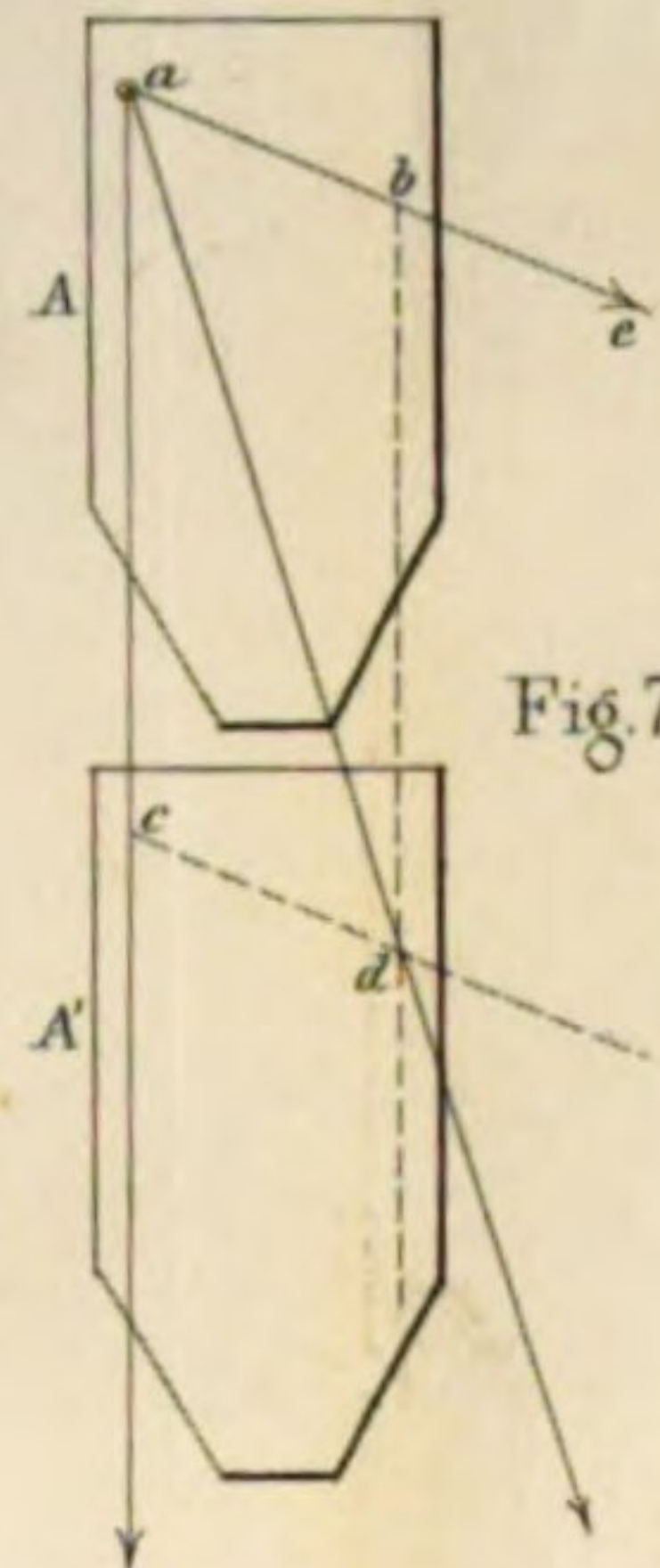


Fig. 5.

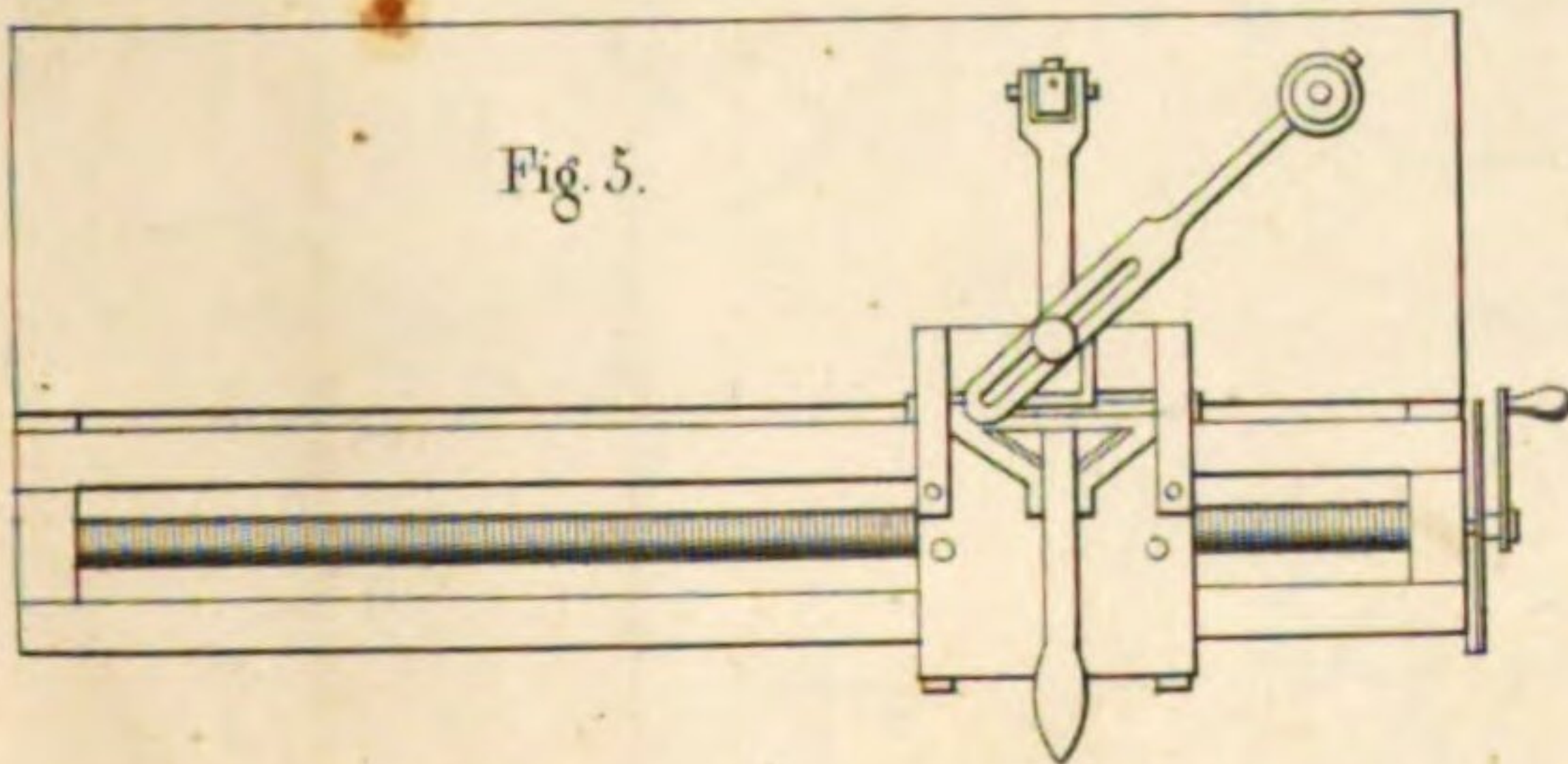


Fig. 2.

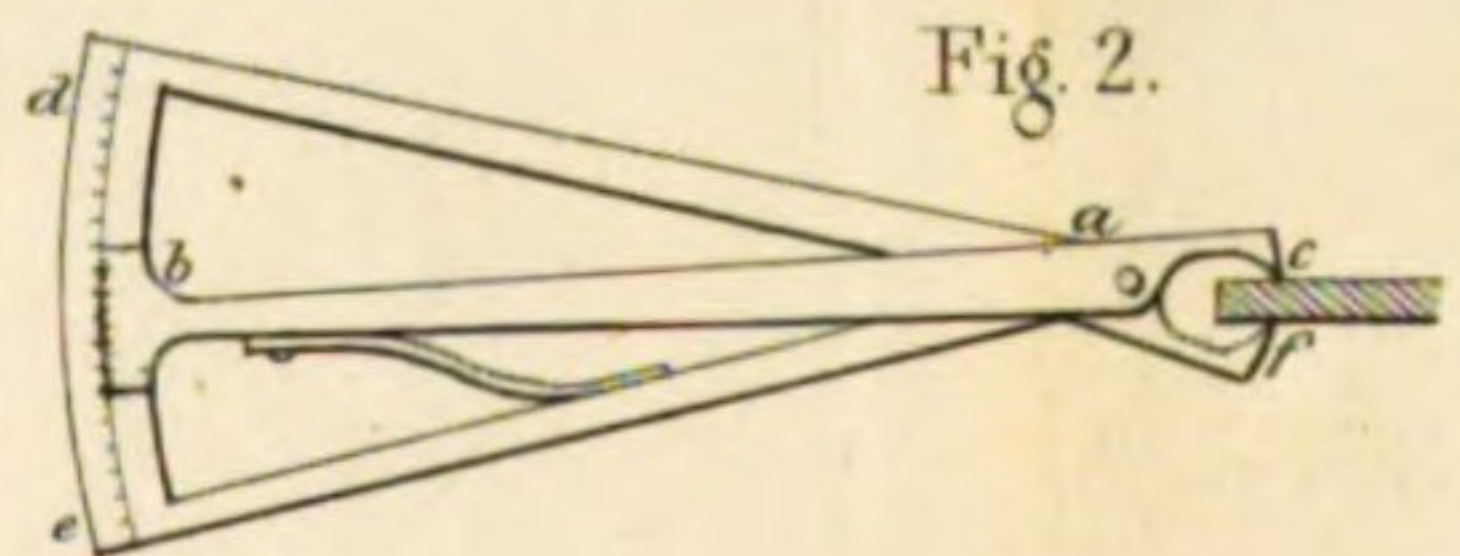


Fig. 6.

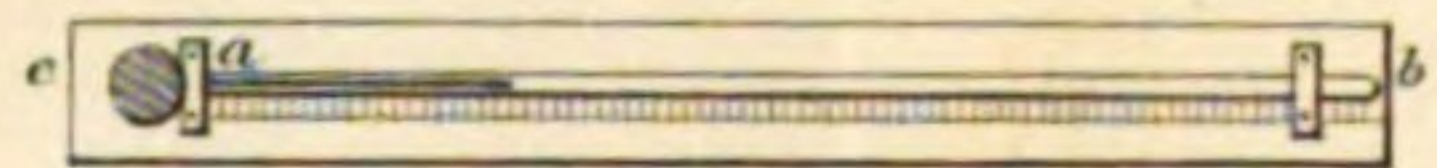


Fig. 5.

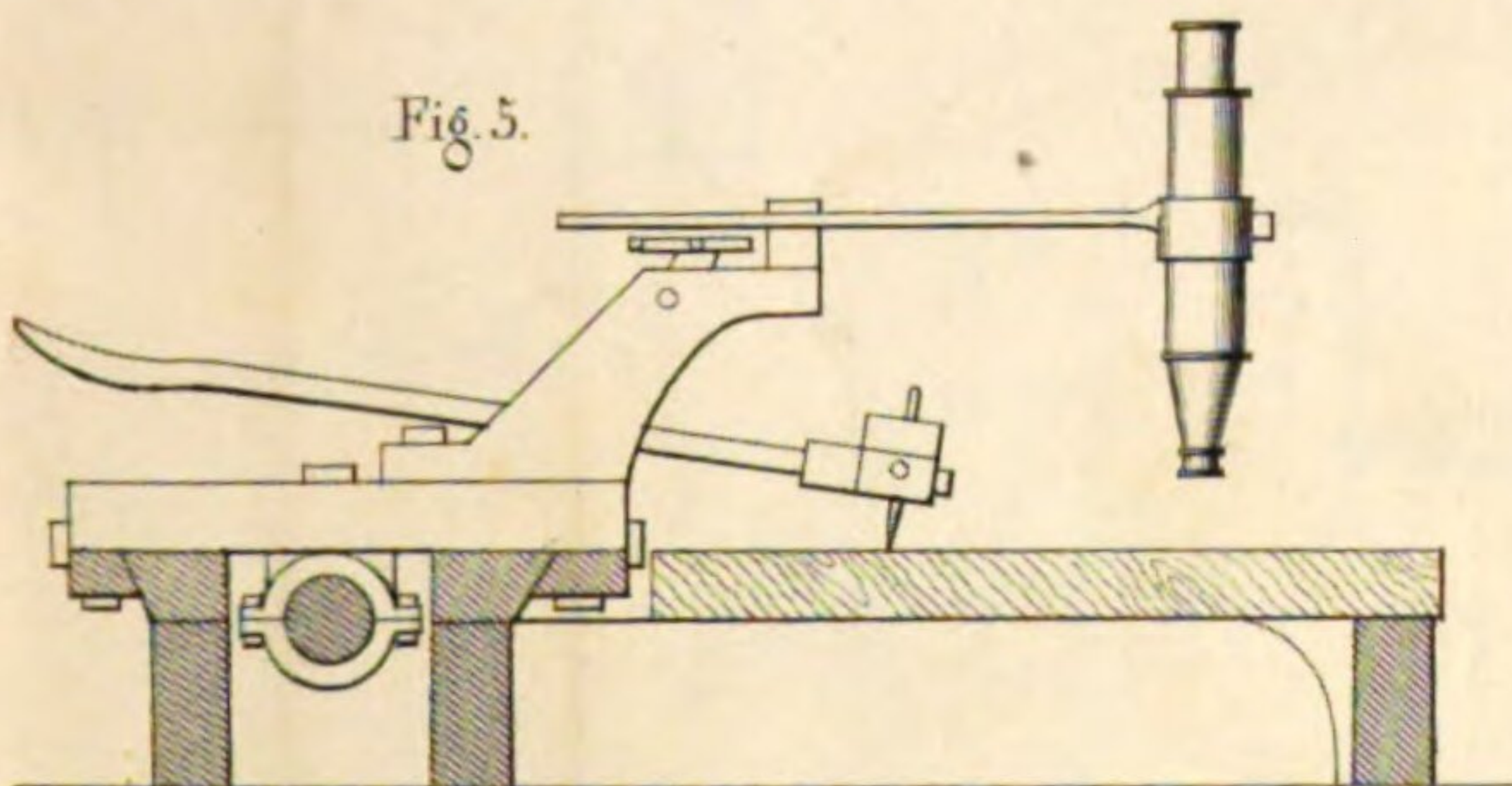


Fig. 8.

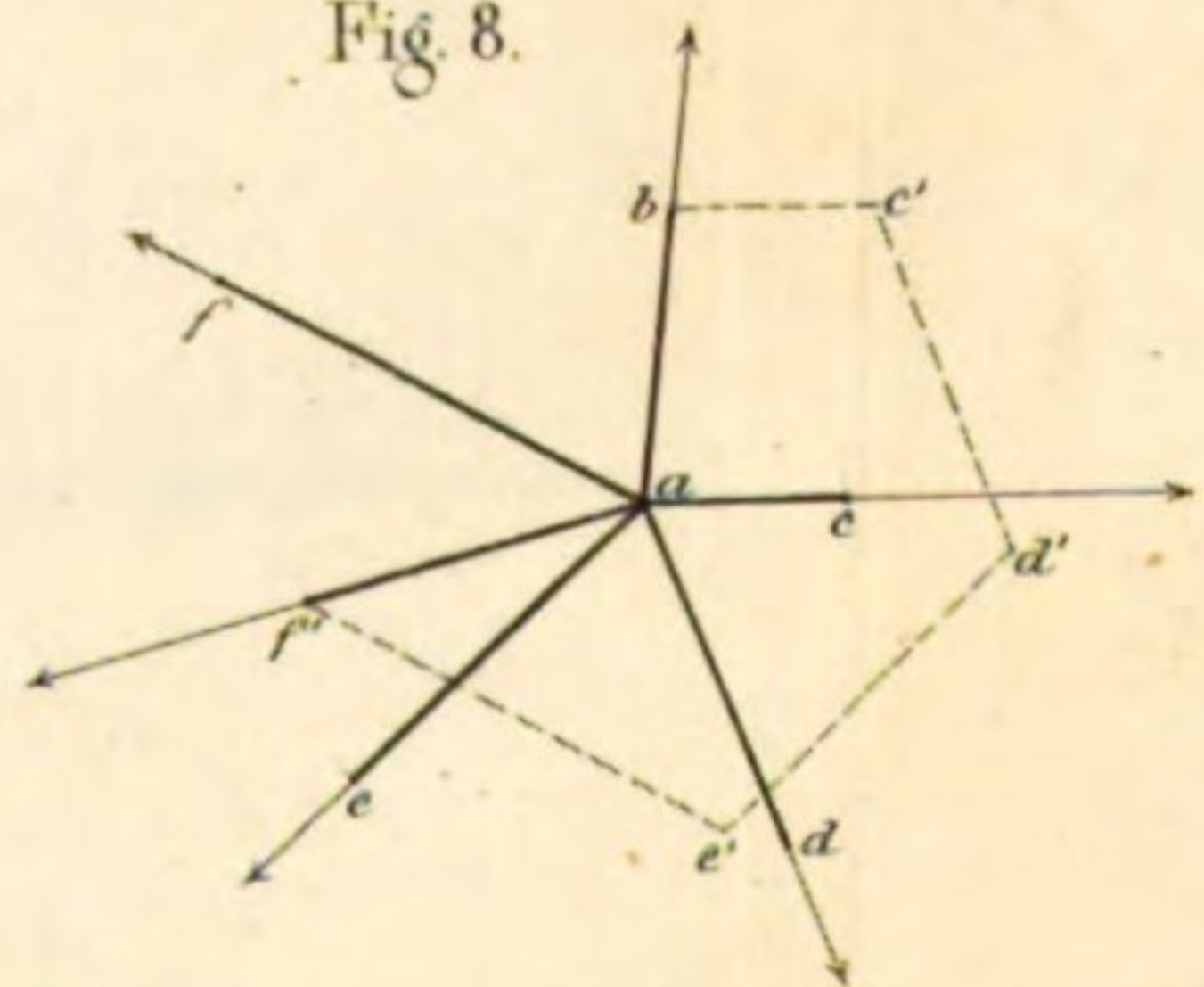


Fig. 9.

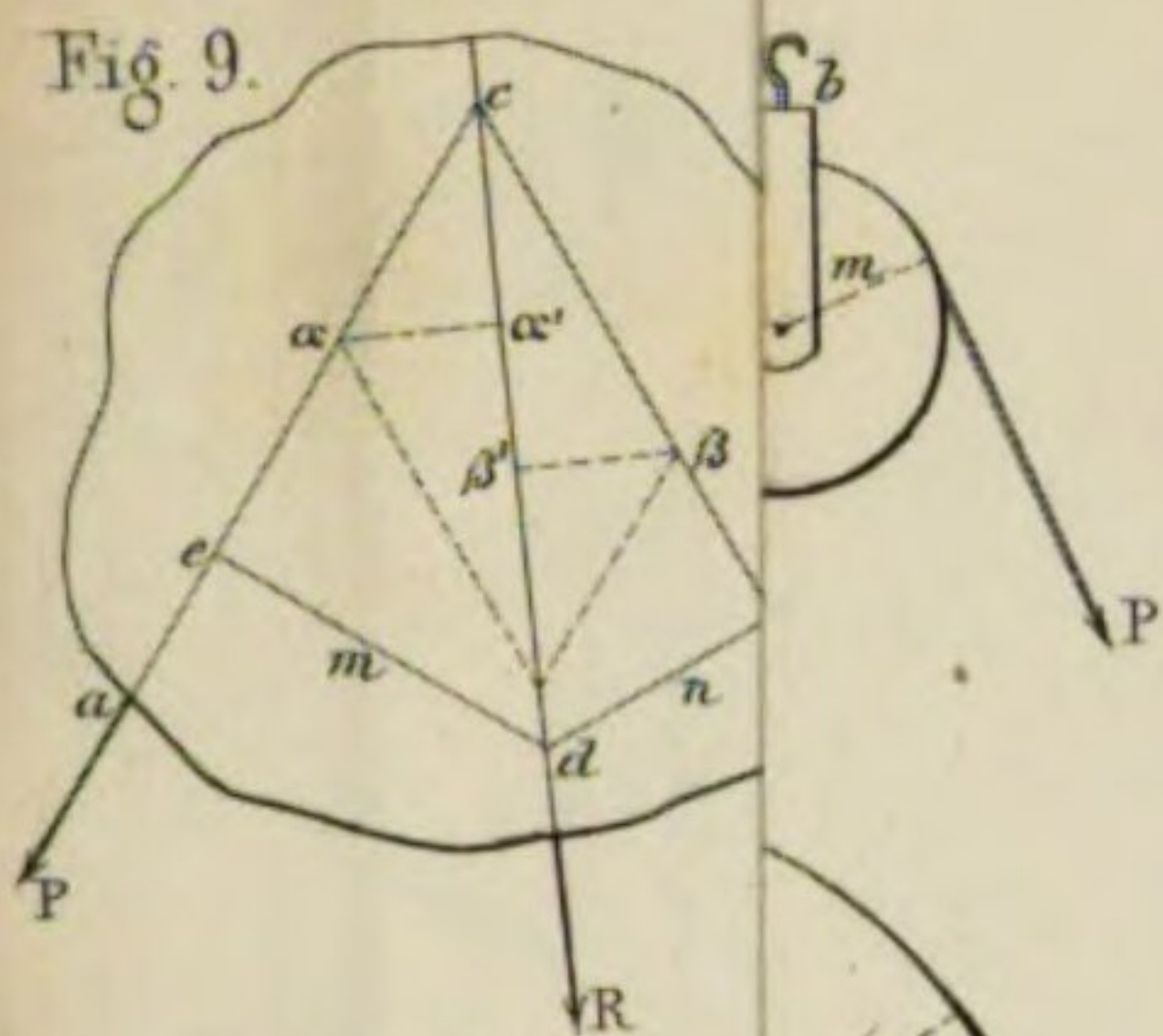


Fig. 11.

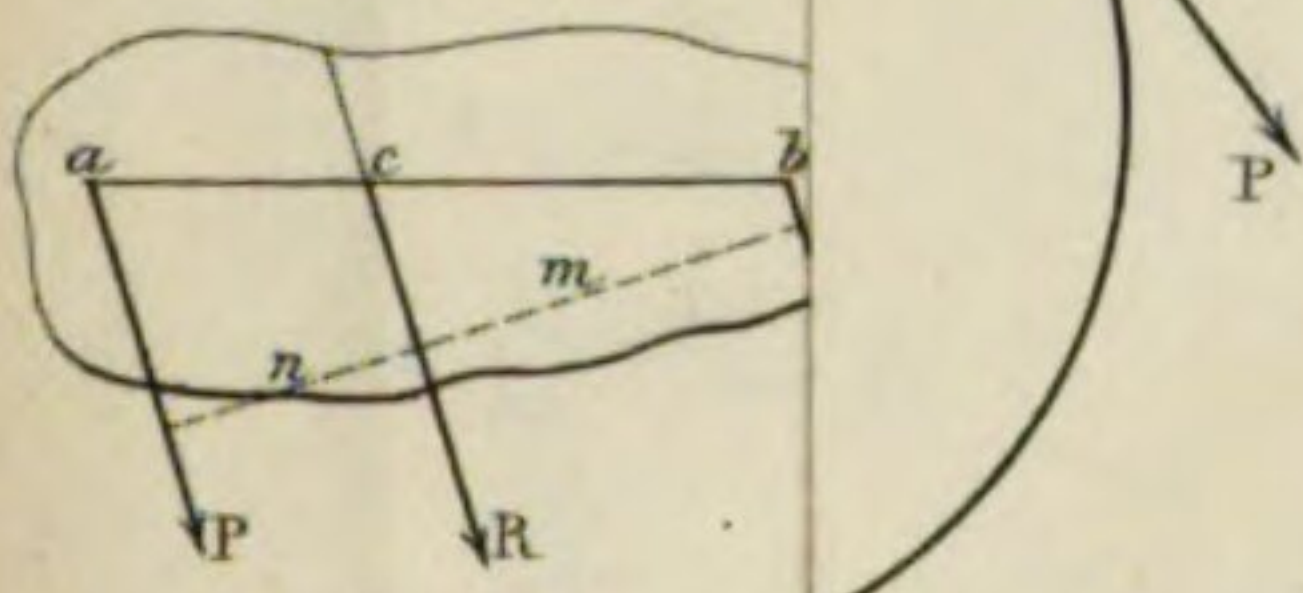


Fig. 15.

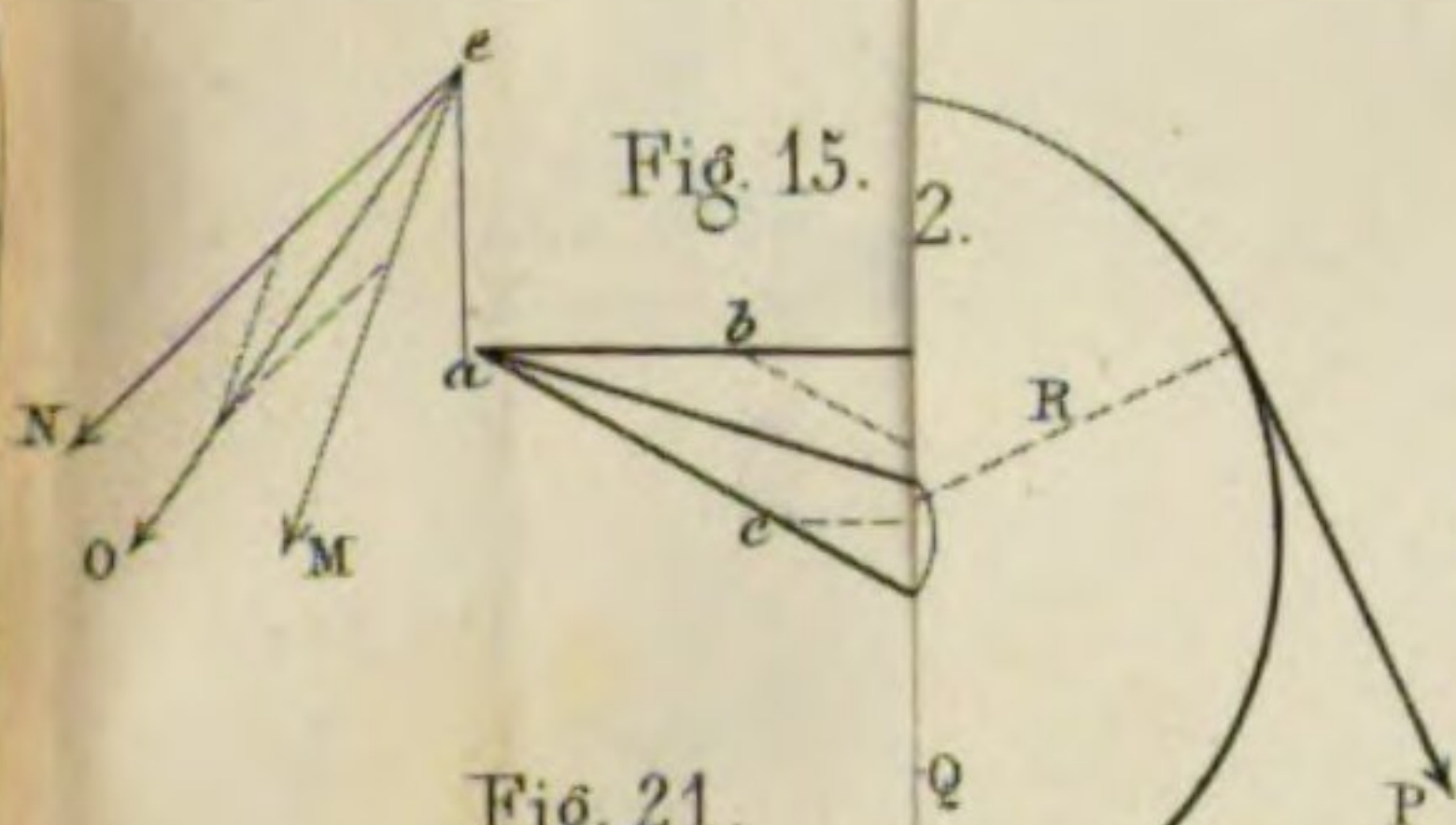


Fig. 21.

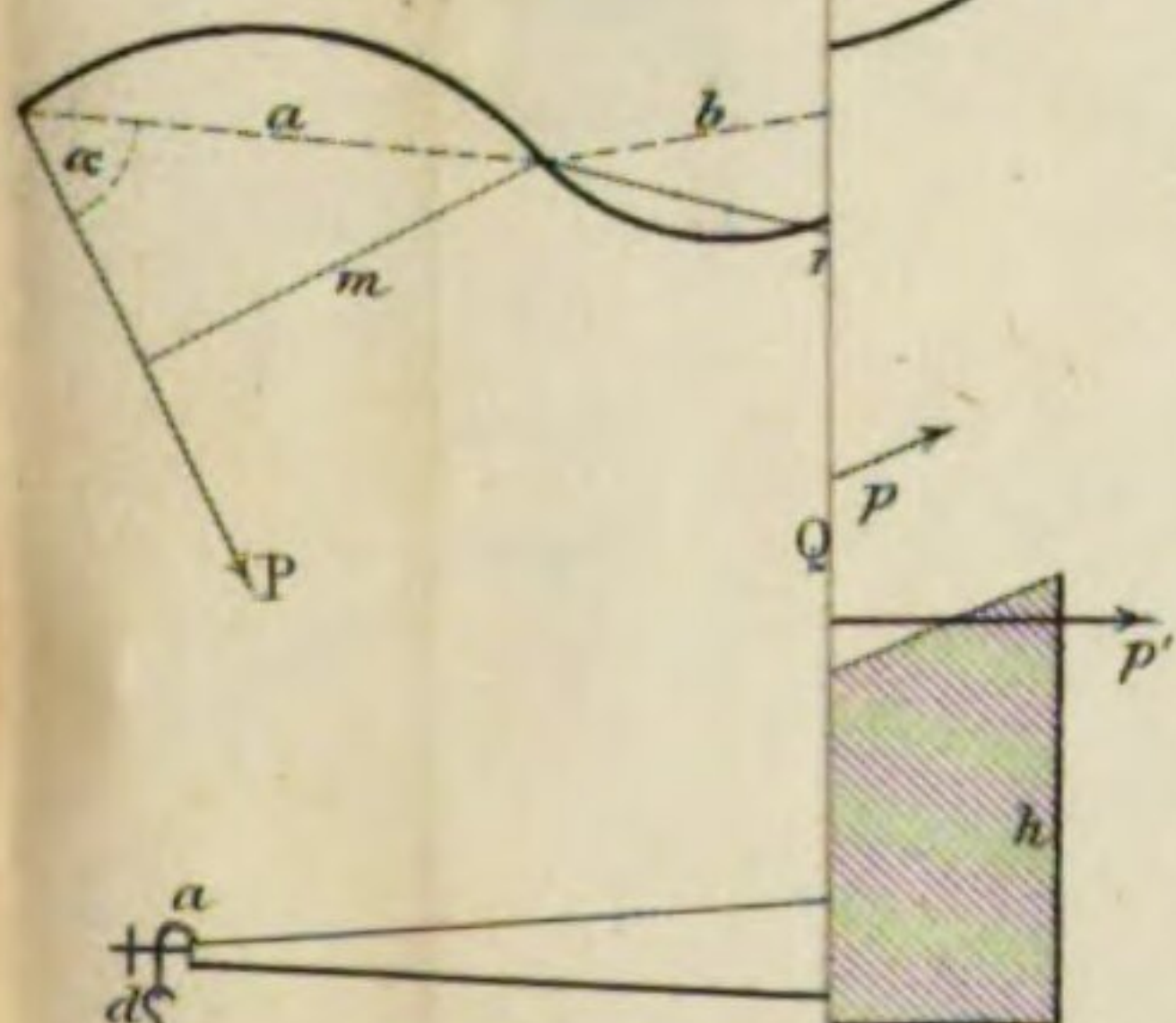


Fig. 22



Fig. 29.

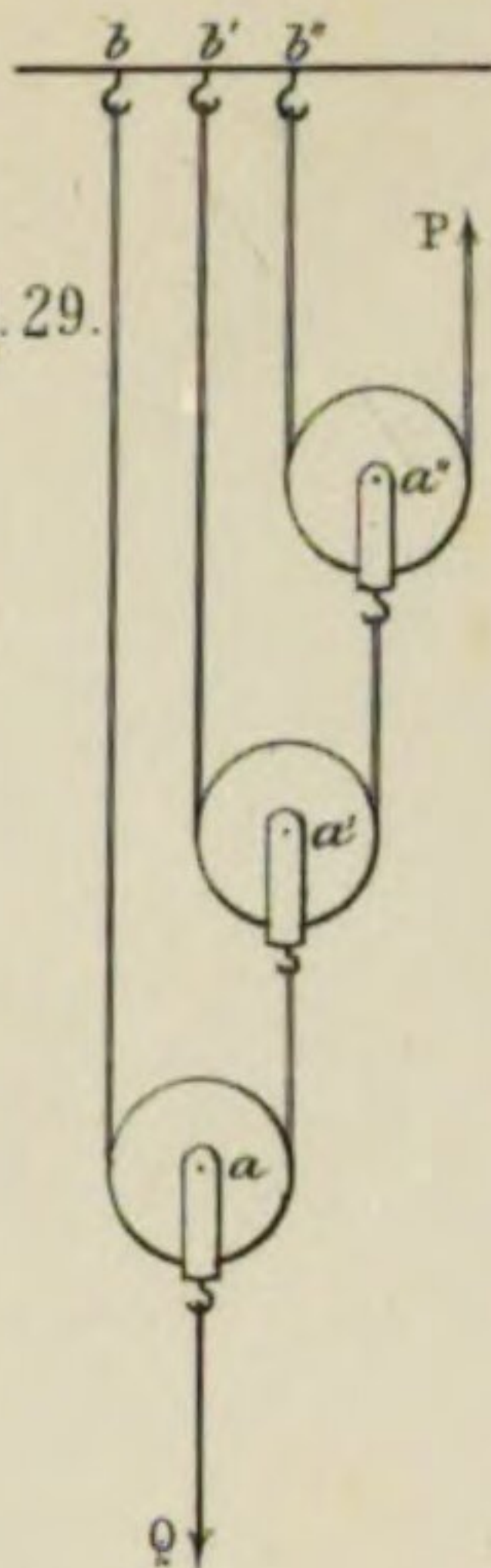


Fig. 30.

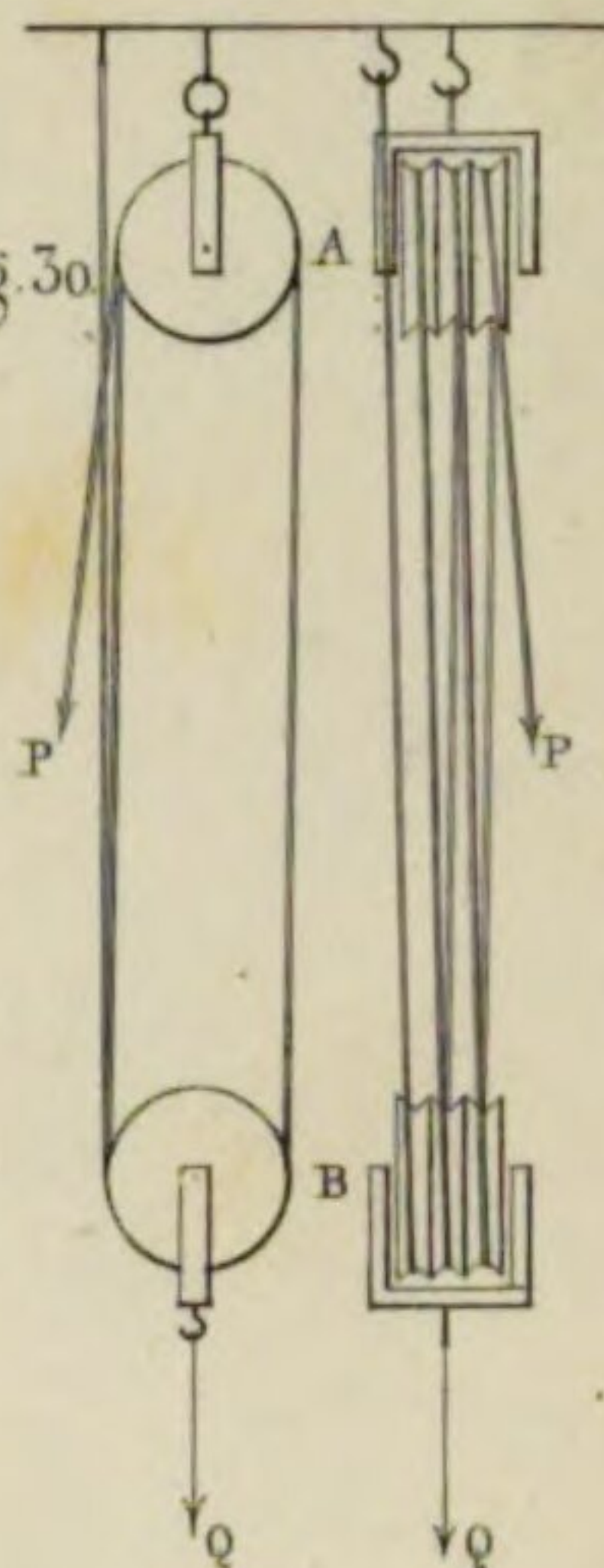


Fig. 33.

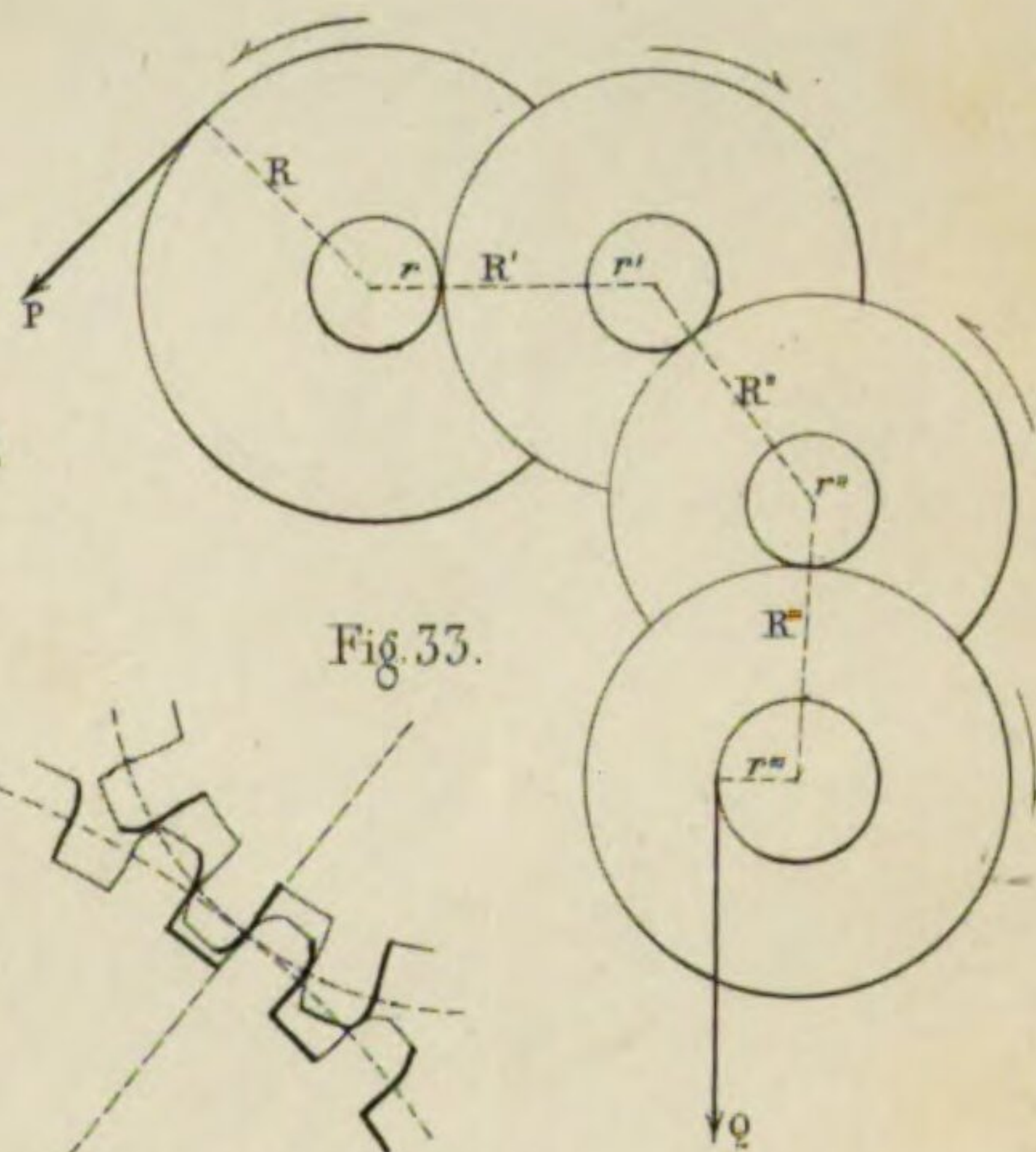


Fig. 38.

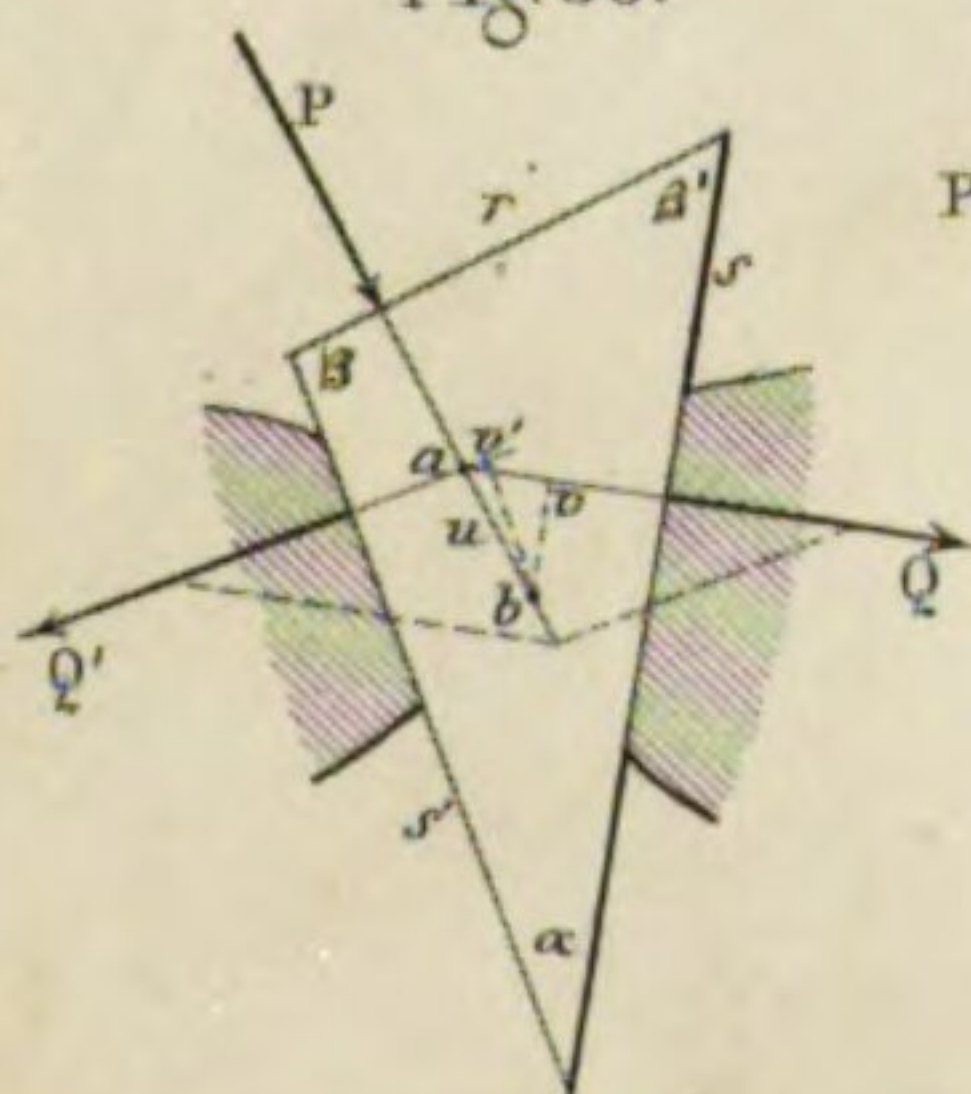
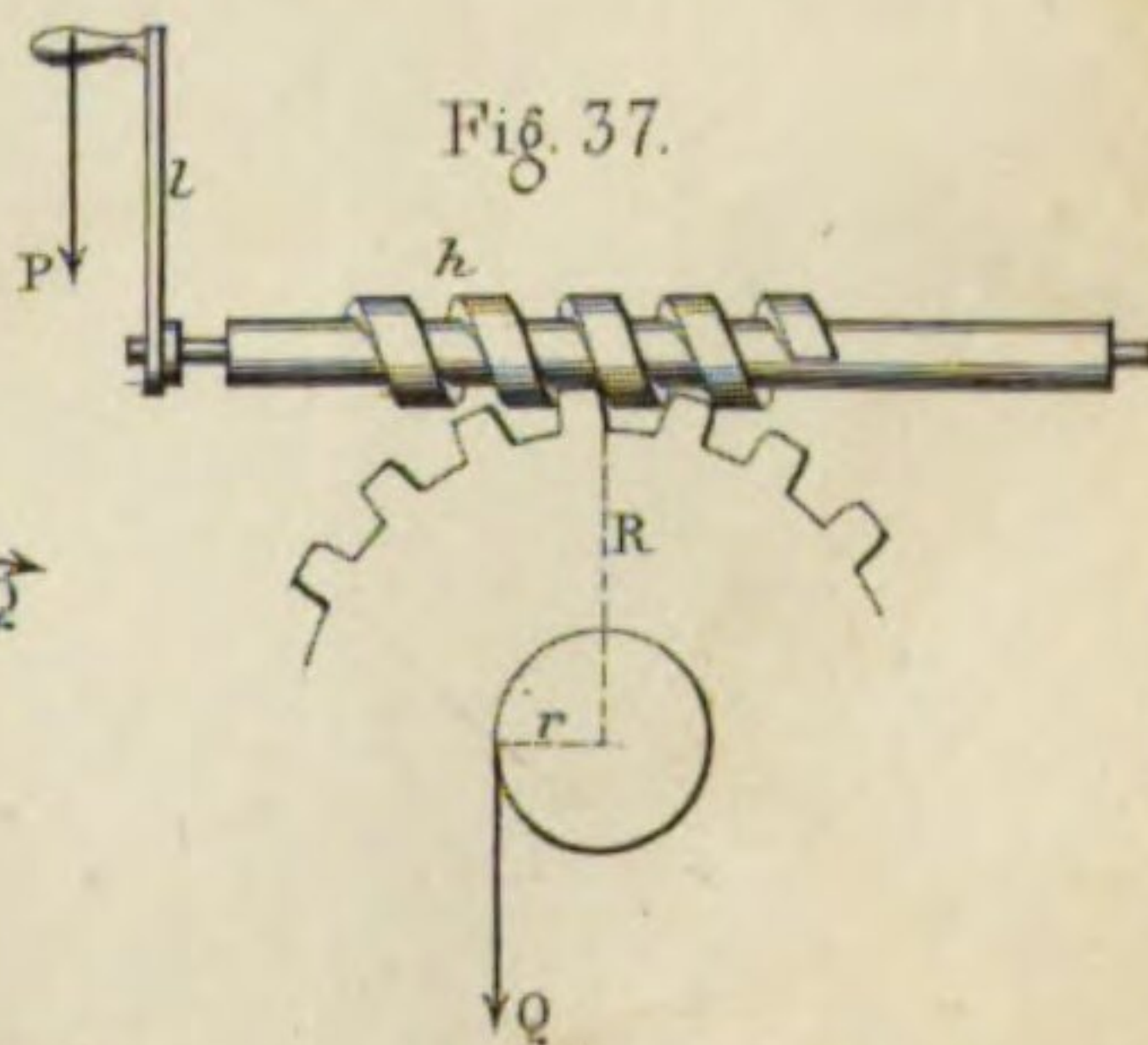
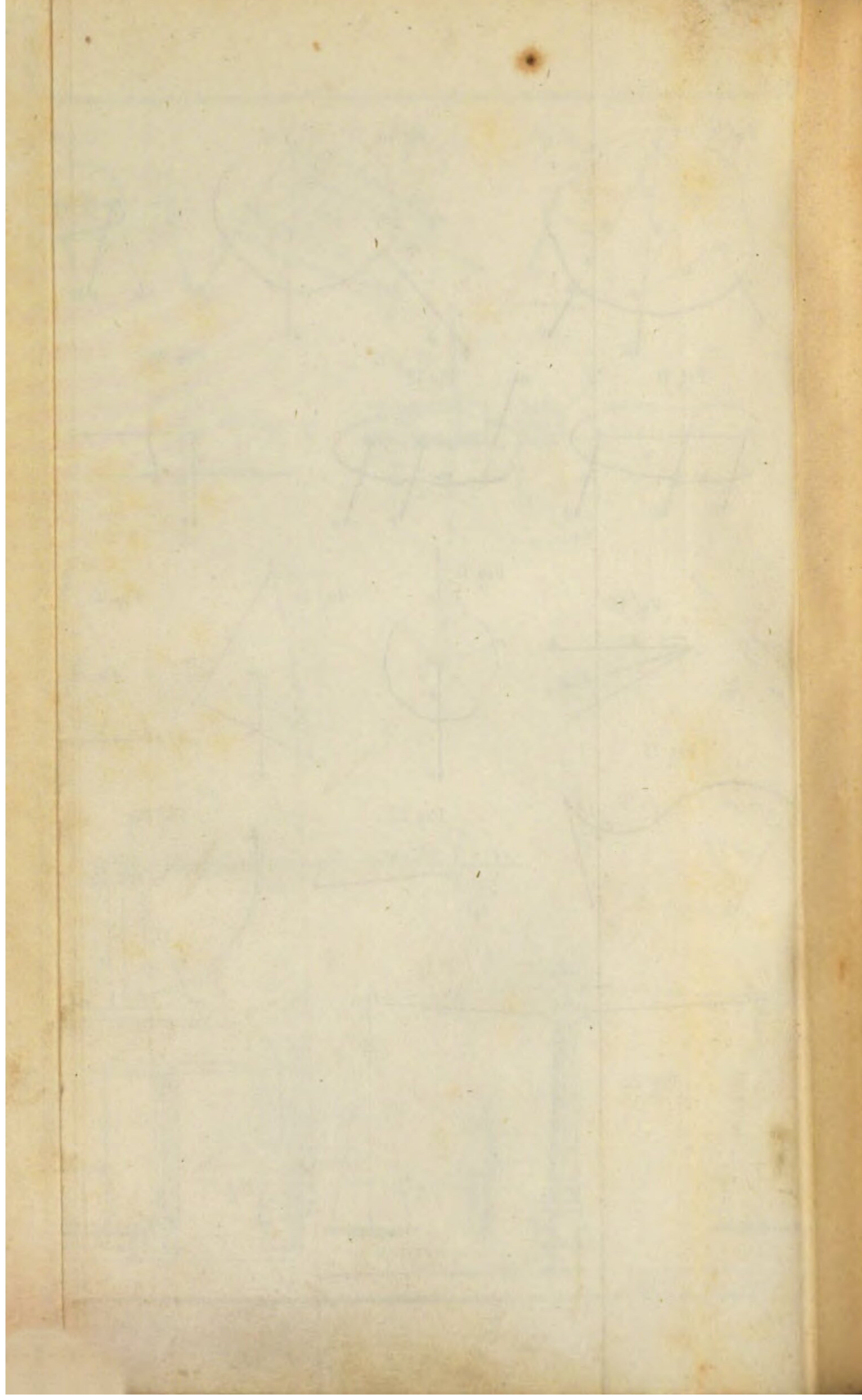


Fig. 37.





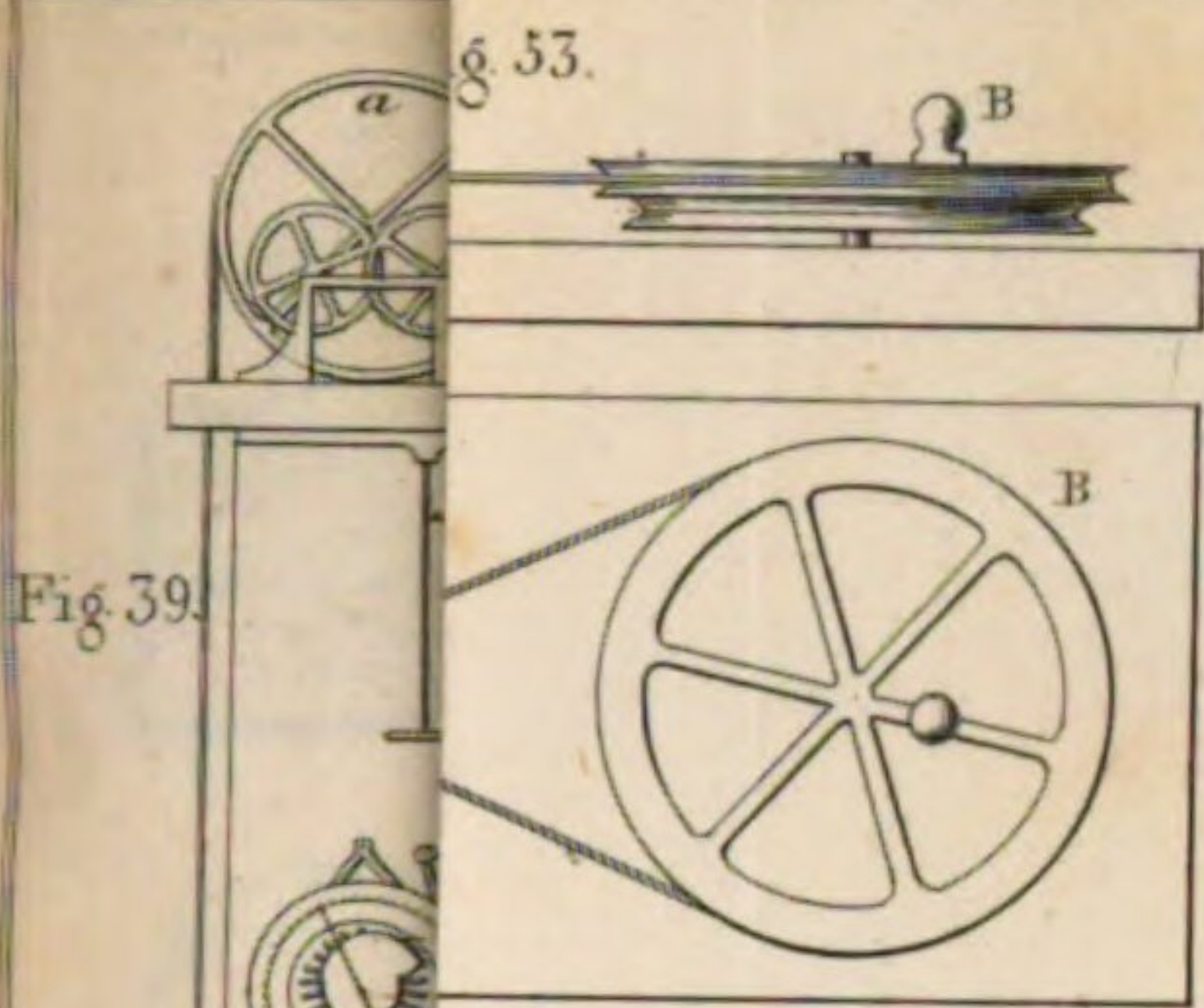


Fig. 39.

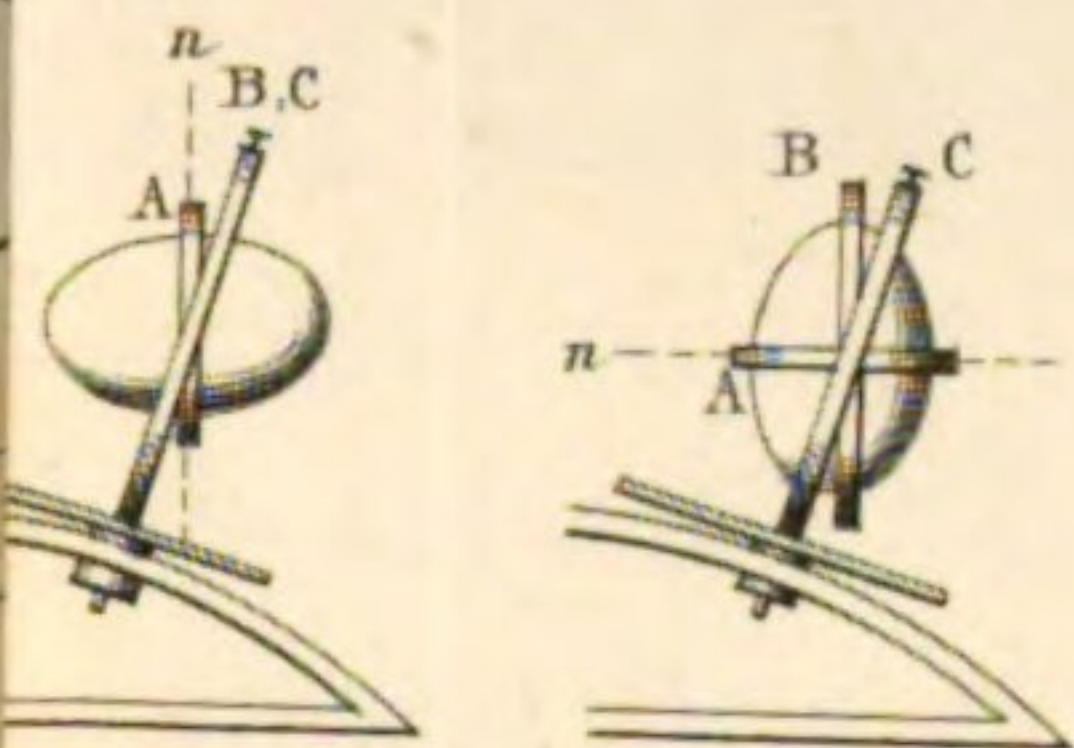
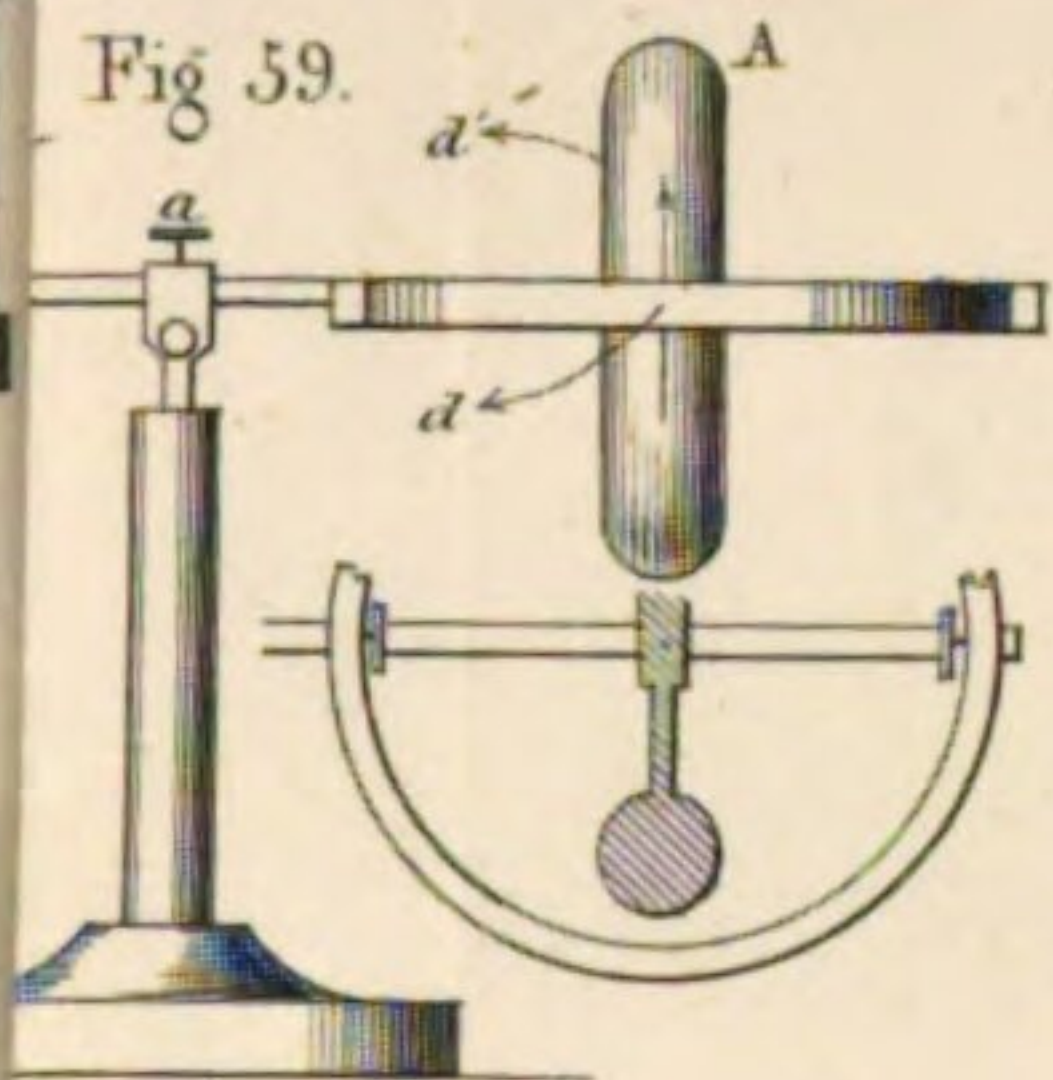


Fig. 40.

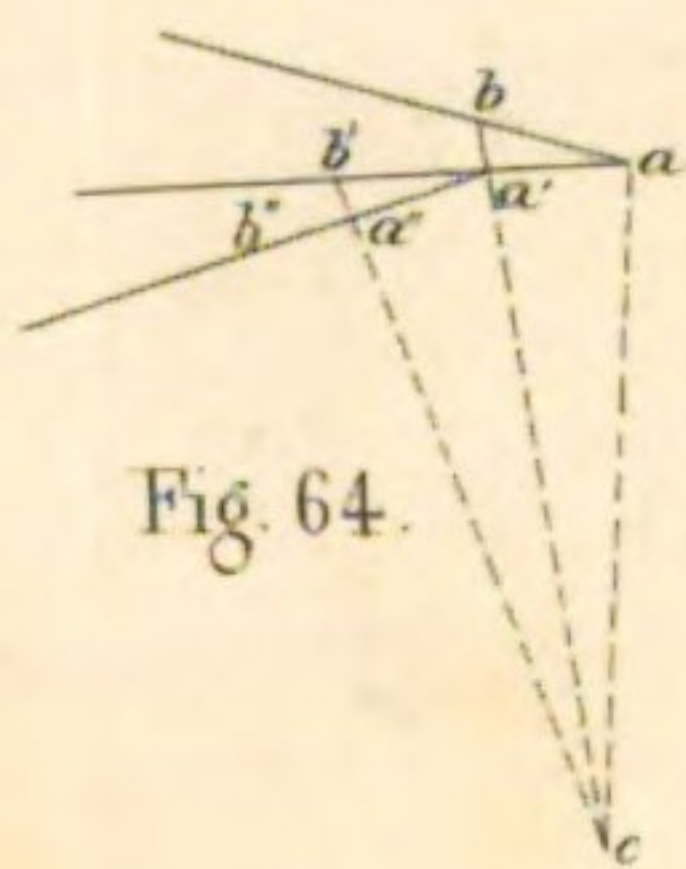
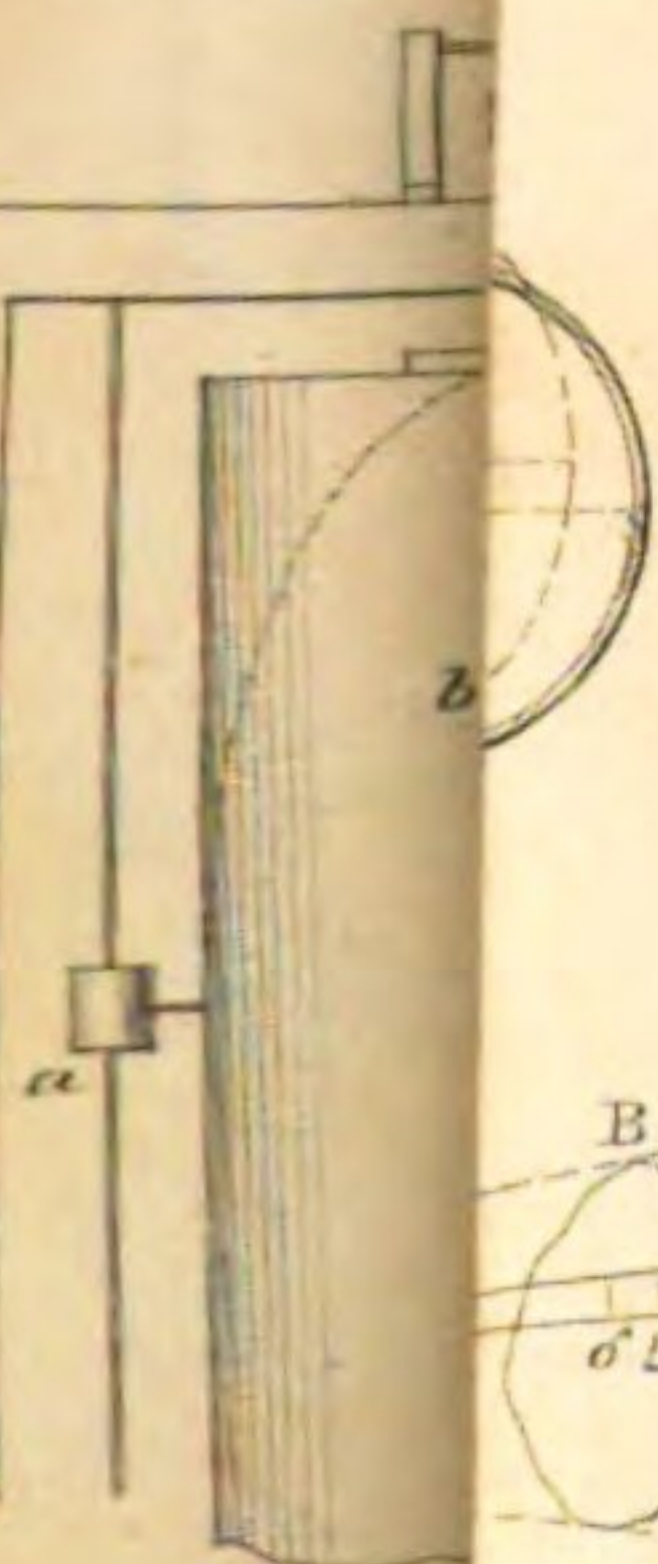


Fig. 64.

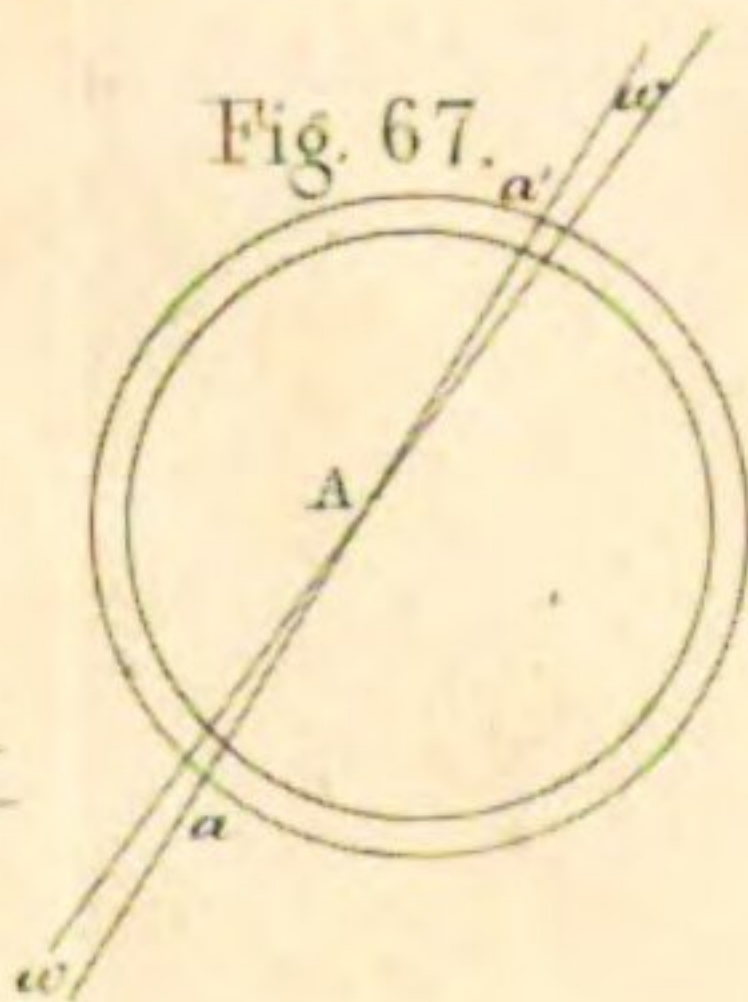


Fig. 67.

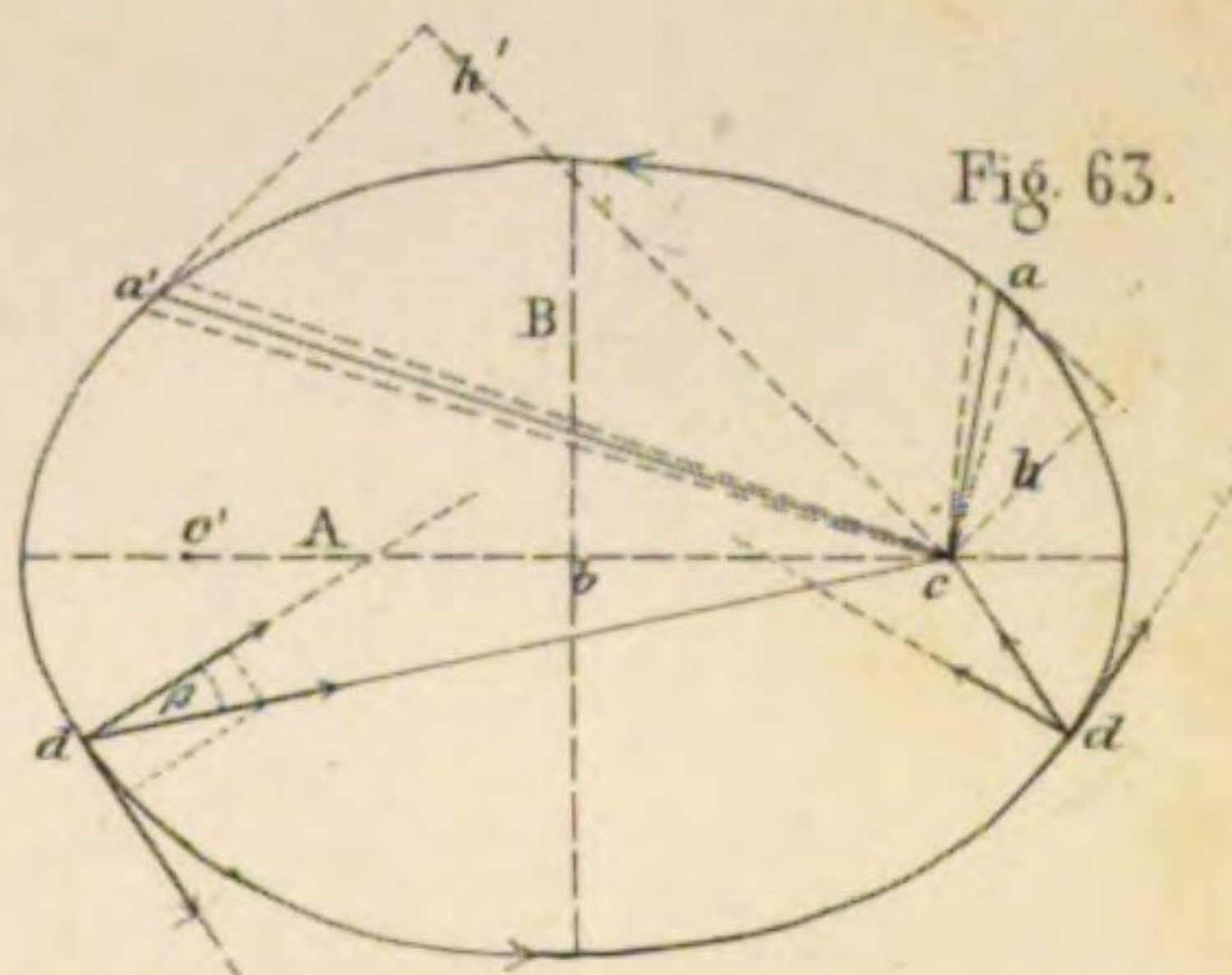
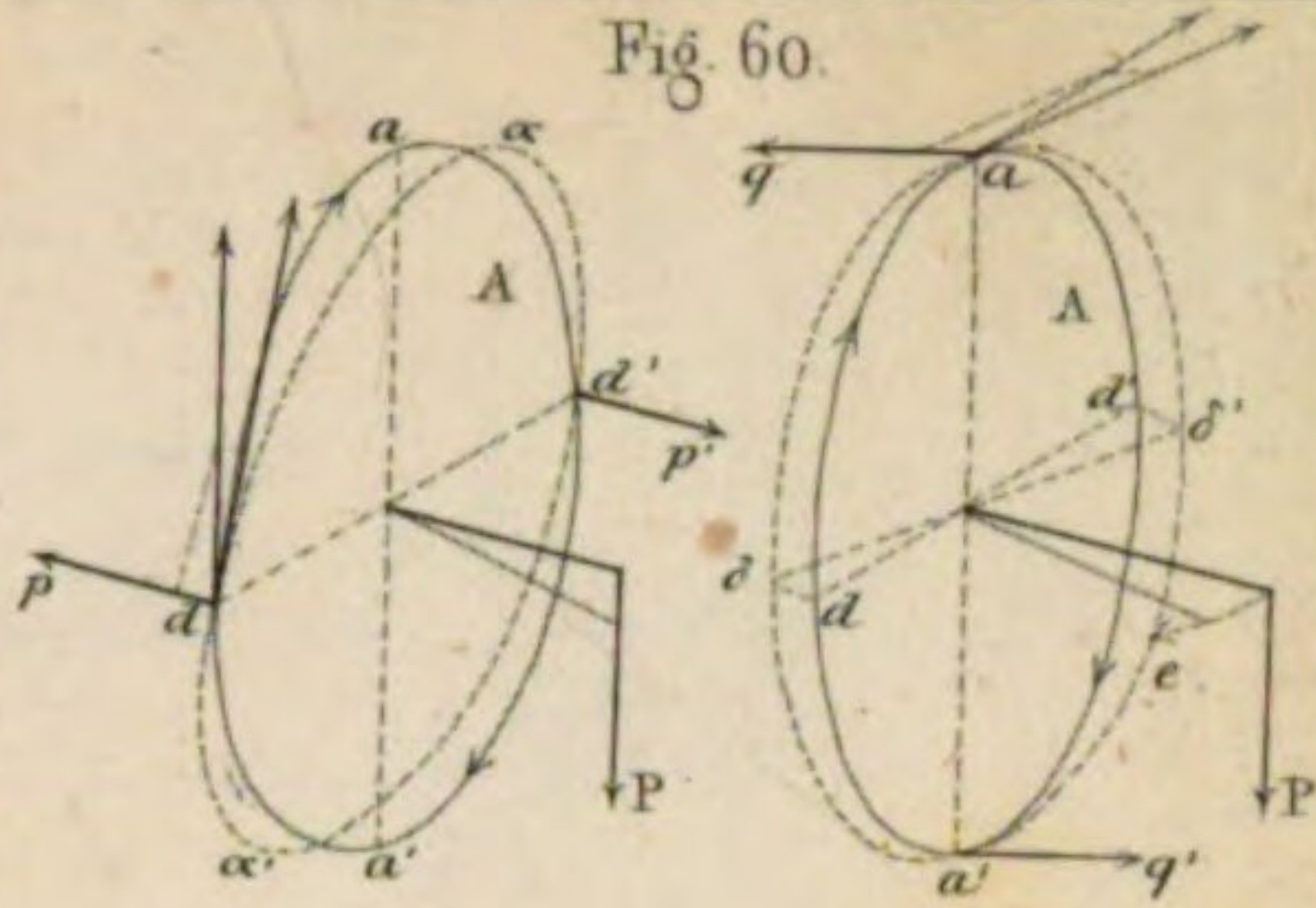


Fig. 68.

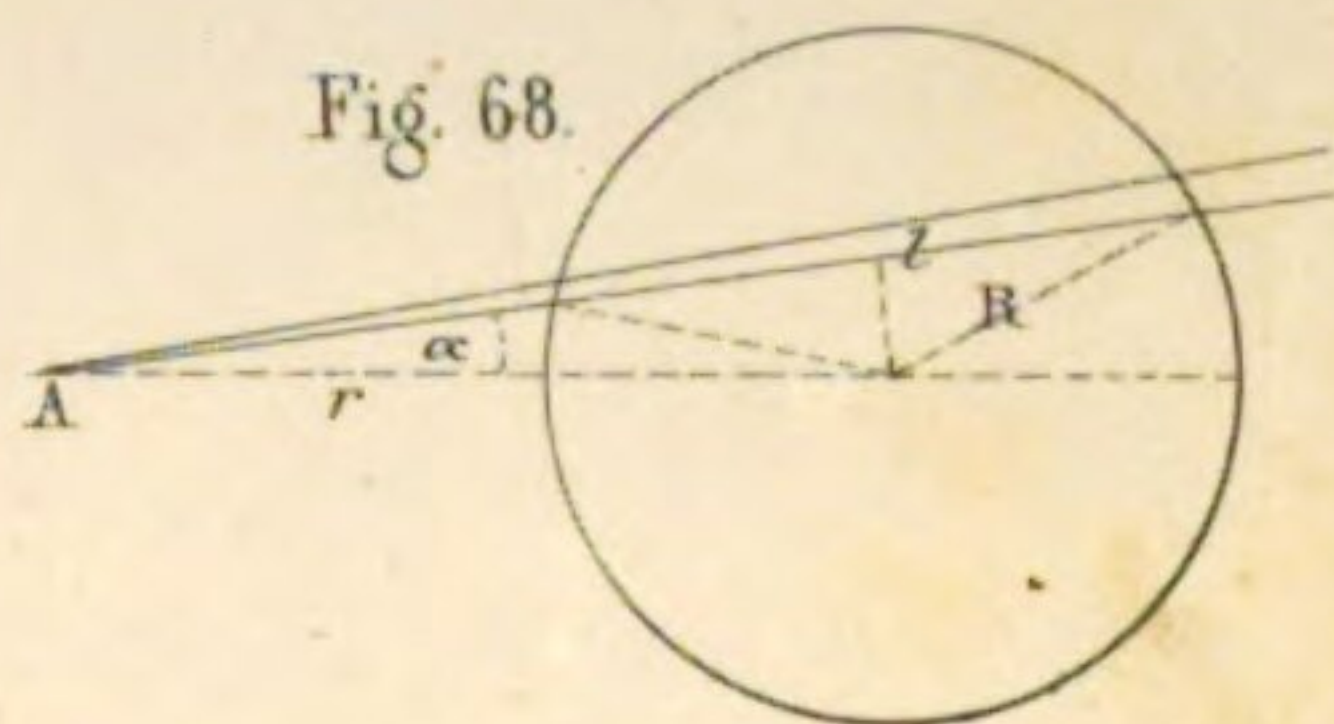
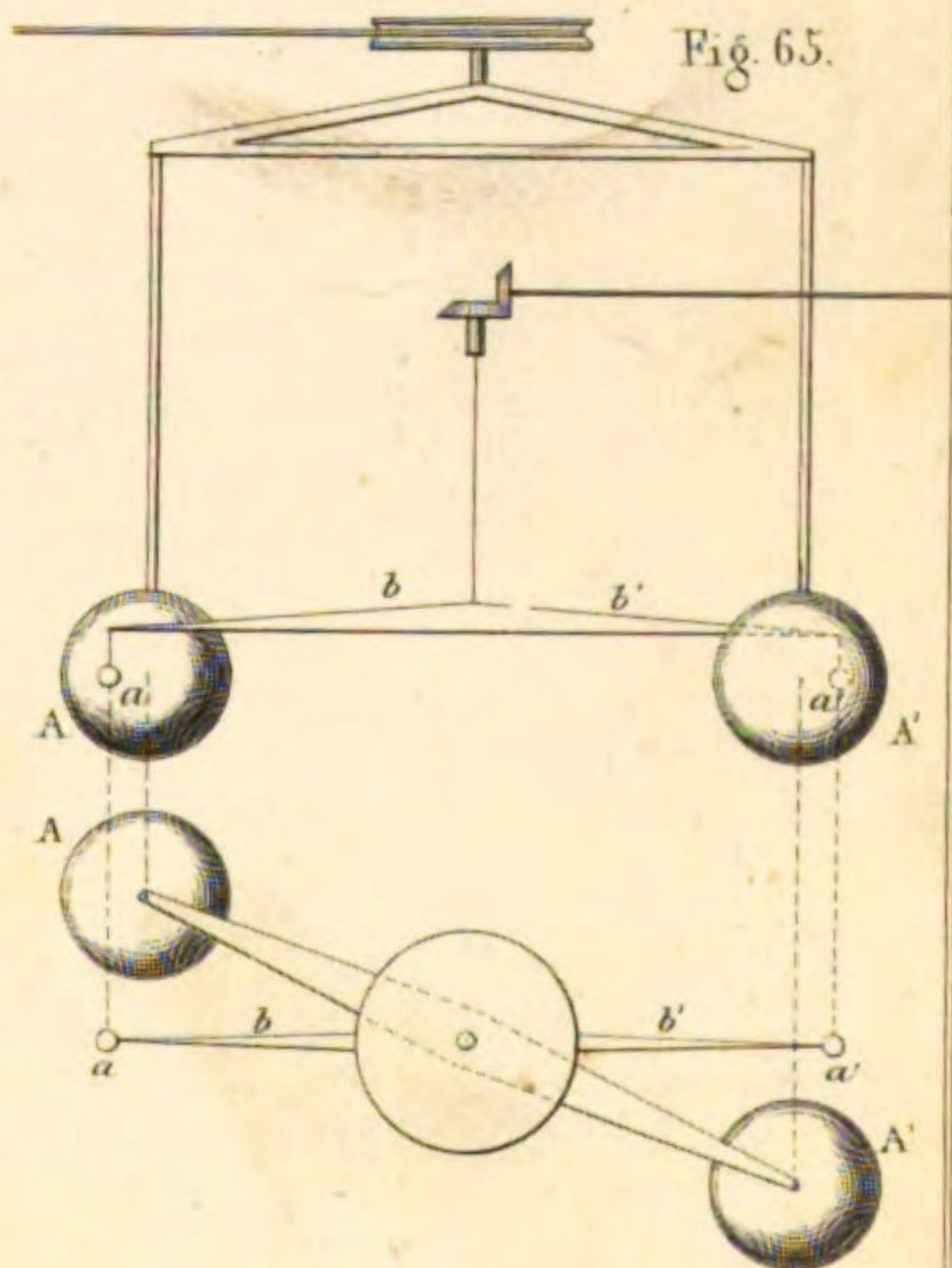
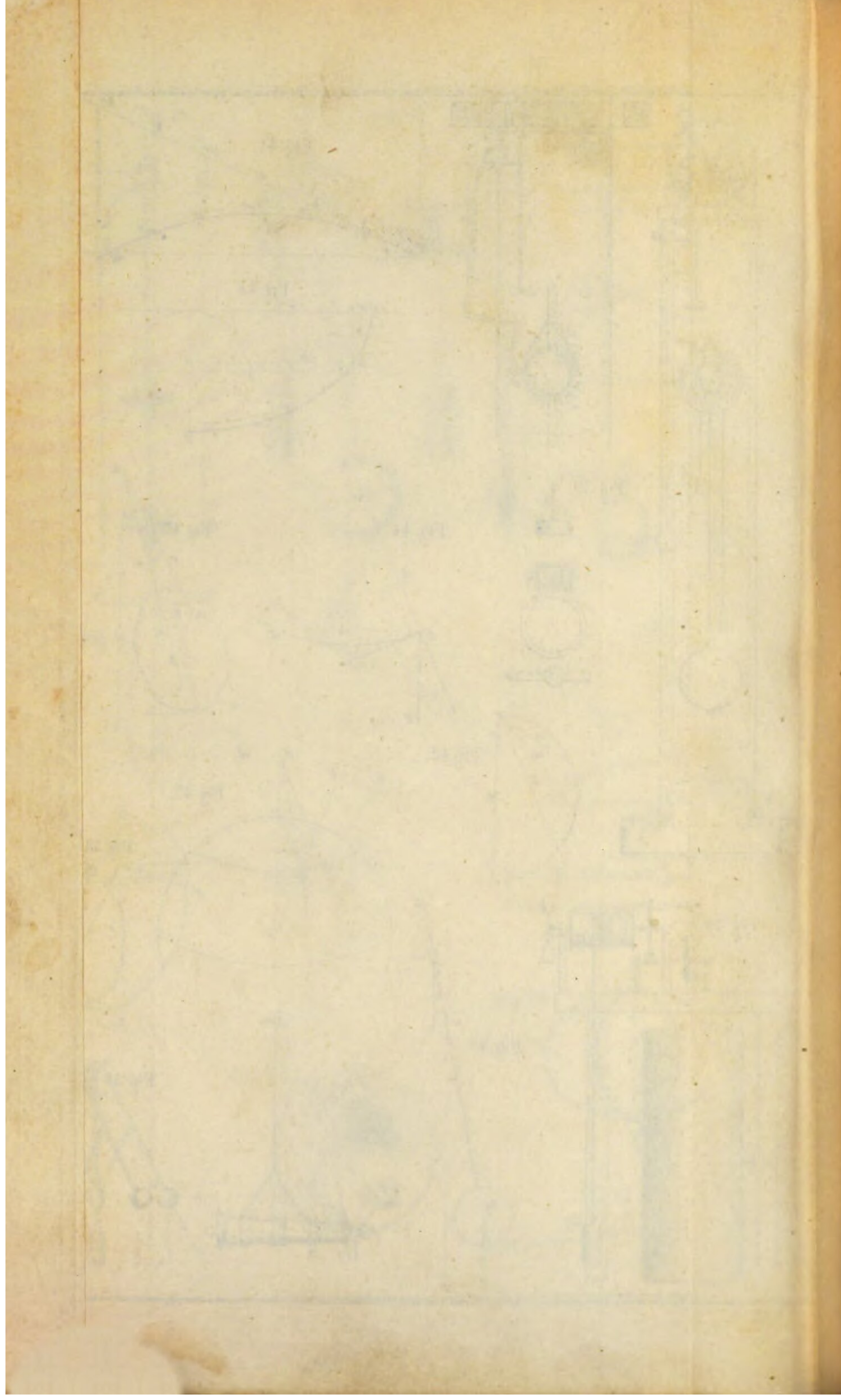


Fig. 65.





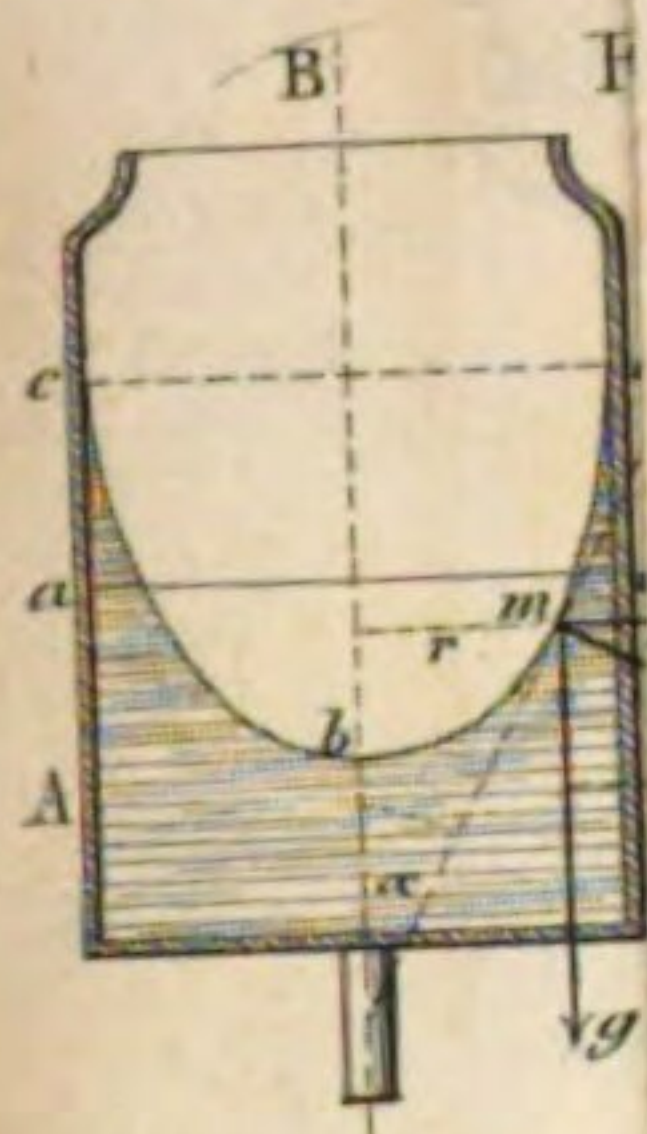
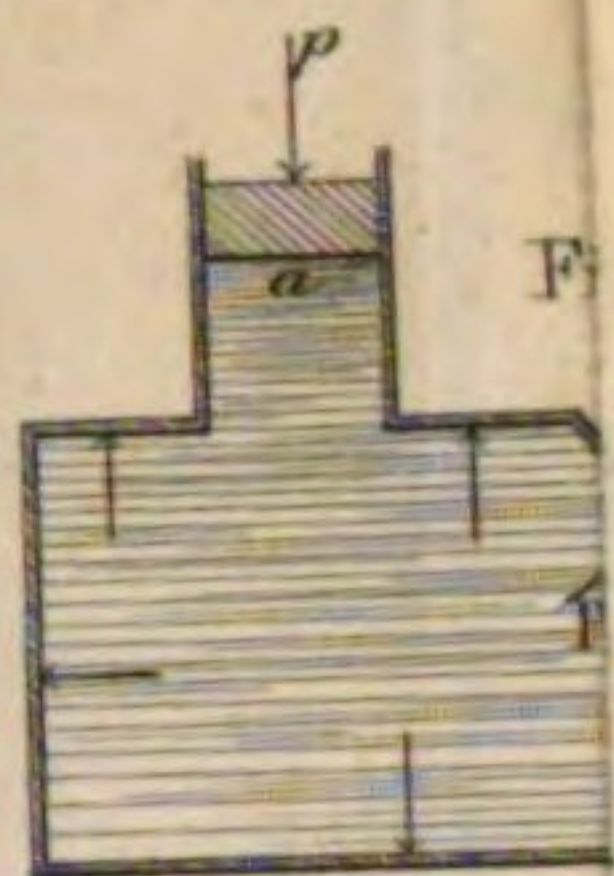


Fig. 72.

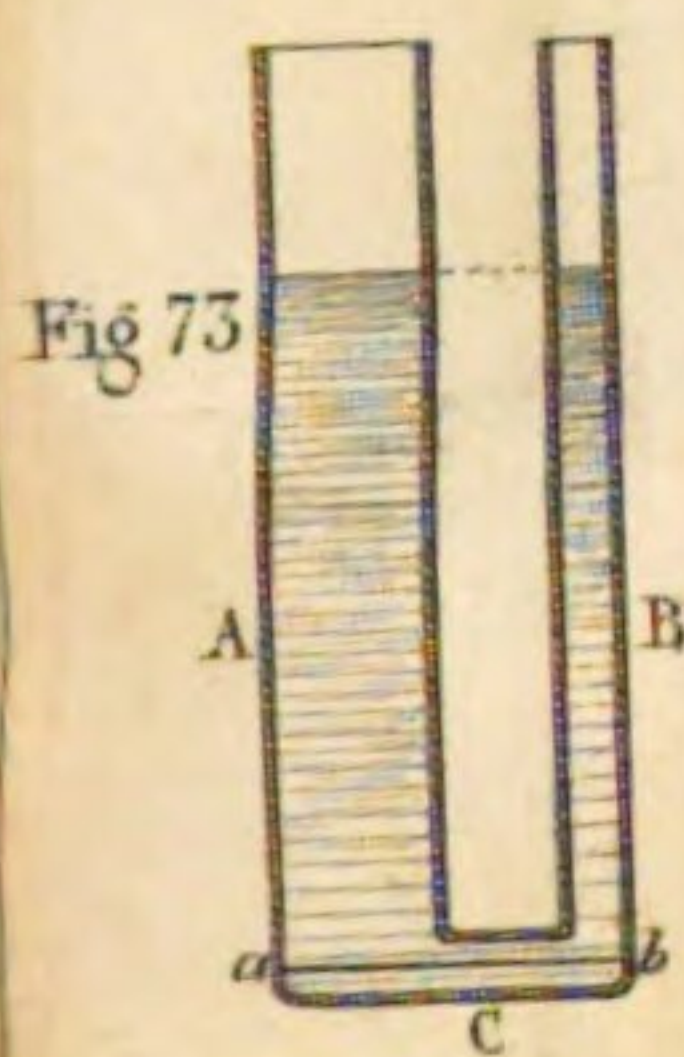
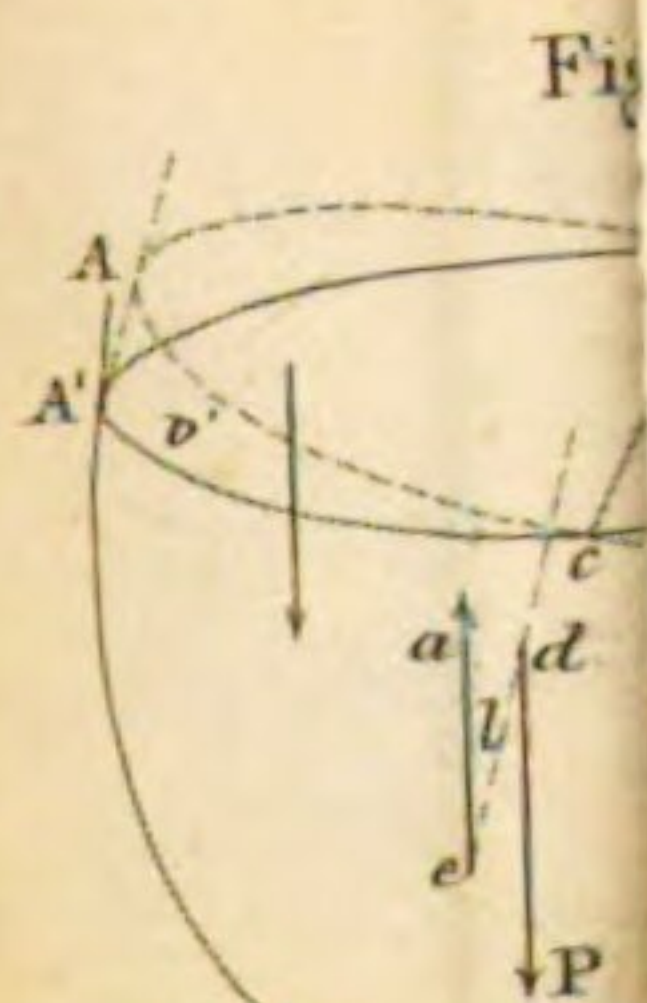
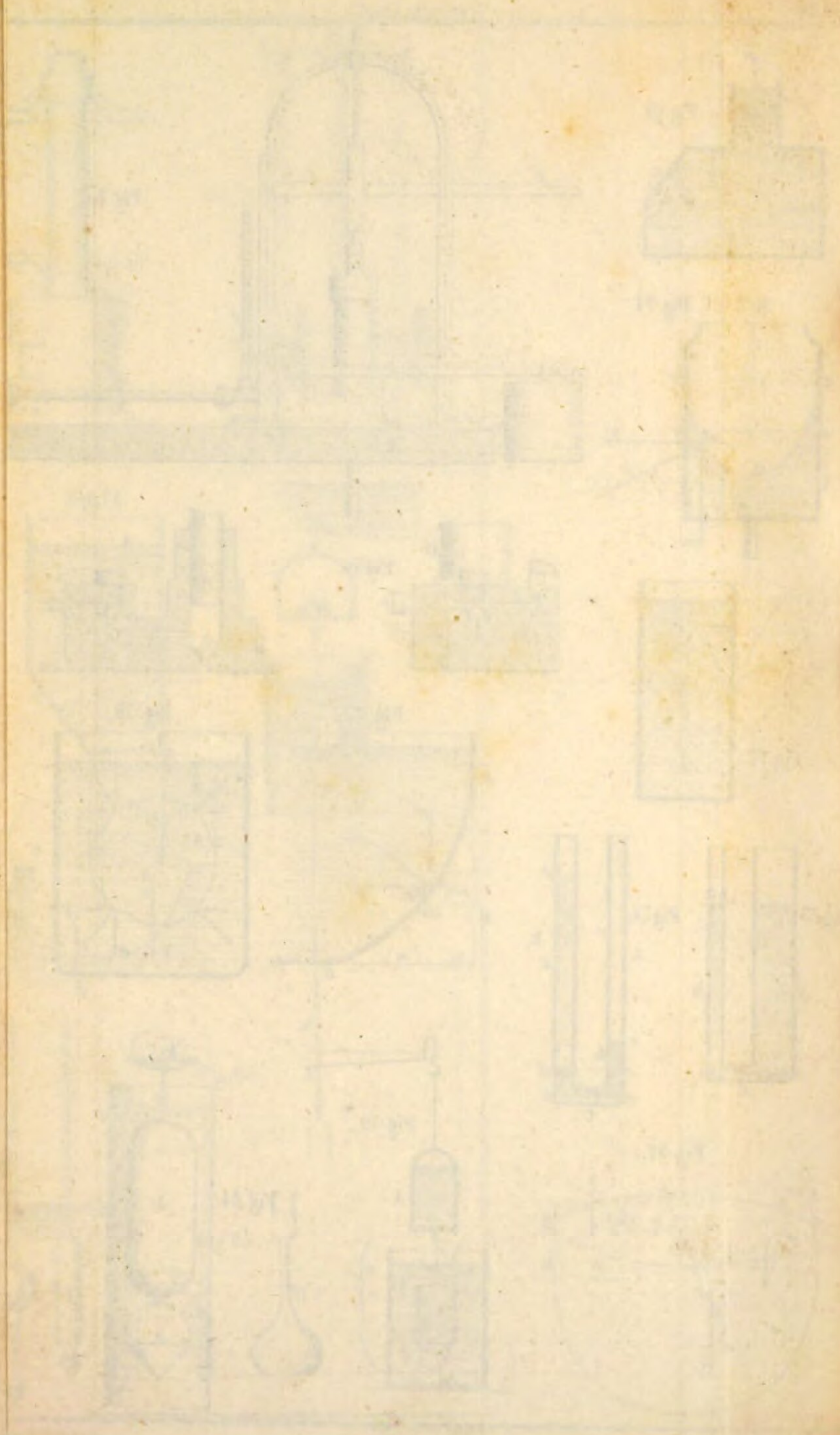


Fig 73



Fig



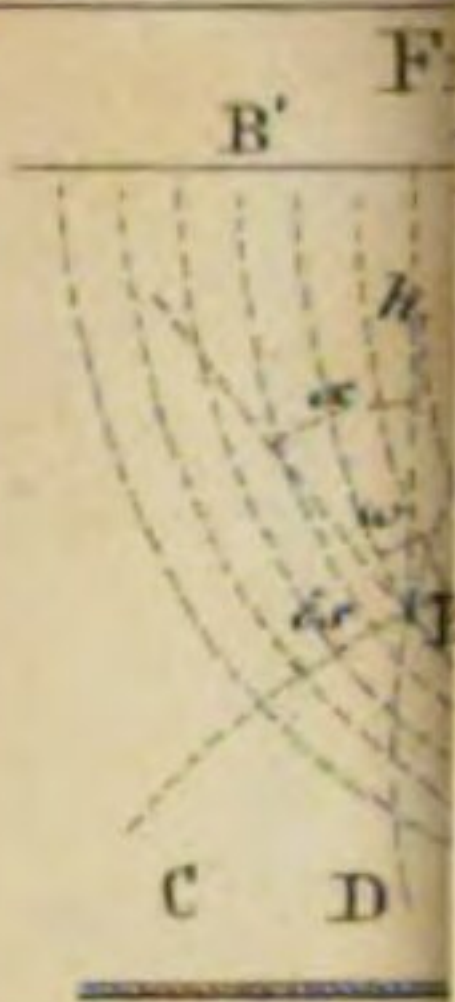


Fig. 102.

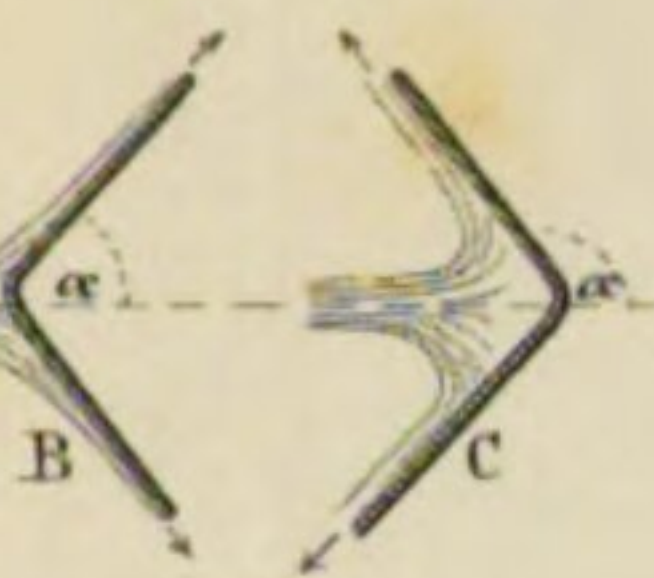


Fig. 103.

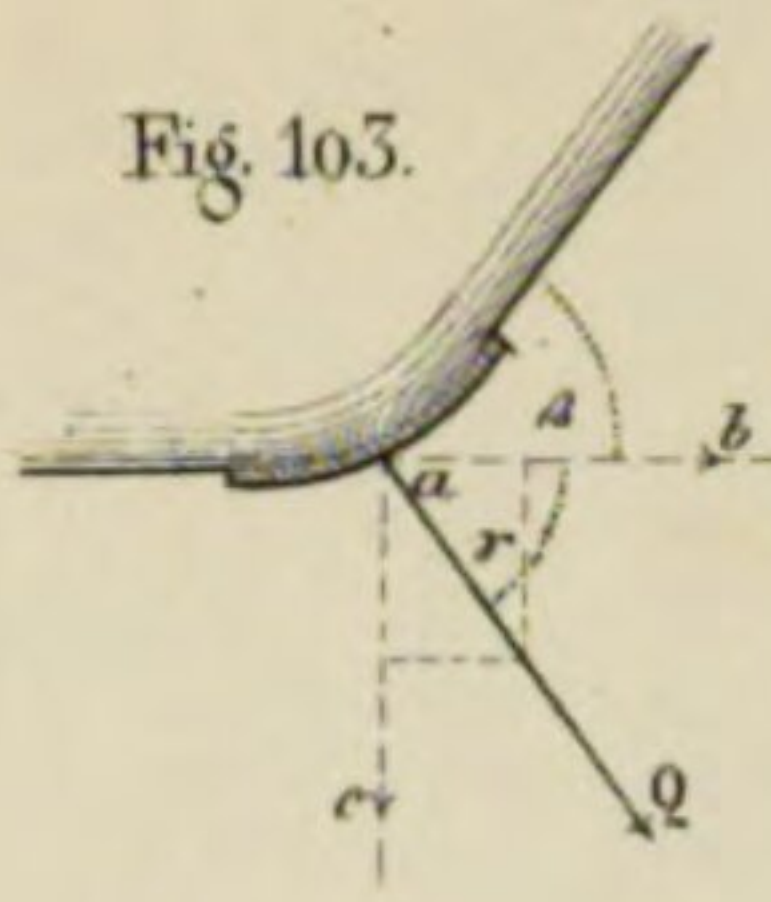
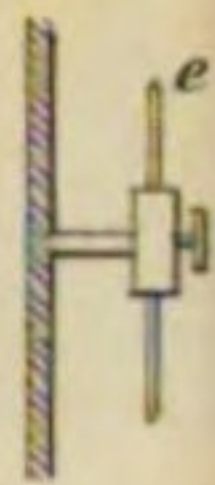
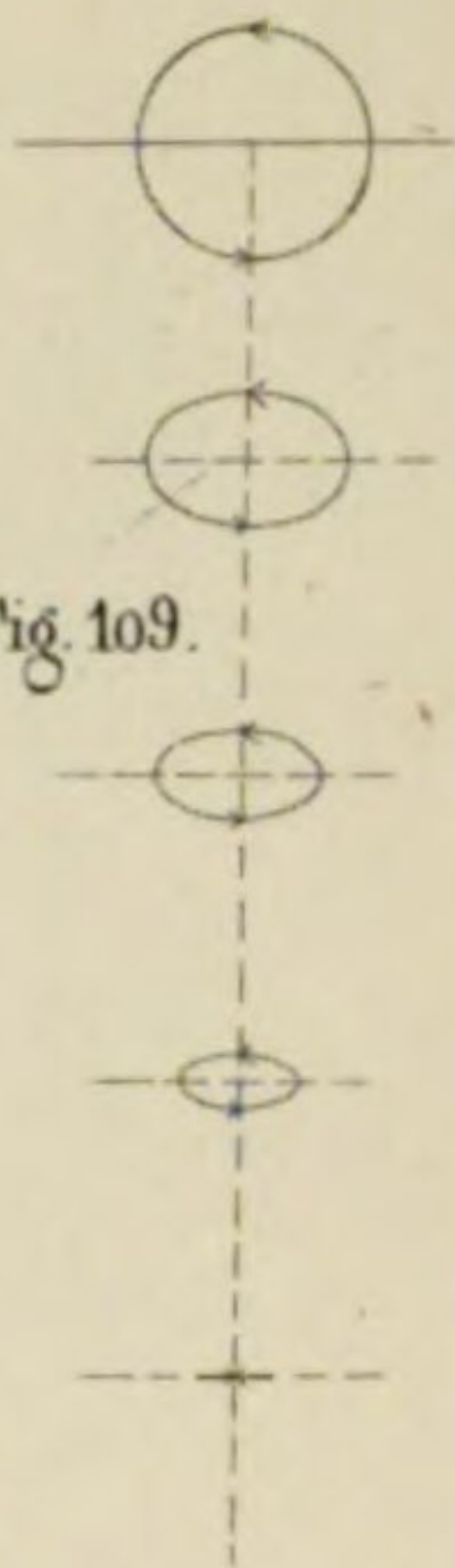


Fig. 109.



105.

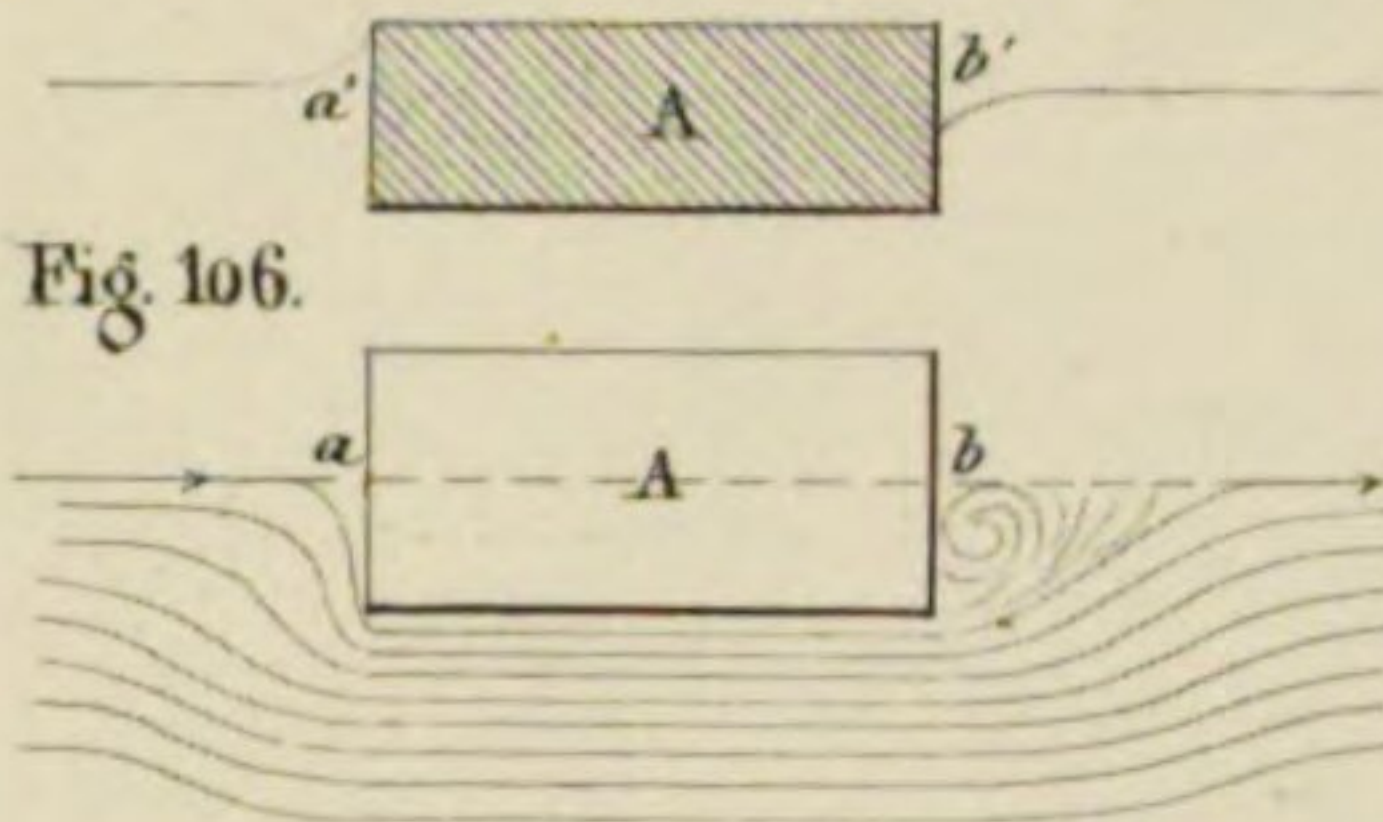


Fig. 106.

Fig. 114.

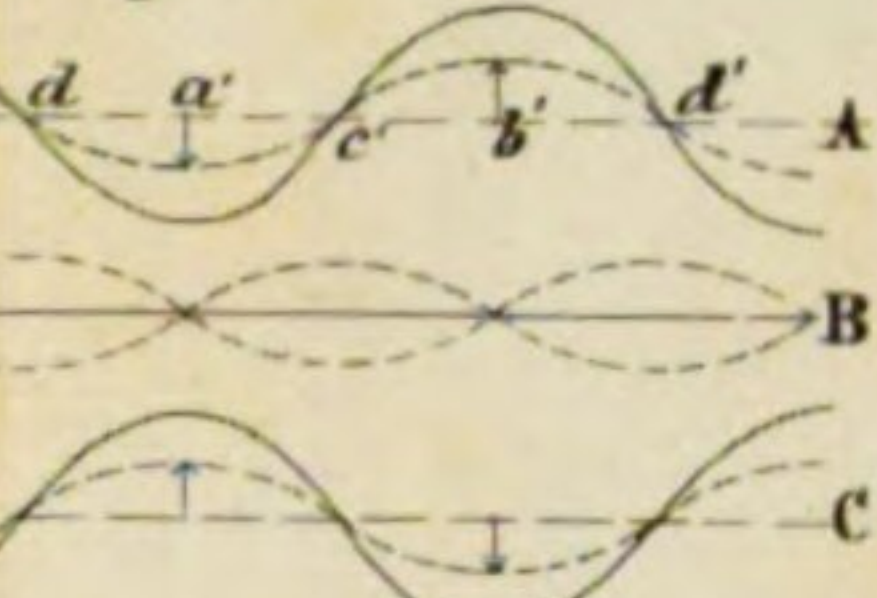


Fig. 115.

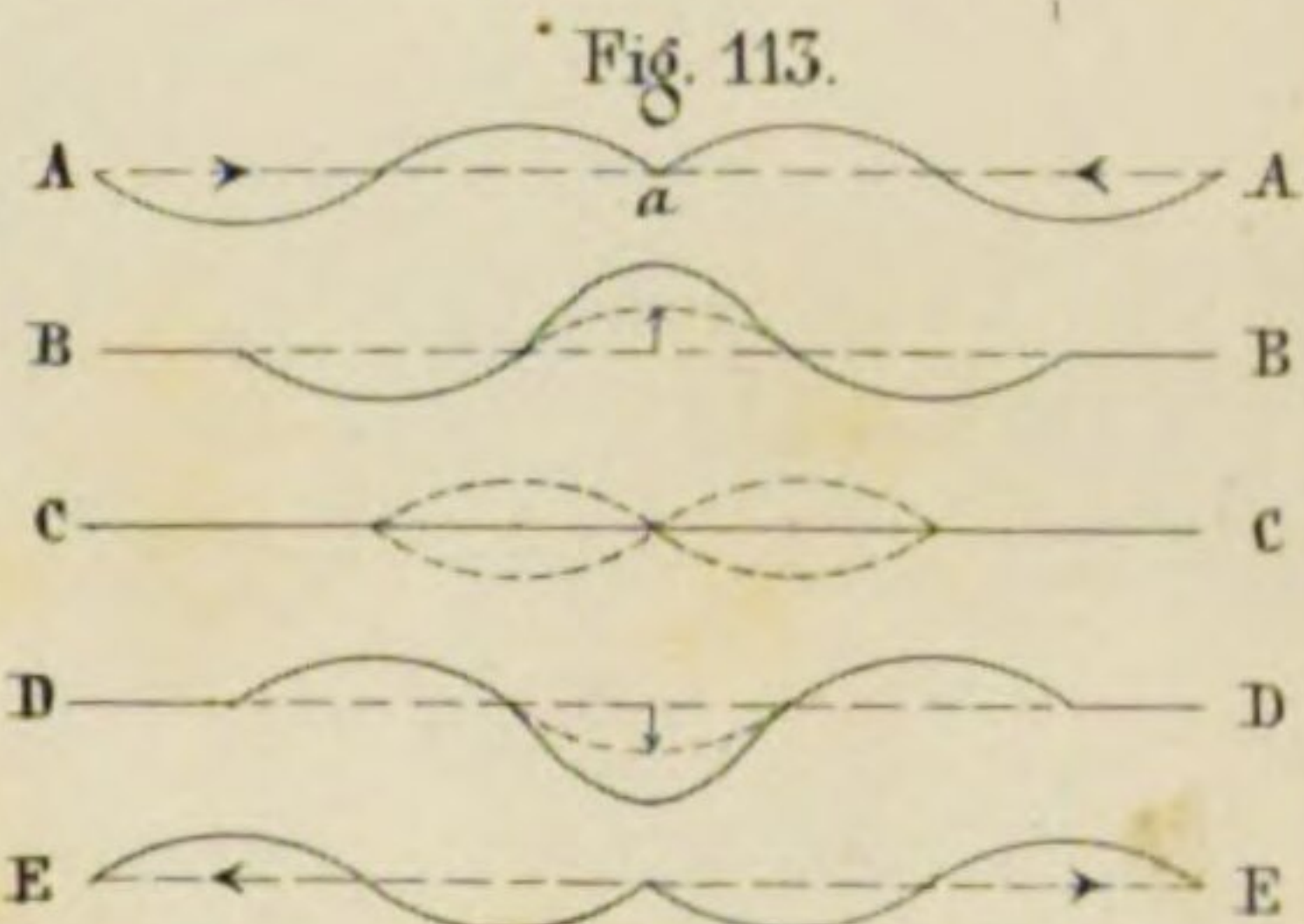
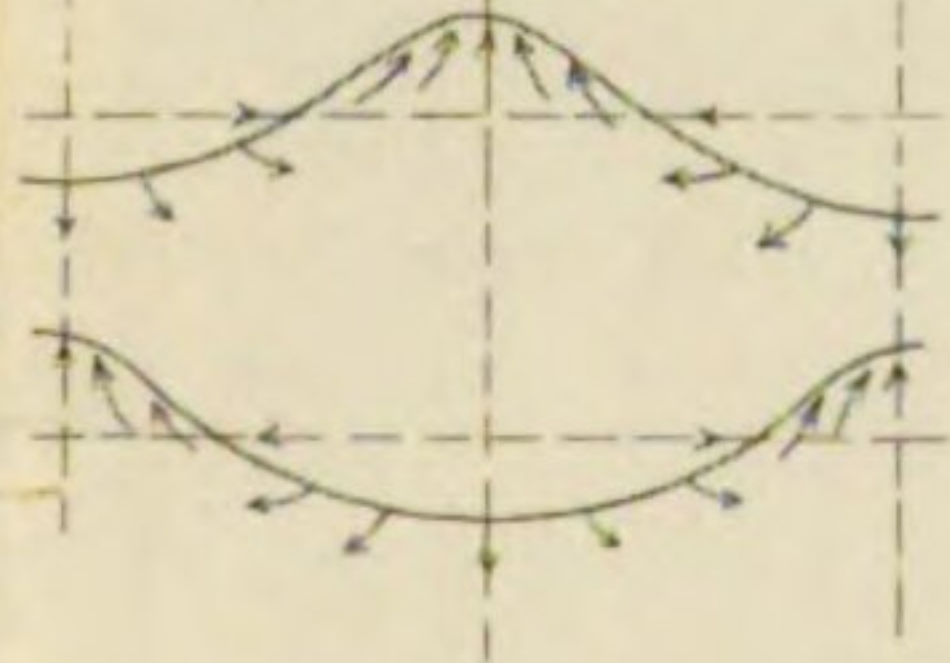


Fig. 113.

Fig. 116.

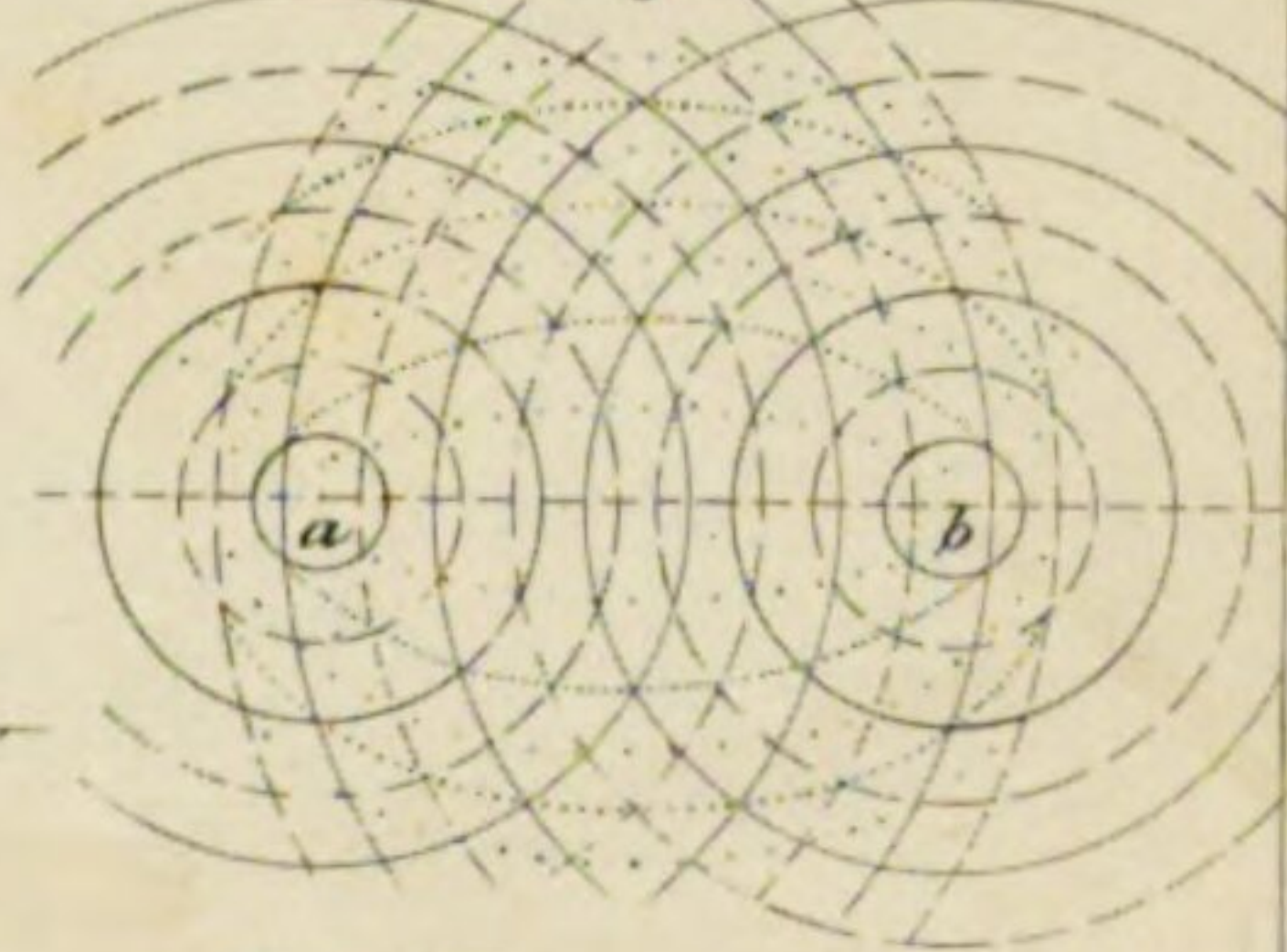


Fig. 117.

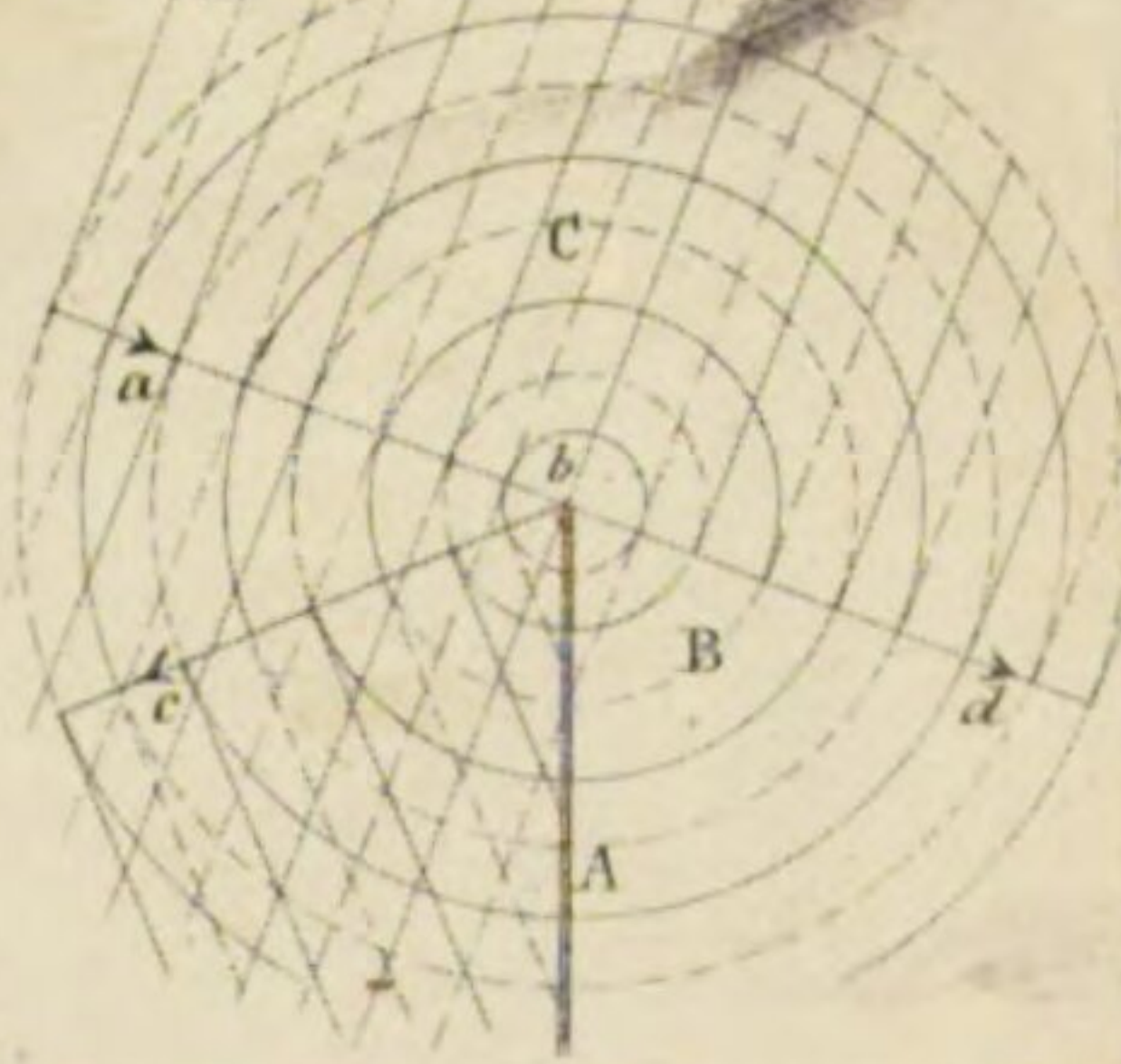
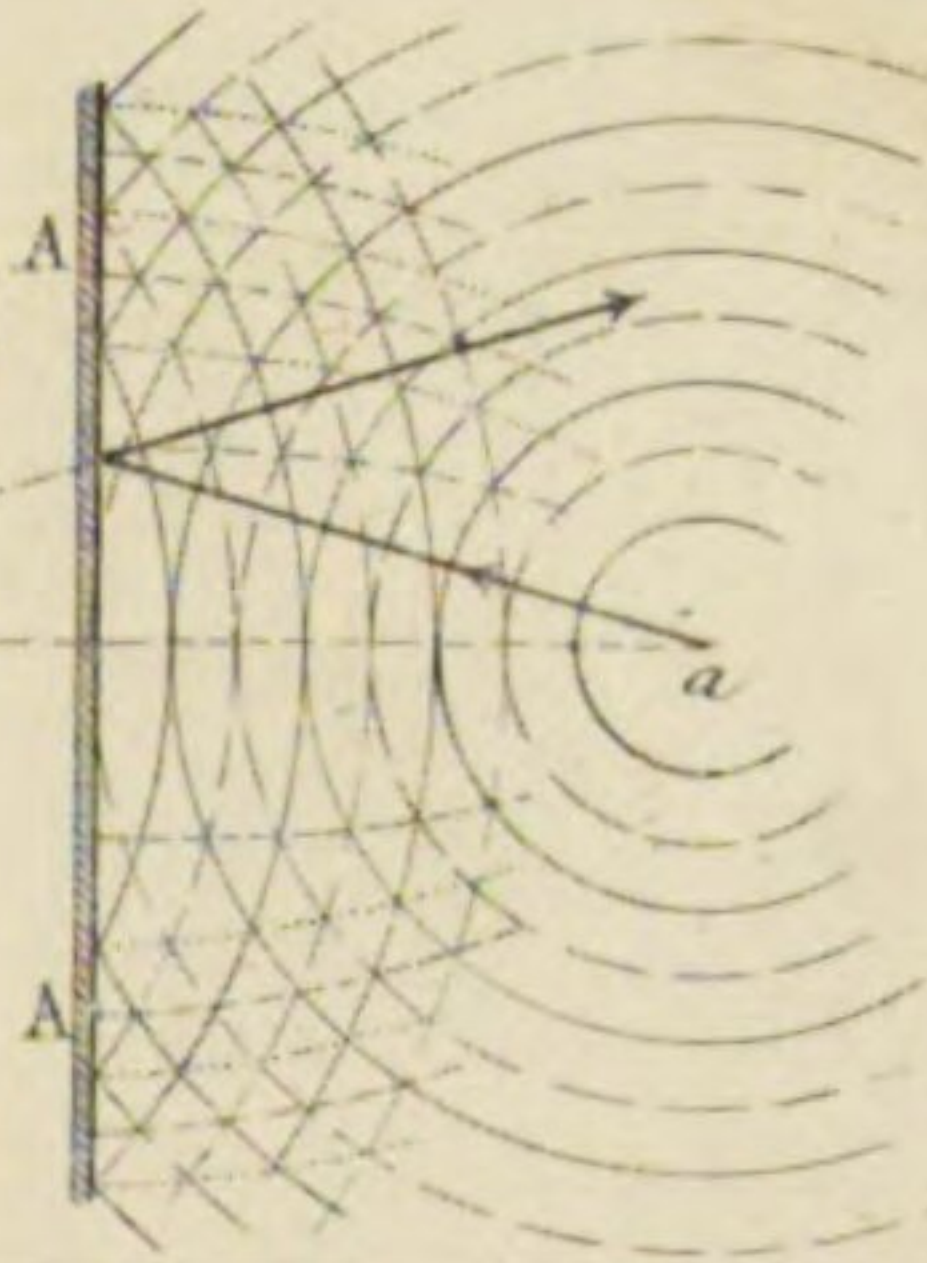
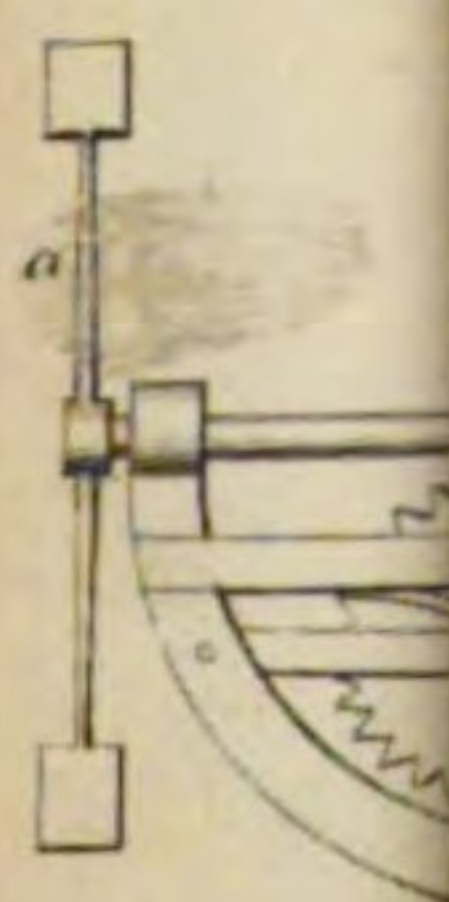
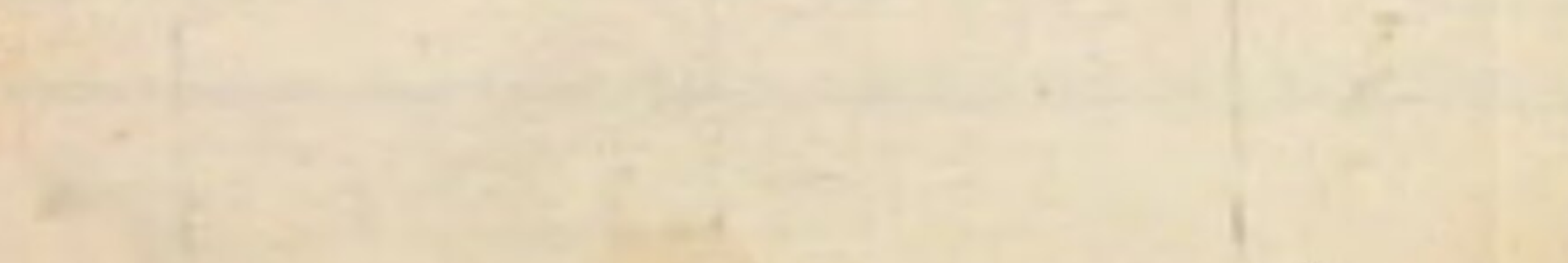
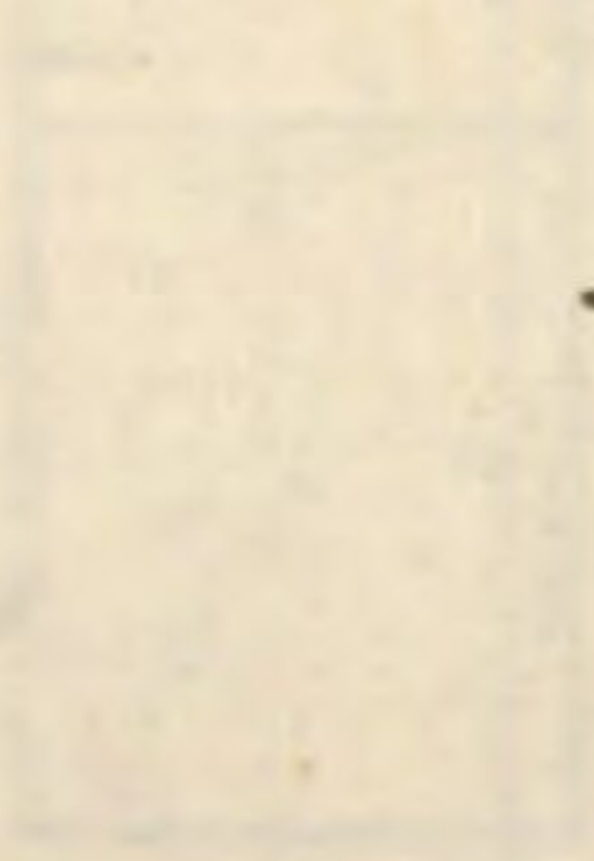
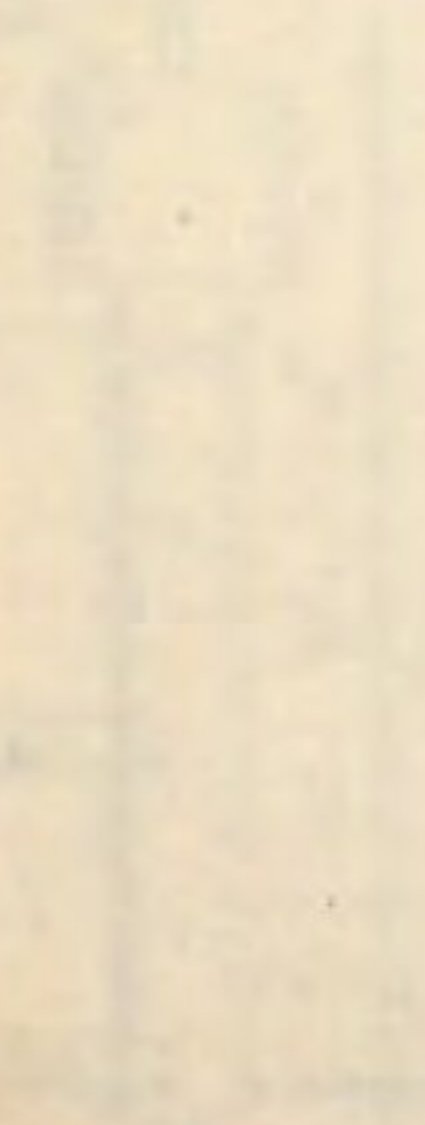
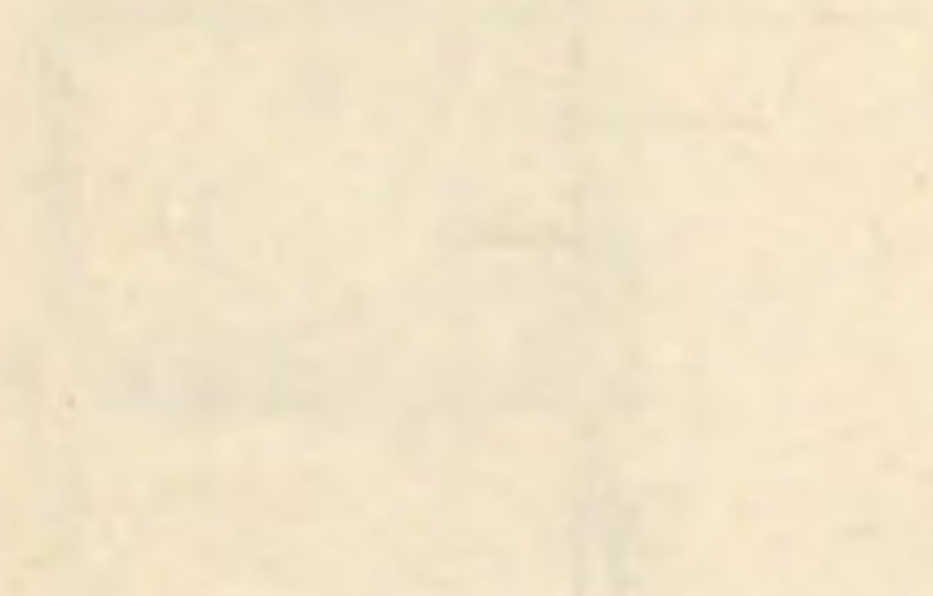
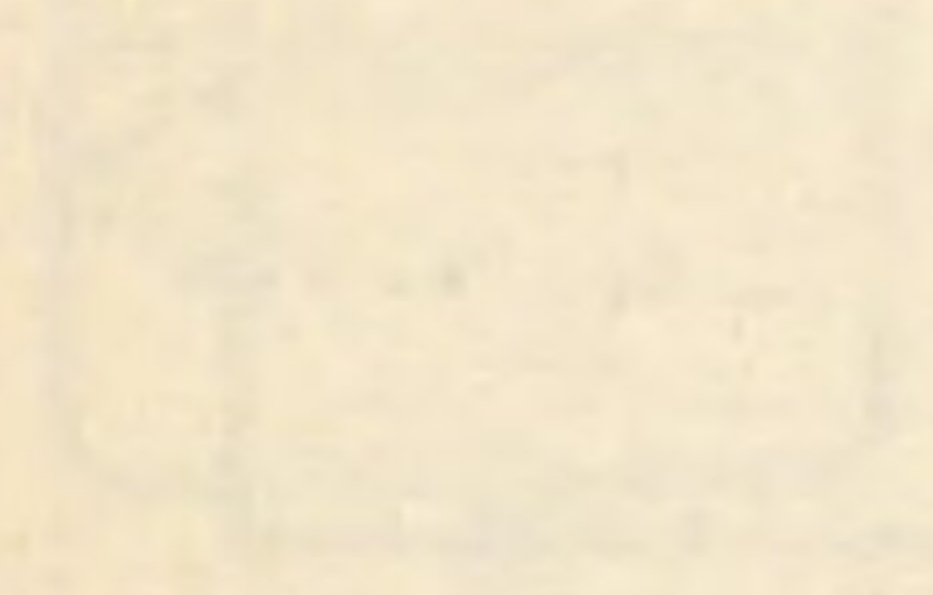
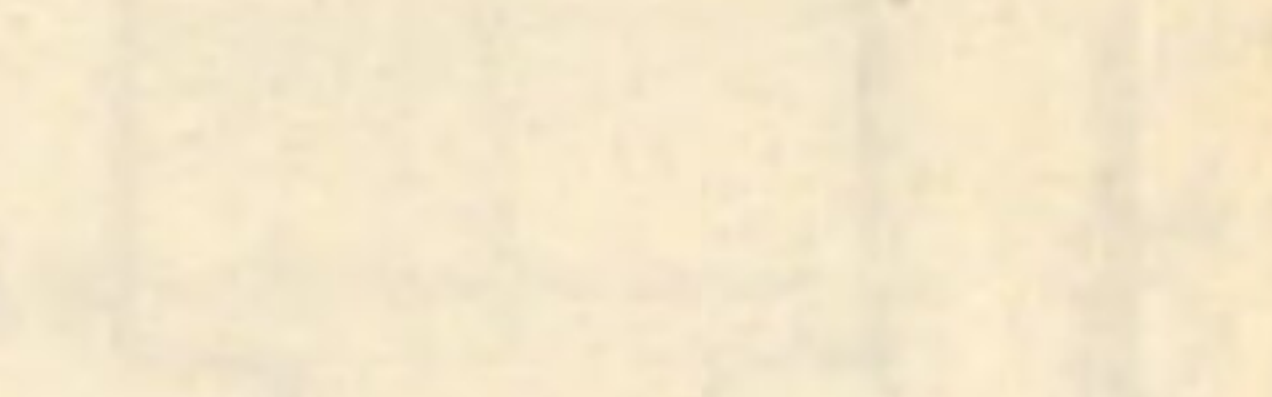
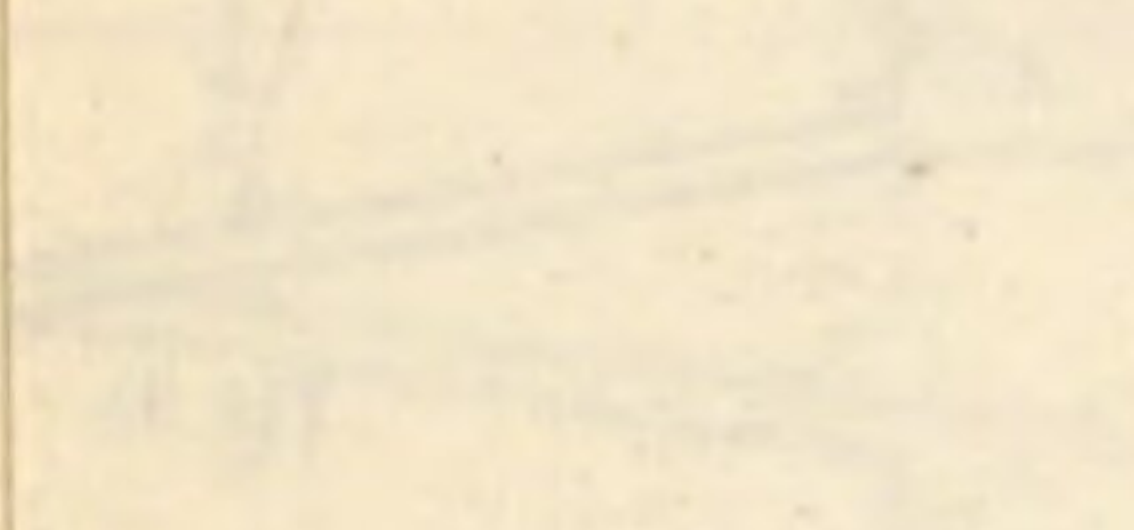
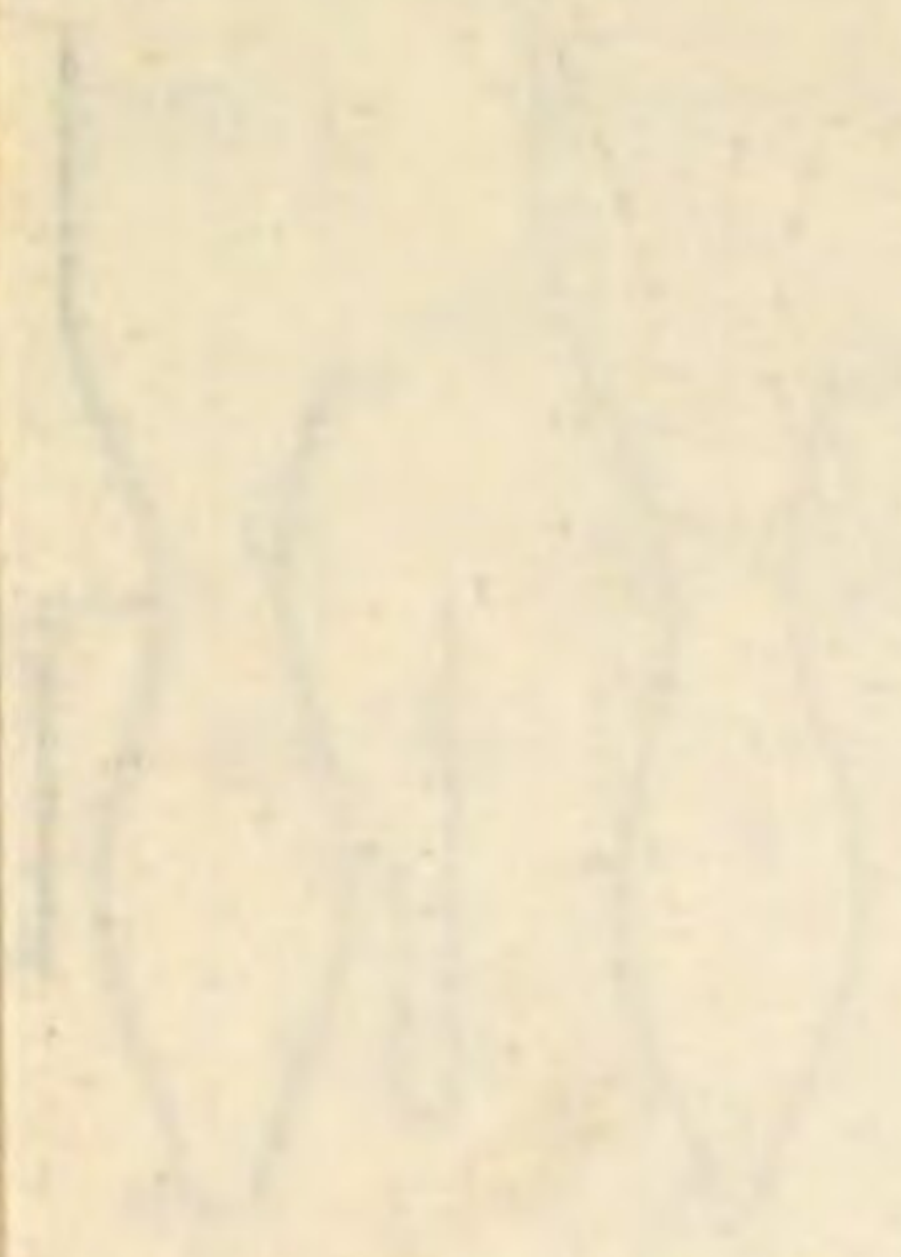


Fig. 112.





Taf. VI.

Fig. 118.

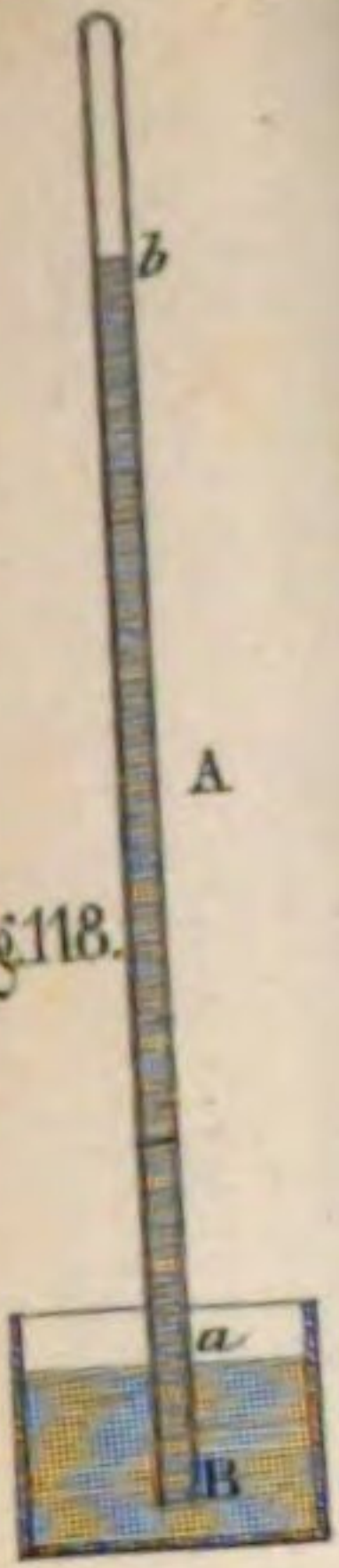


Fig. 121.



Fig. 123.



Fig. 136.

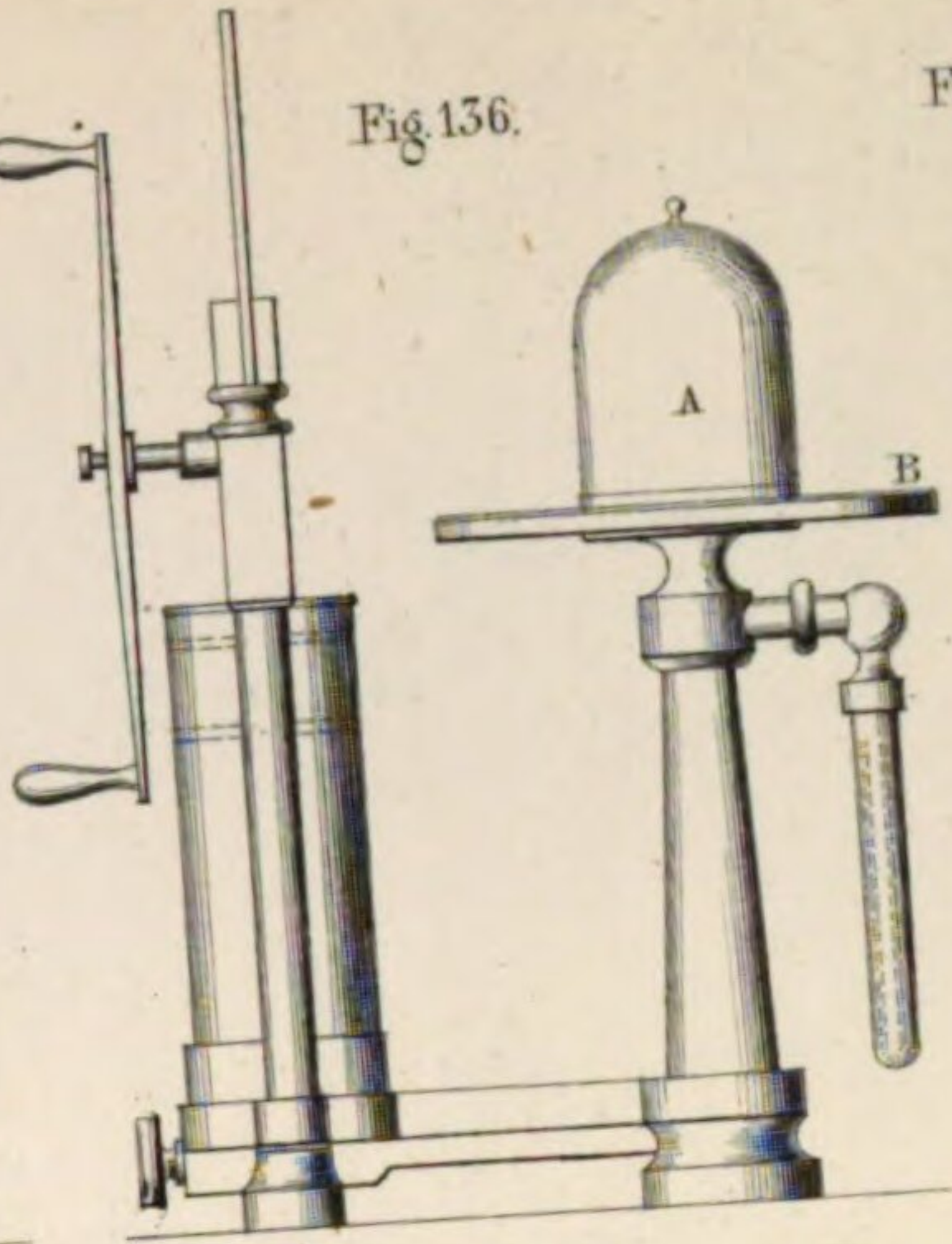


Fig. 142.

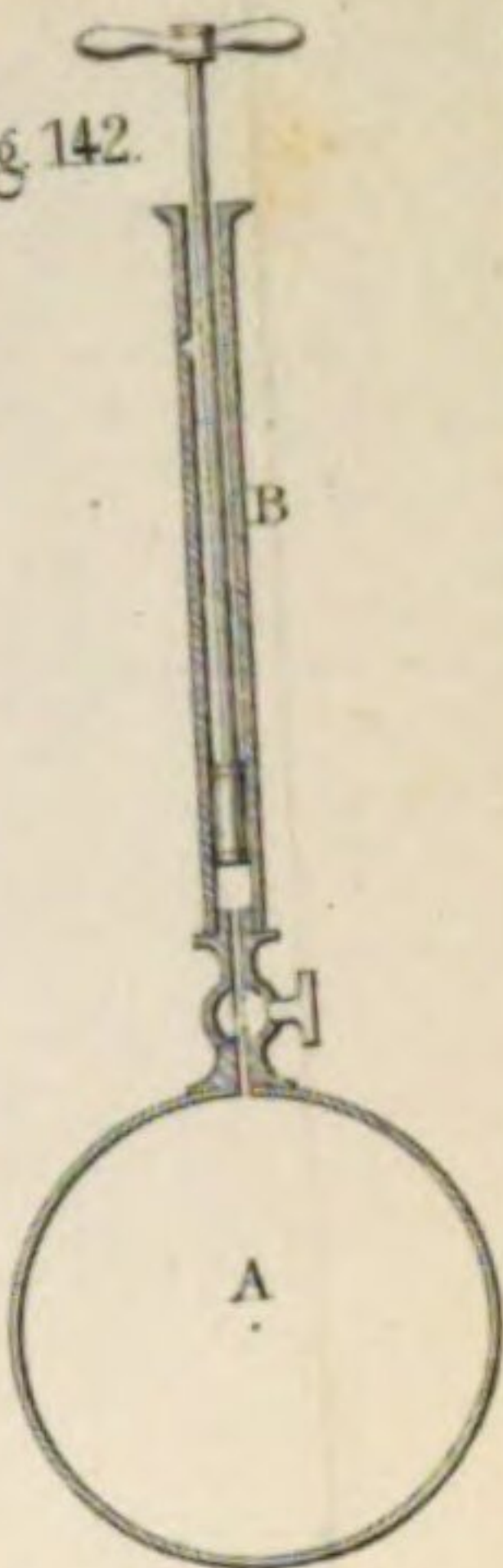


Fig. 137.

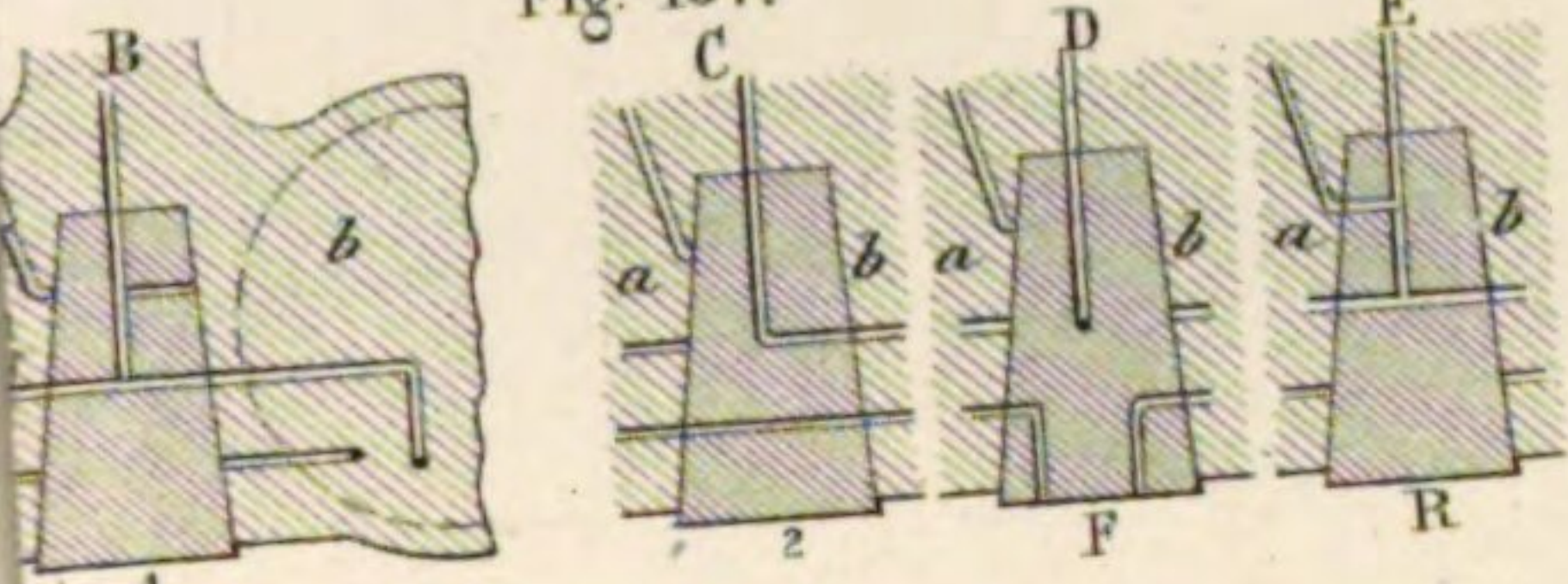


Fig. 138.

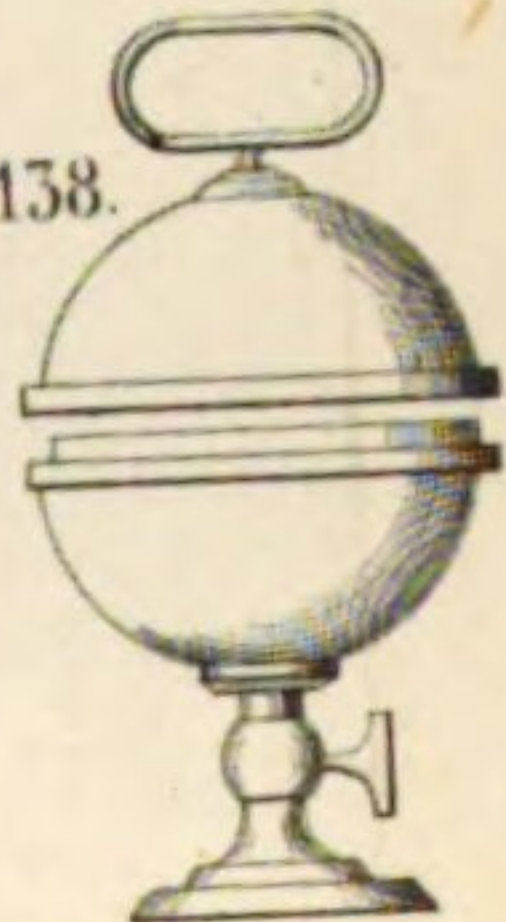


Fig. 144.

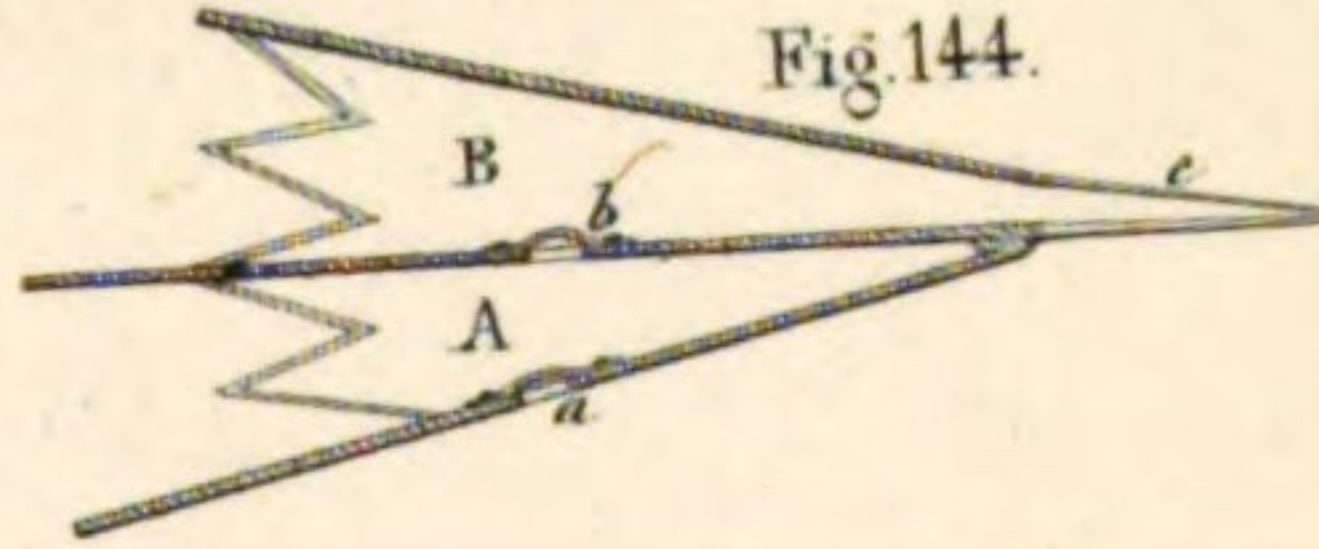


Fig. 146.

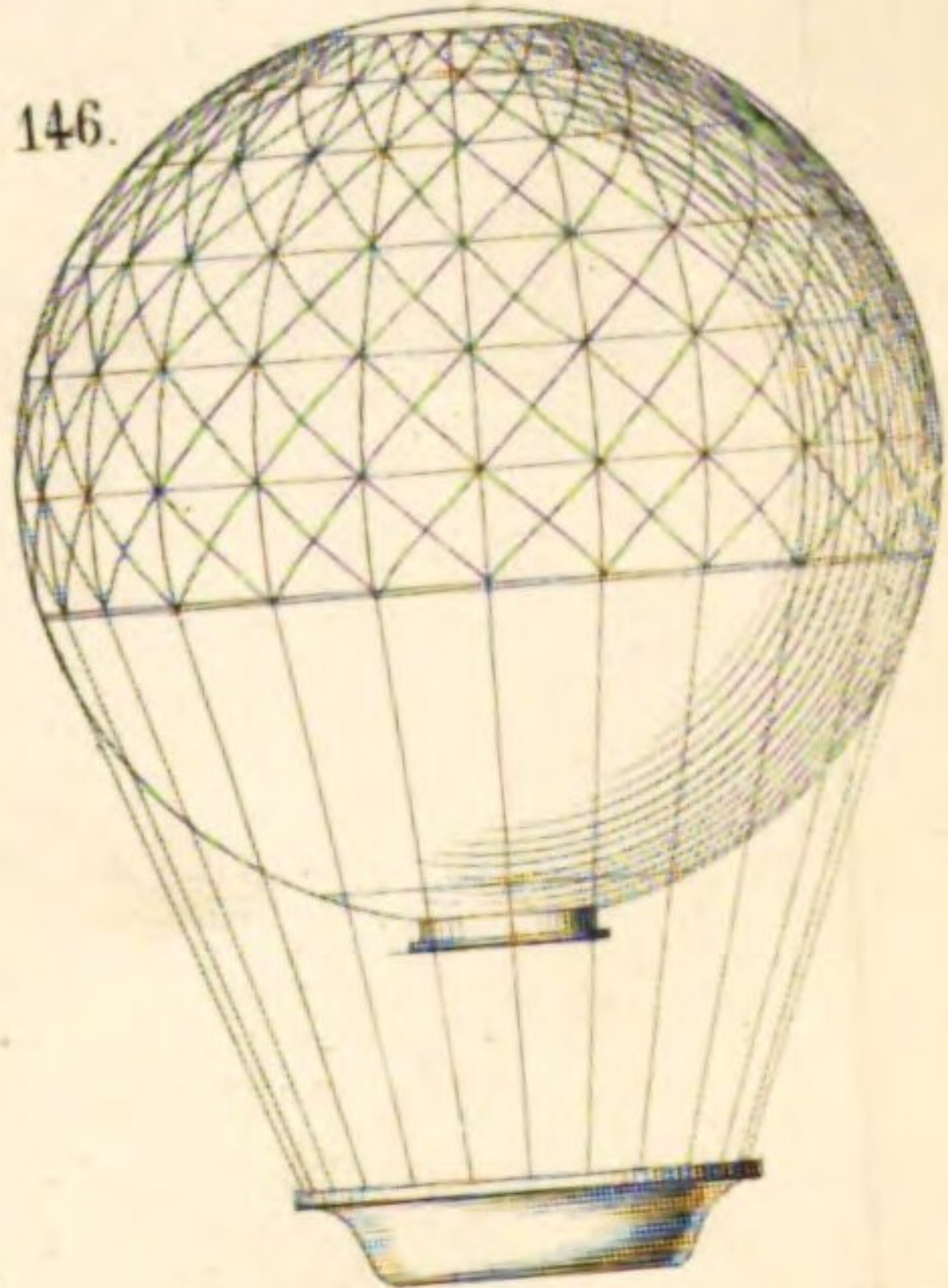


Fig. 145.

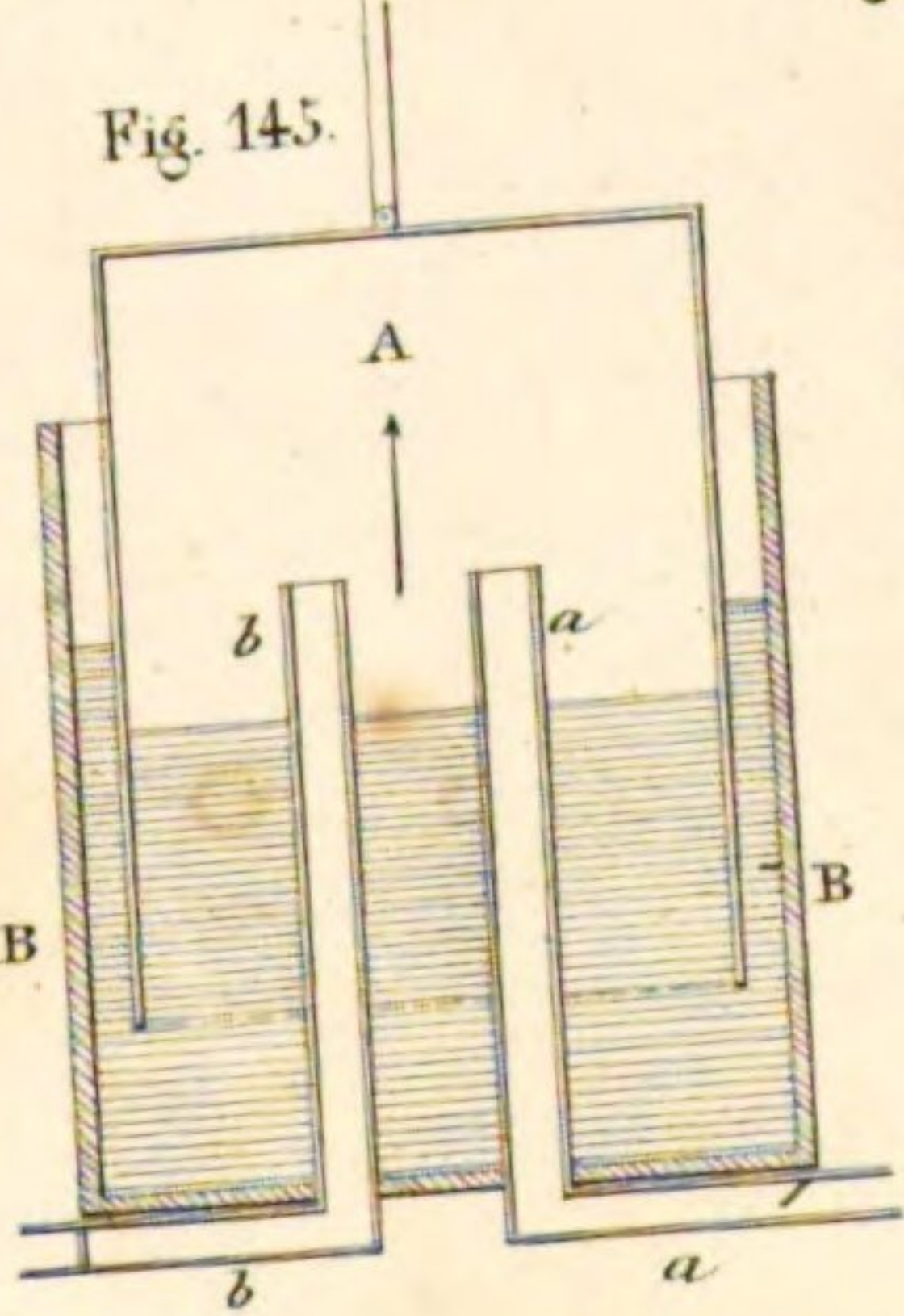


Fig. 147.

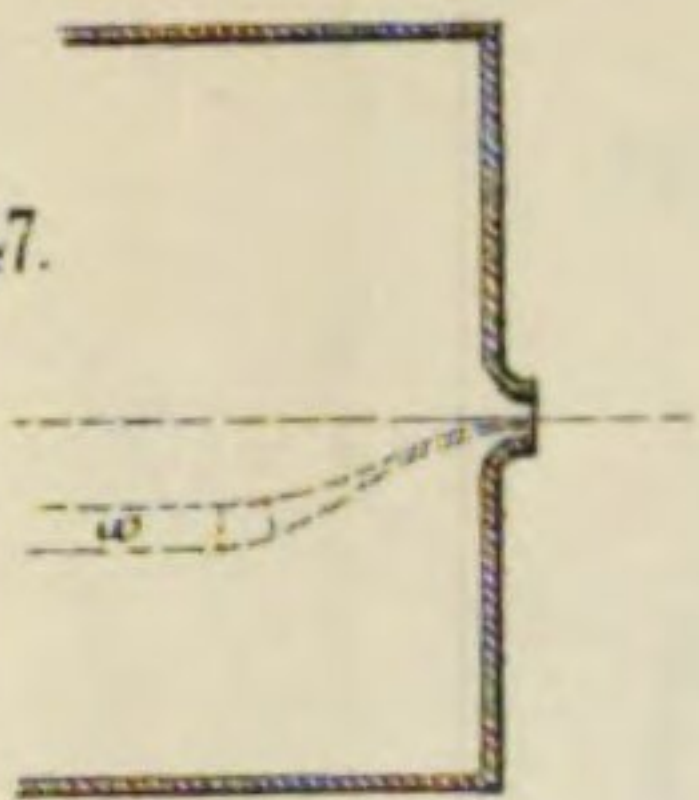


Fig. 148.

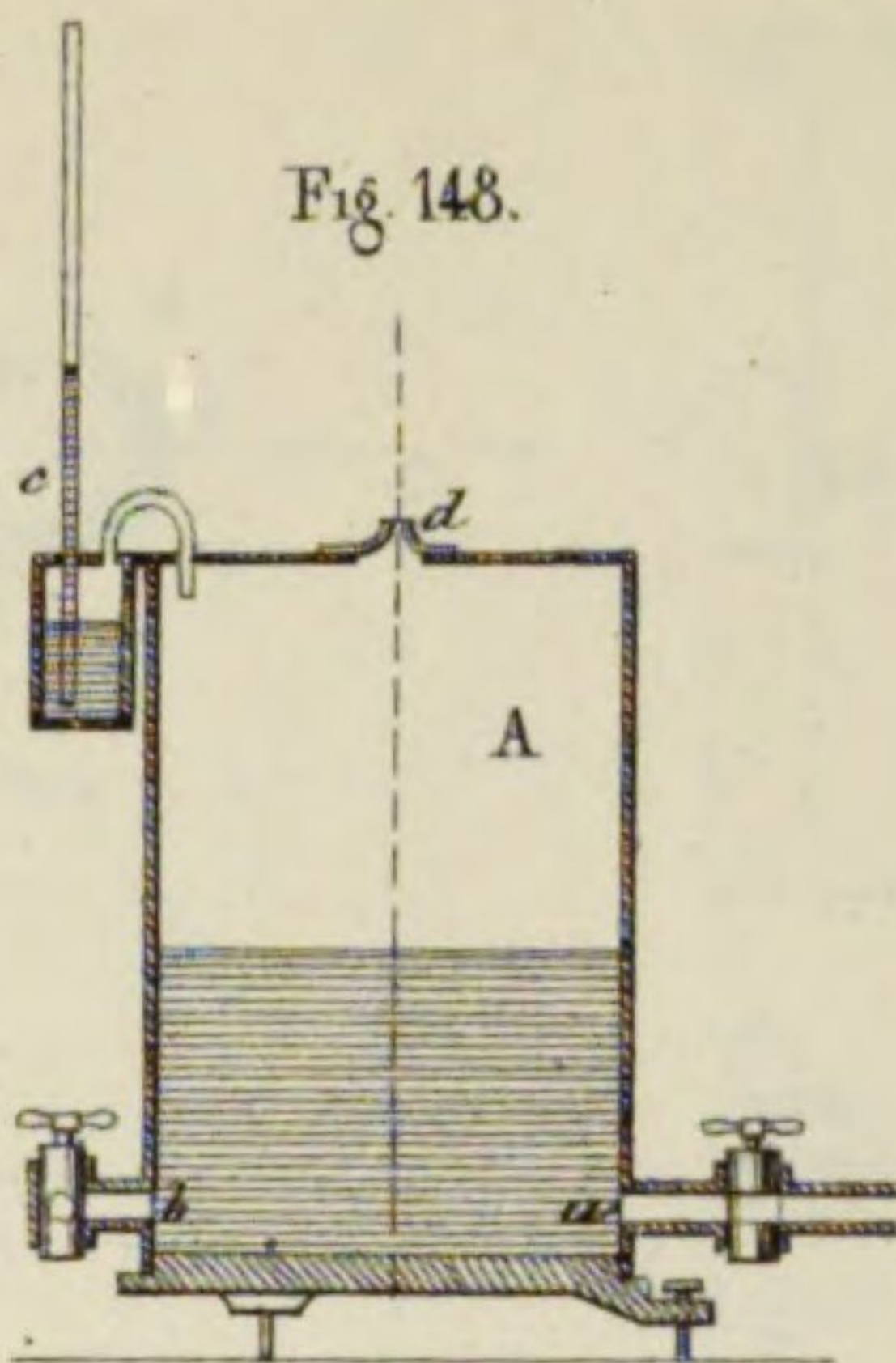


Fig. 150.

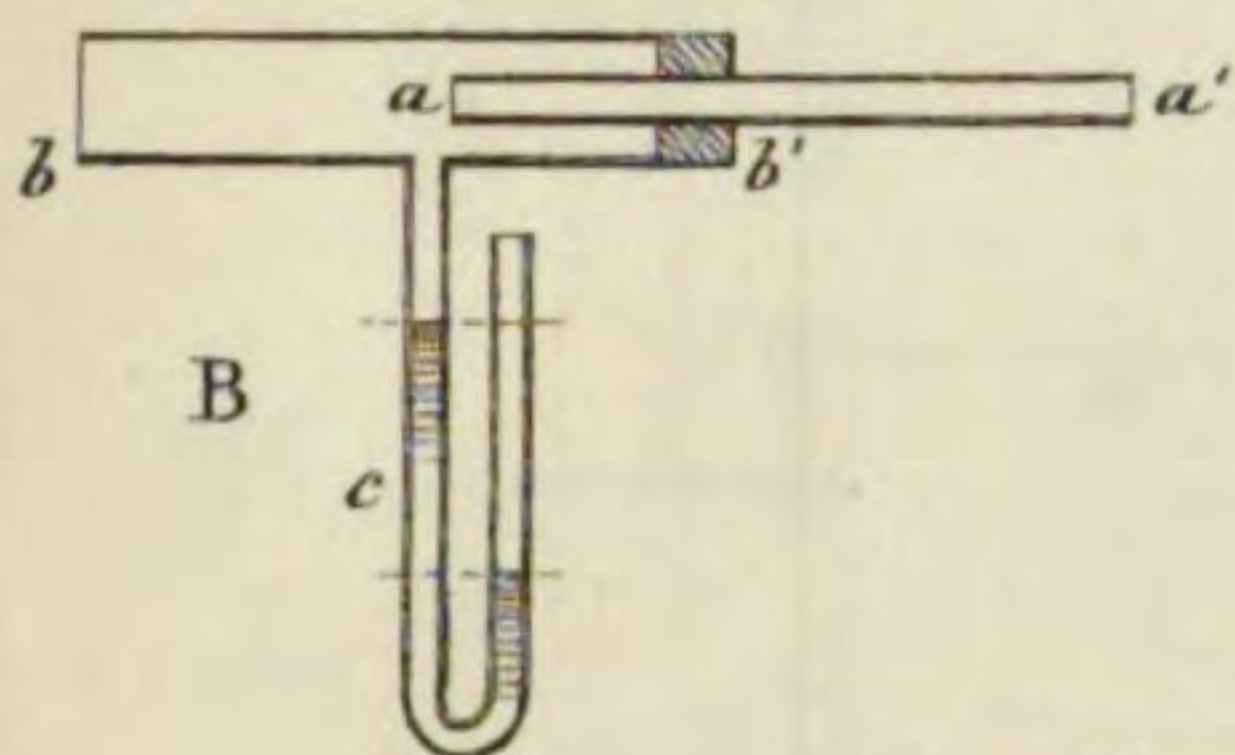
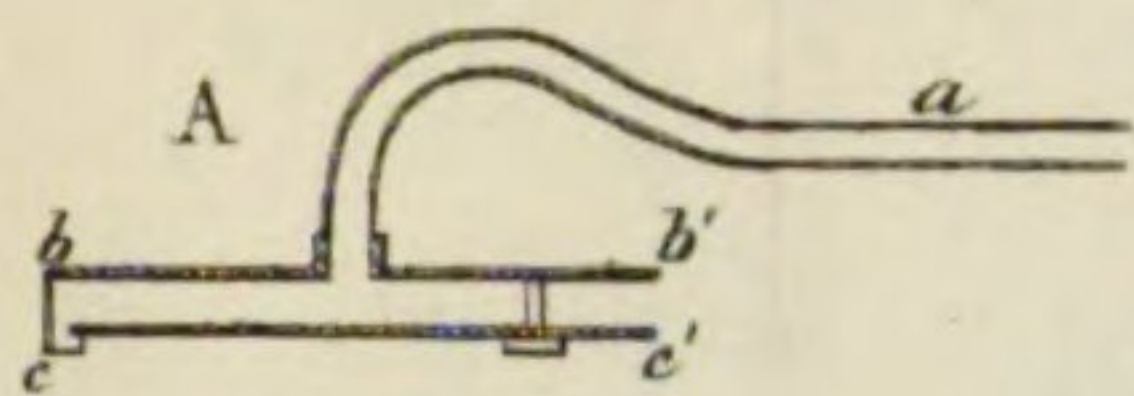


Fig. 151.

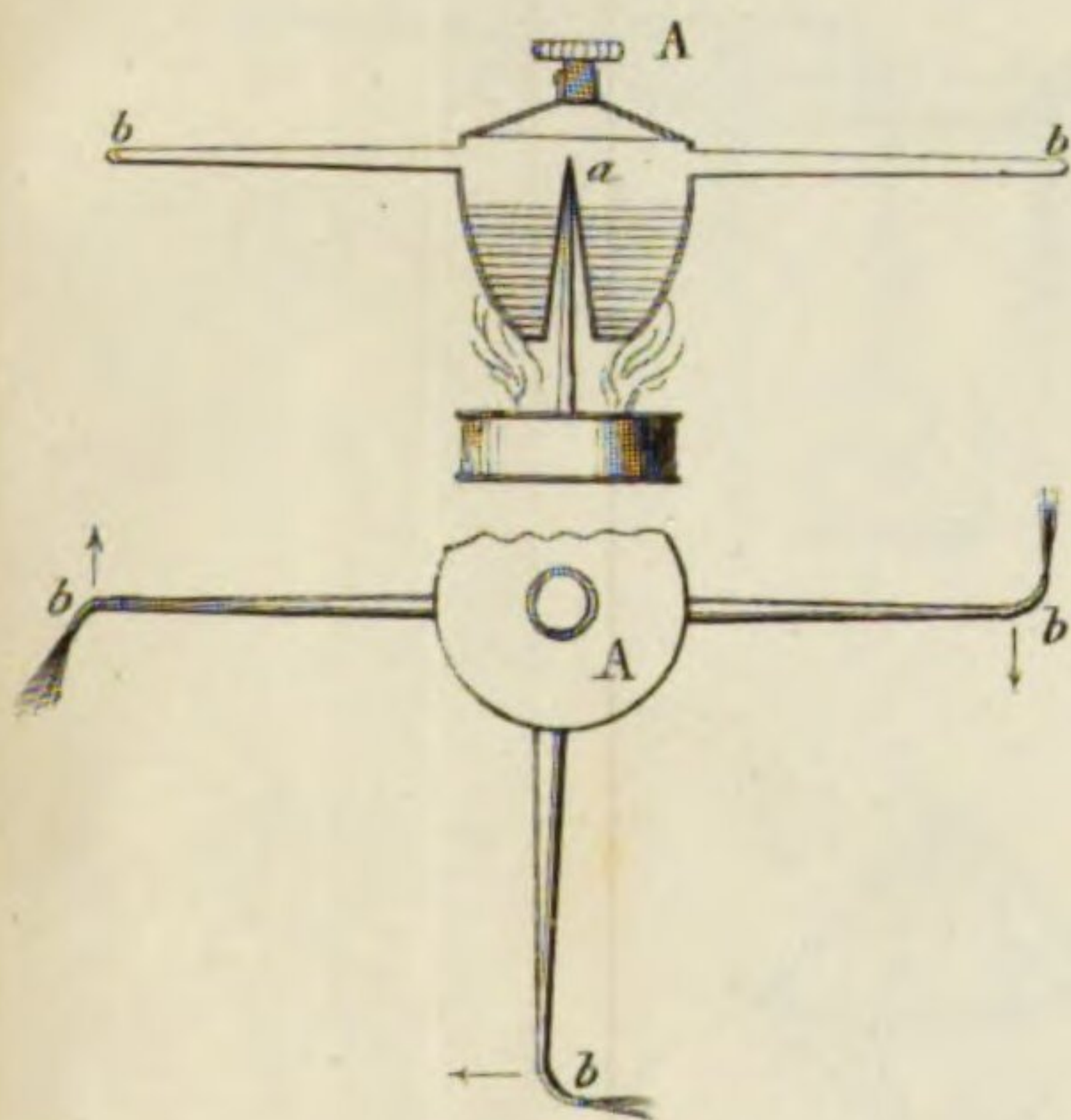


Fig. 149.

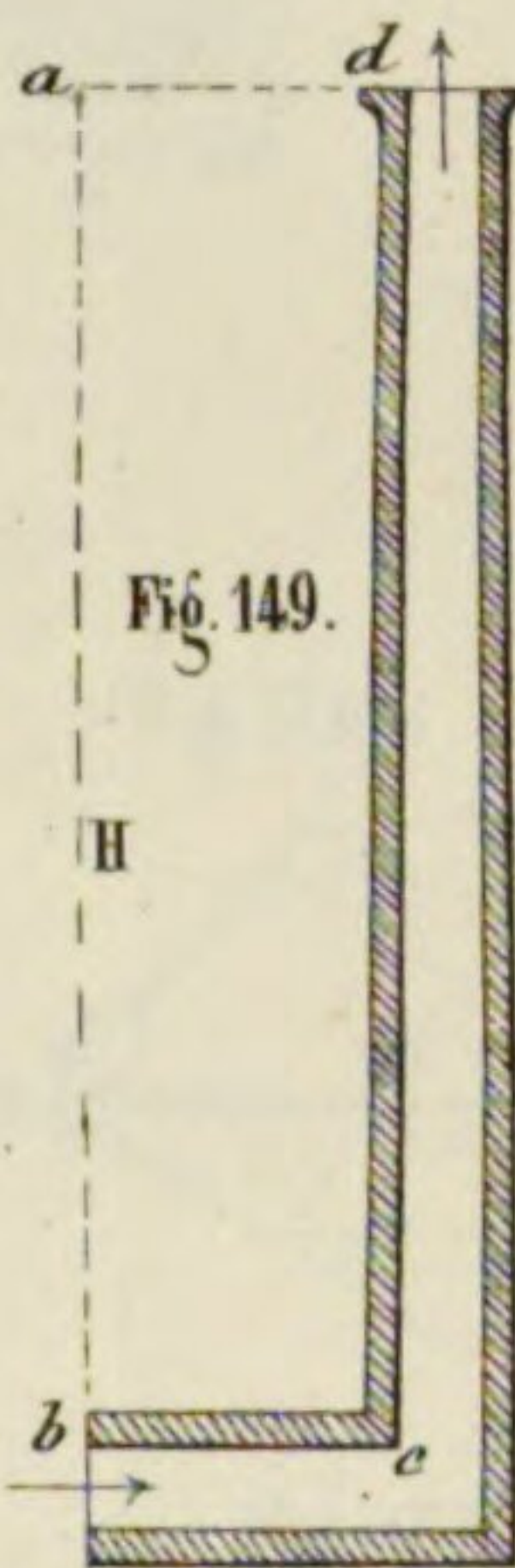


Fig. 152.

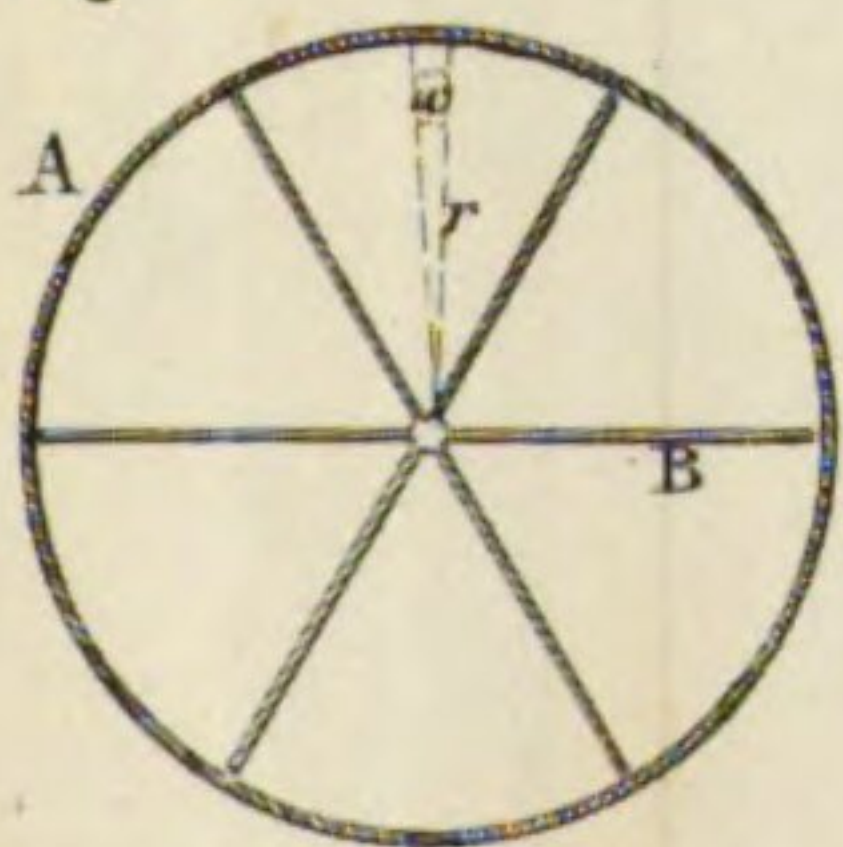
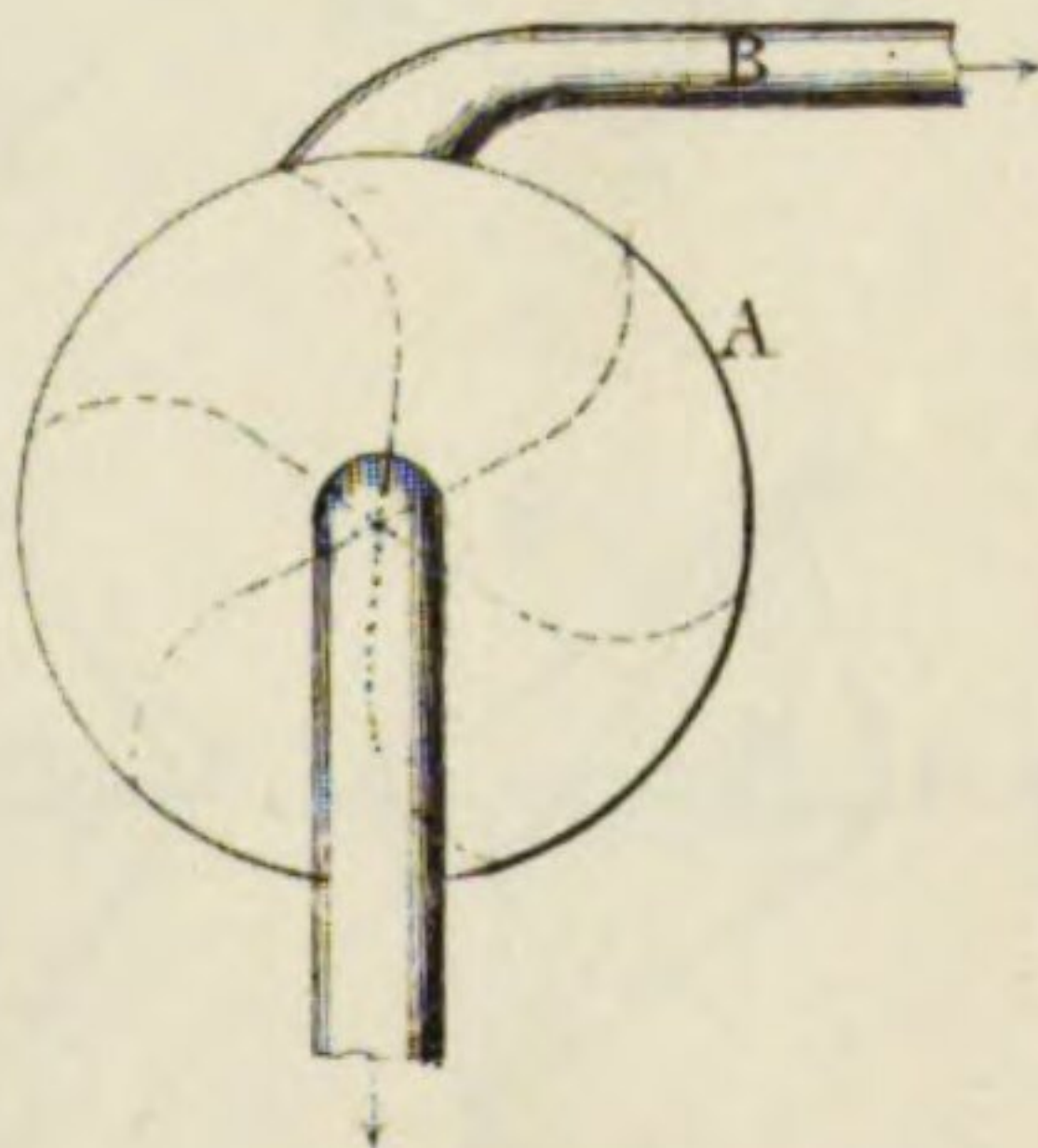
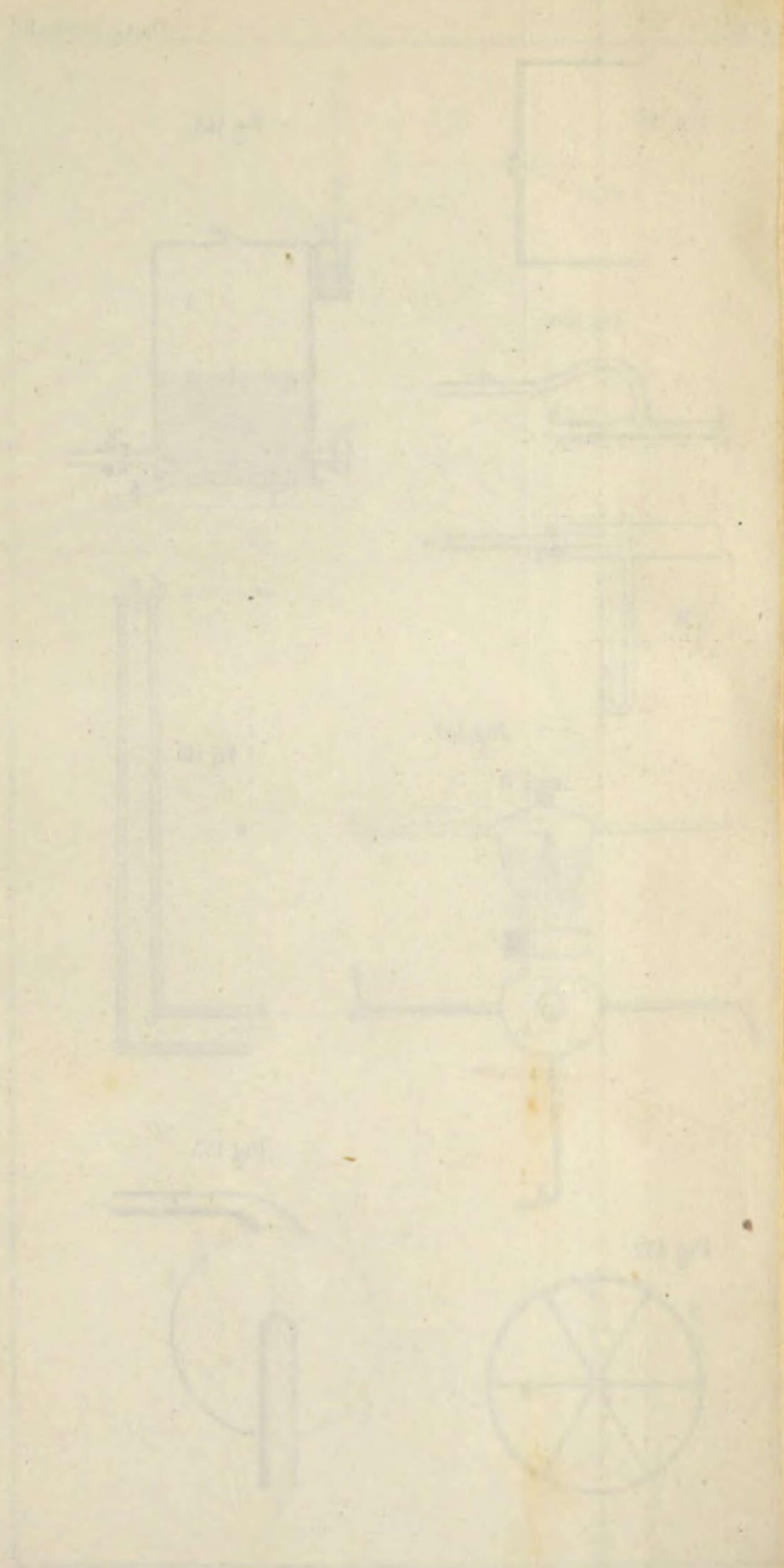


Fig. 153.





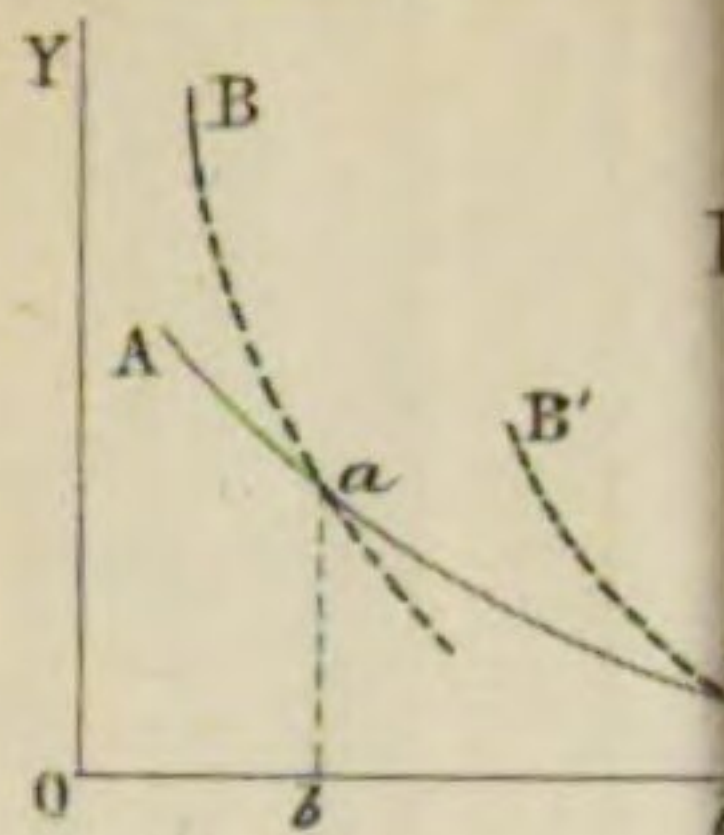


Fig. 155.

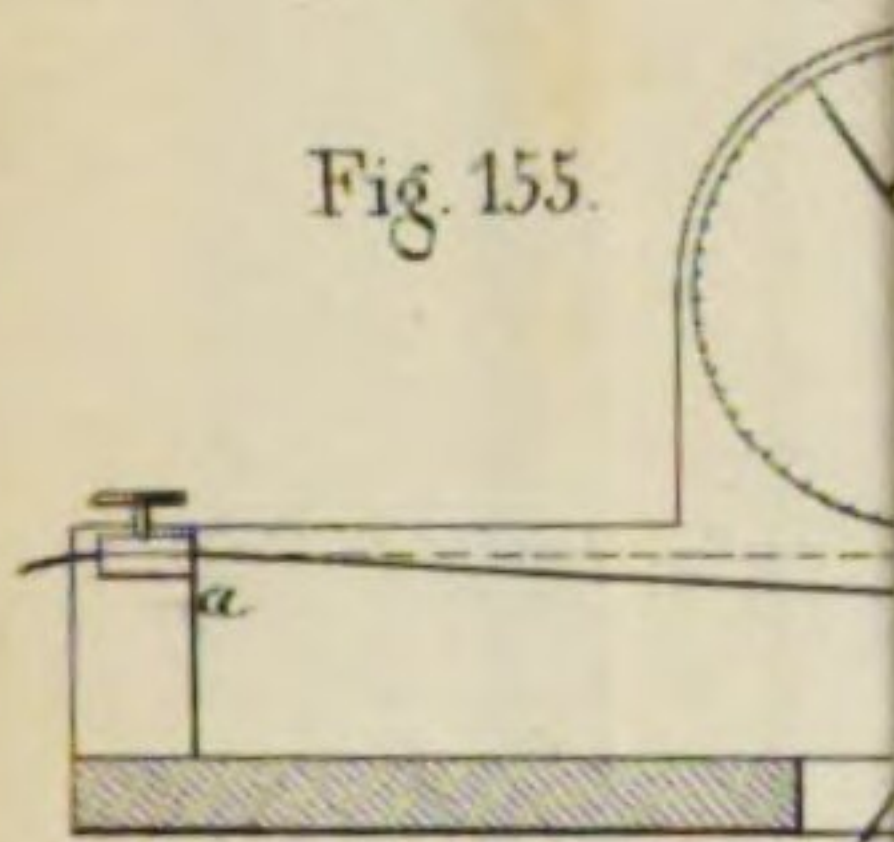


Fig. 156.



Fig. 167.

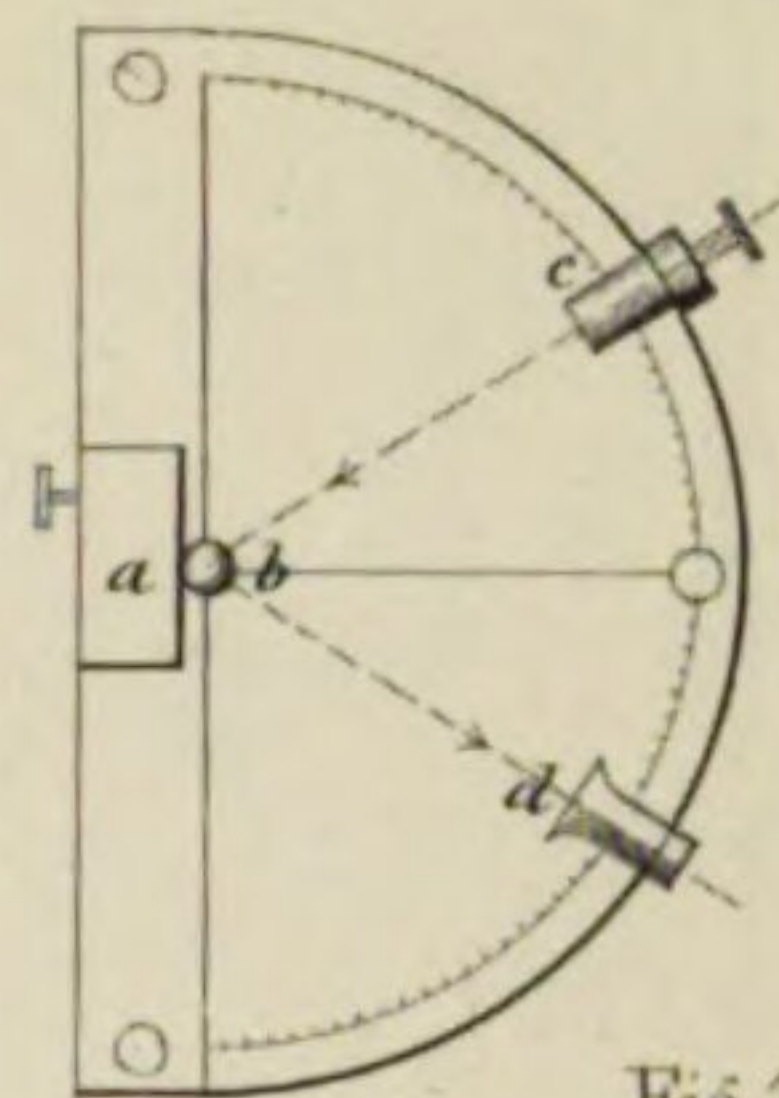
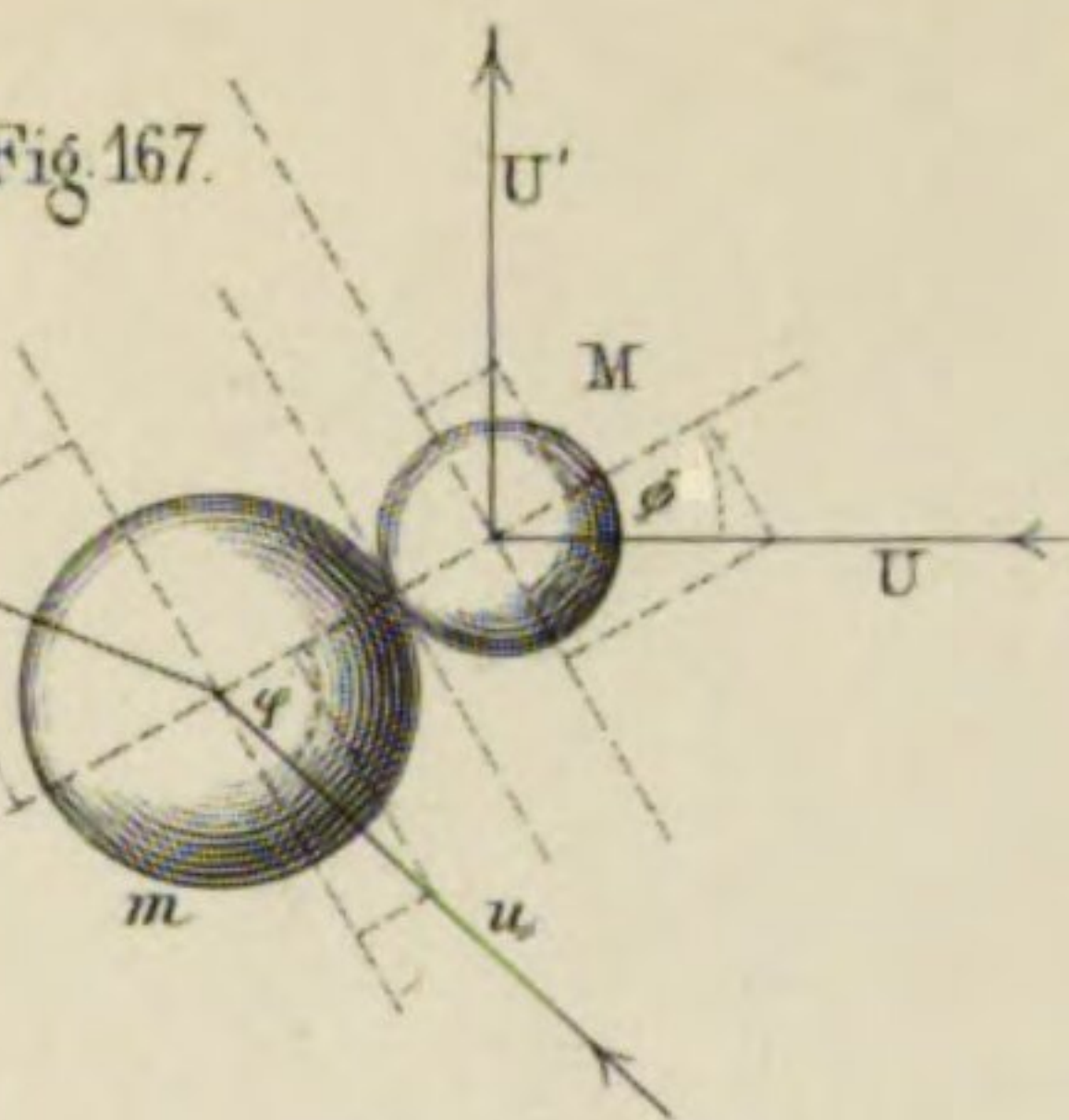


Fig. 168.

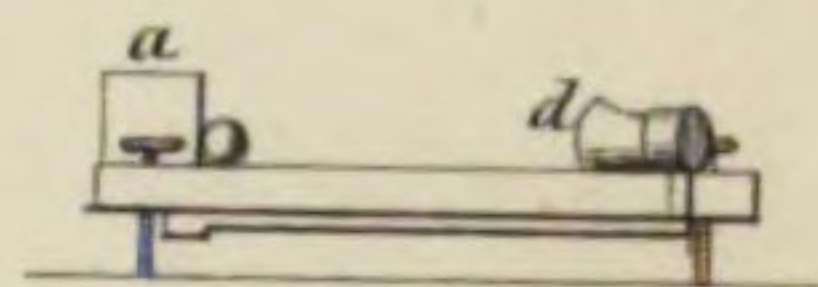


Fig. 171.

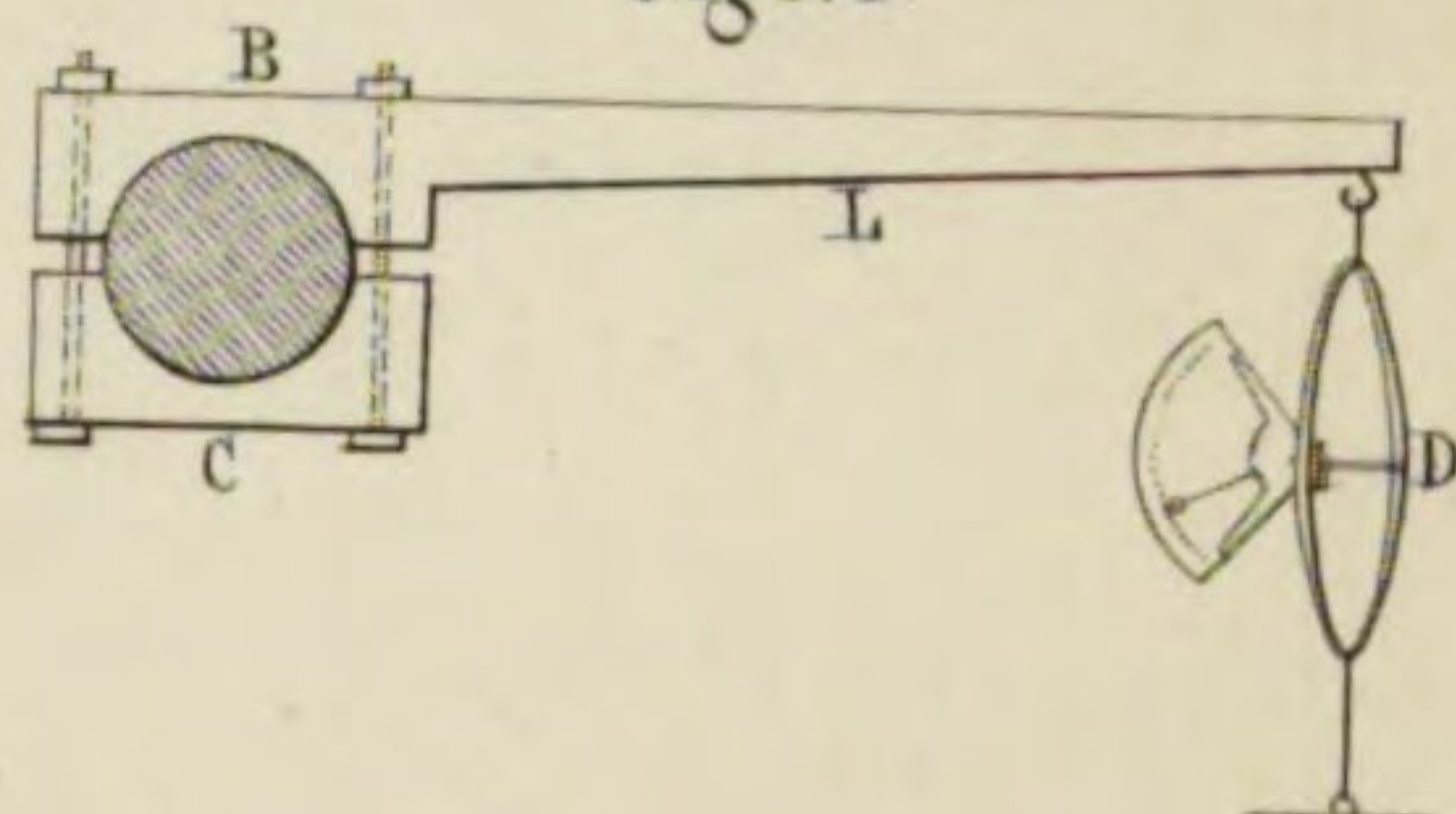


Fig. 174.

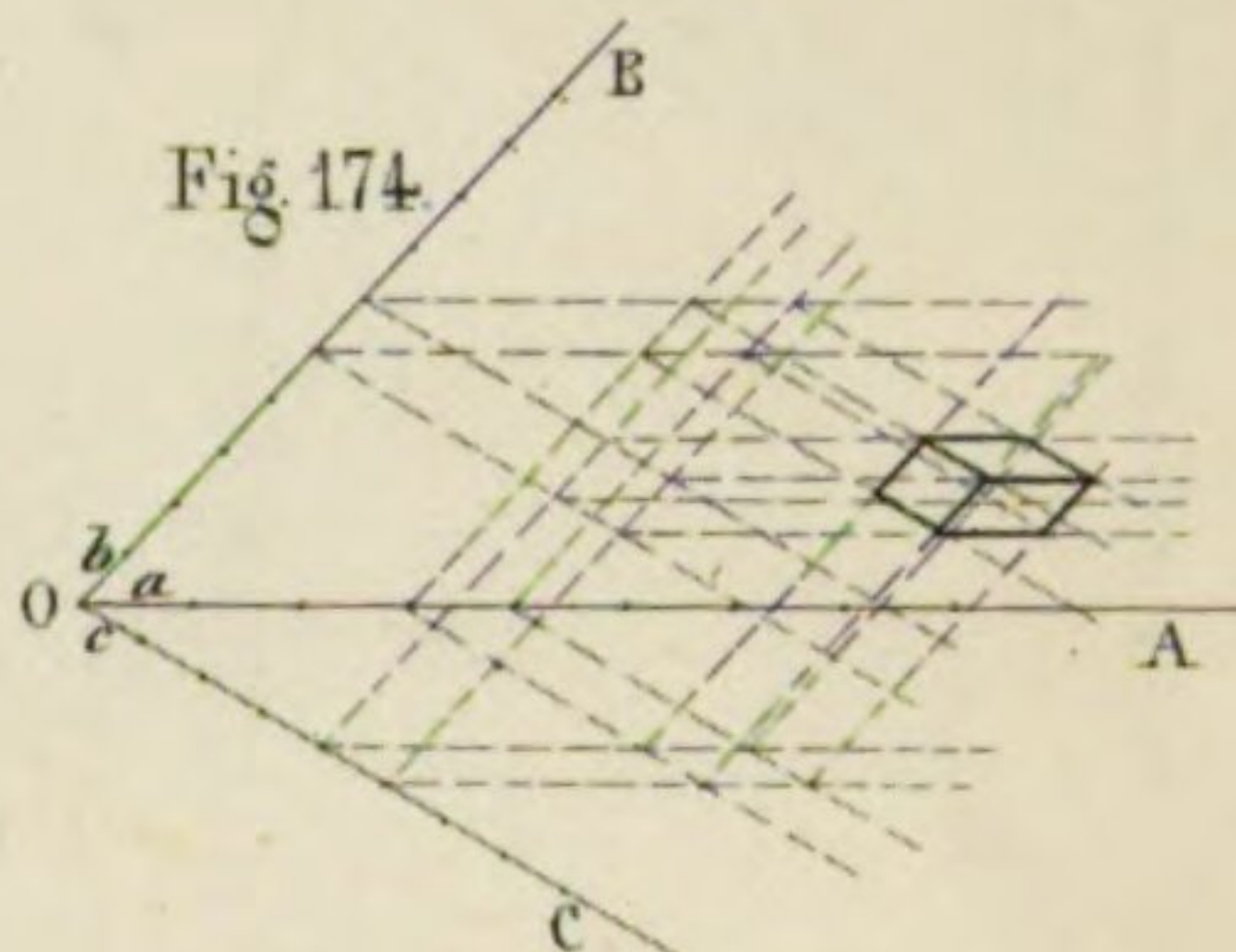
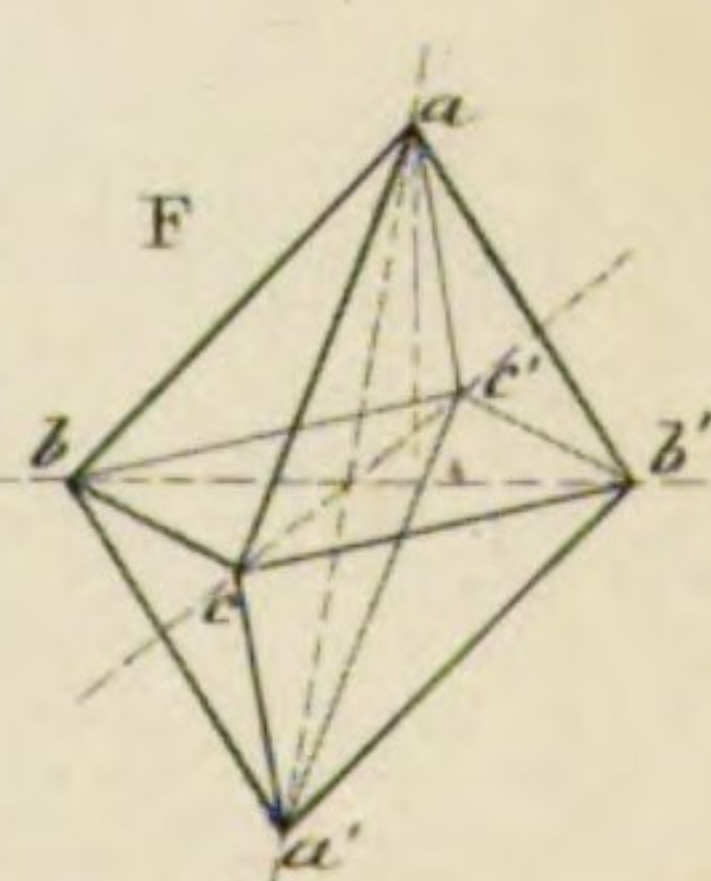
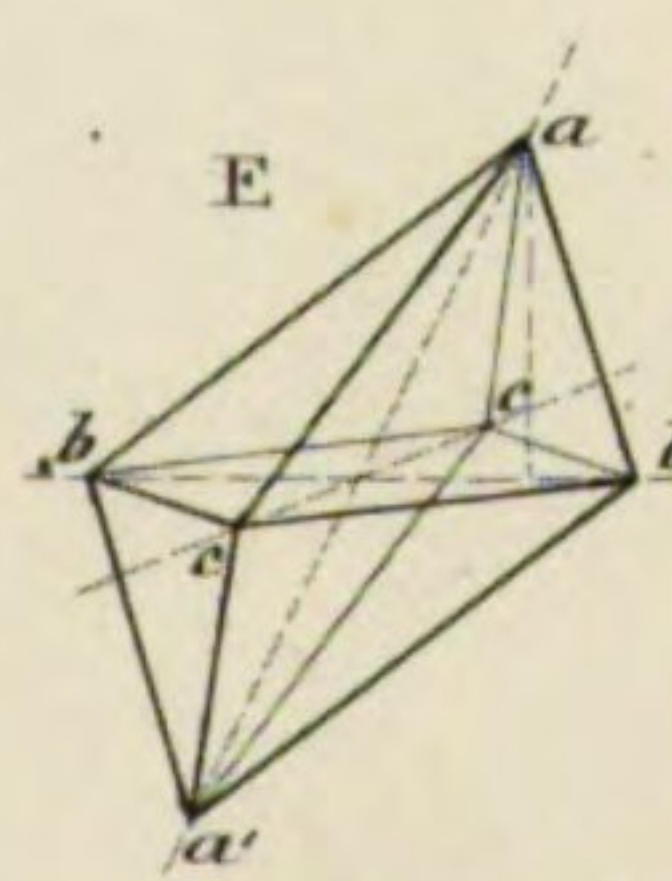
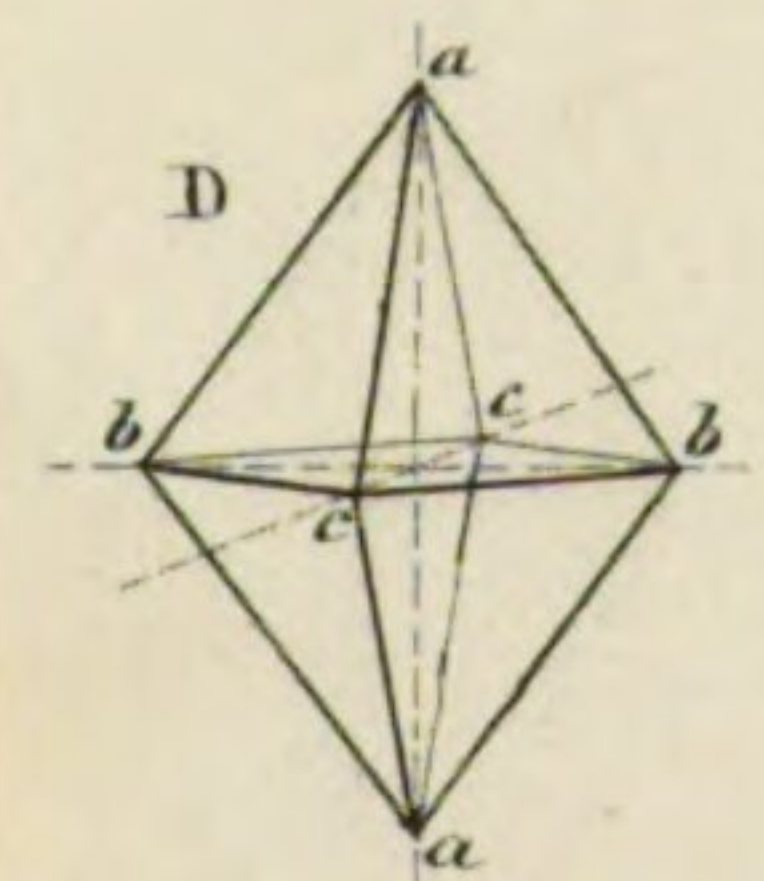
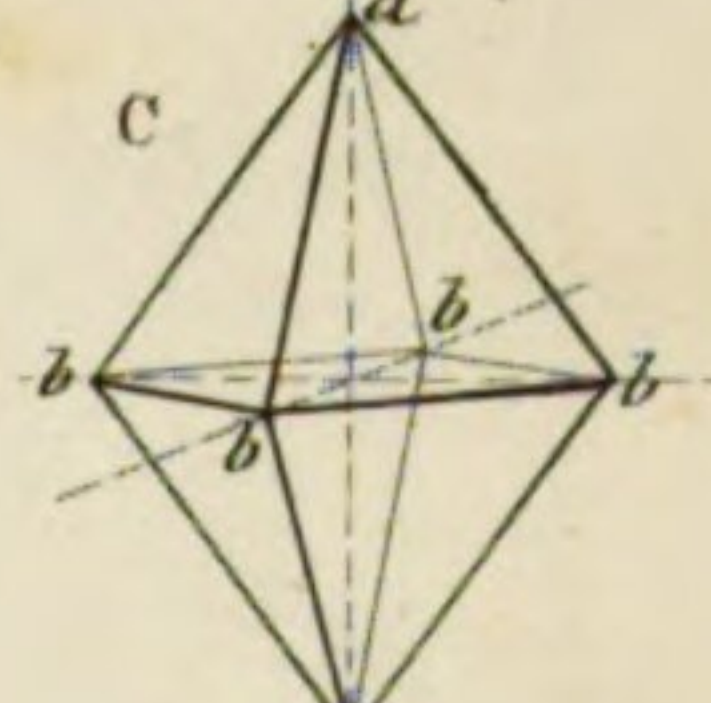
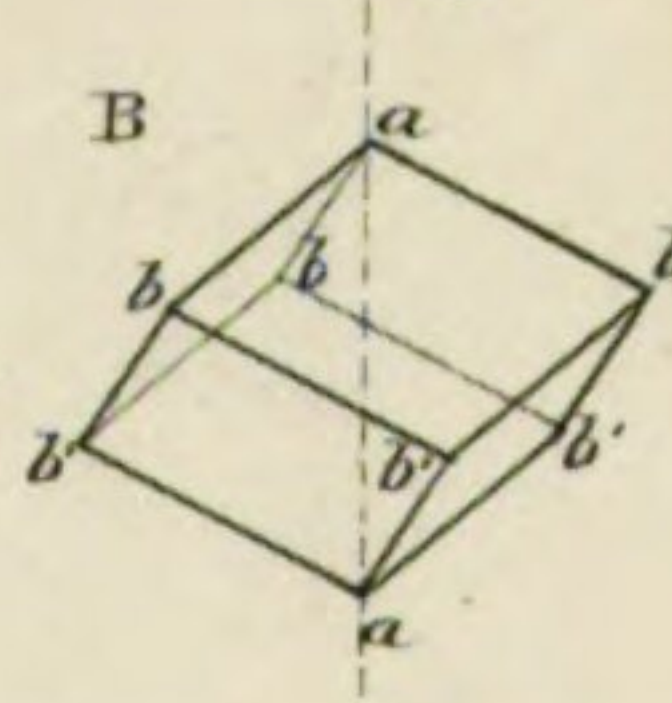
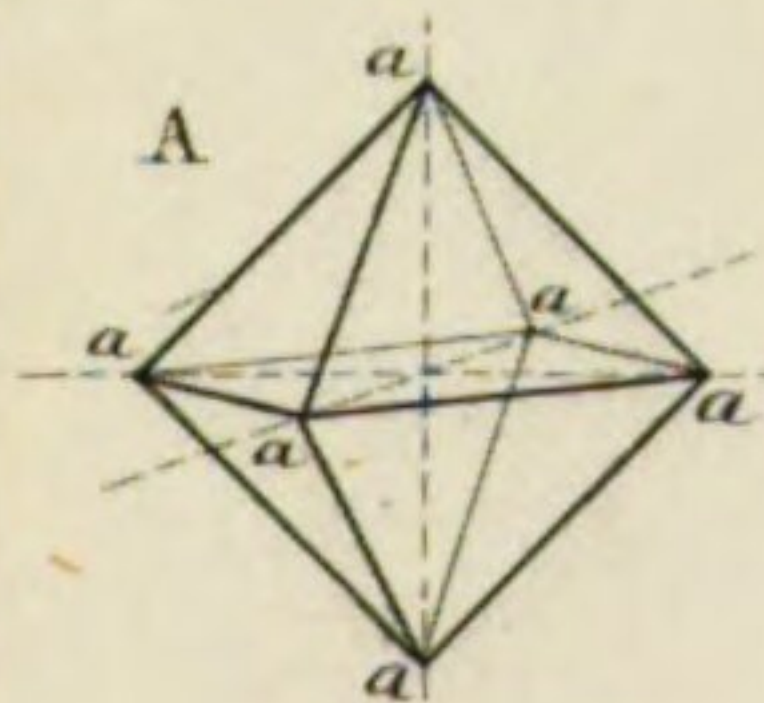


Fig. 173.



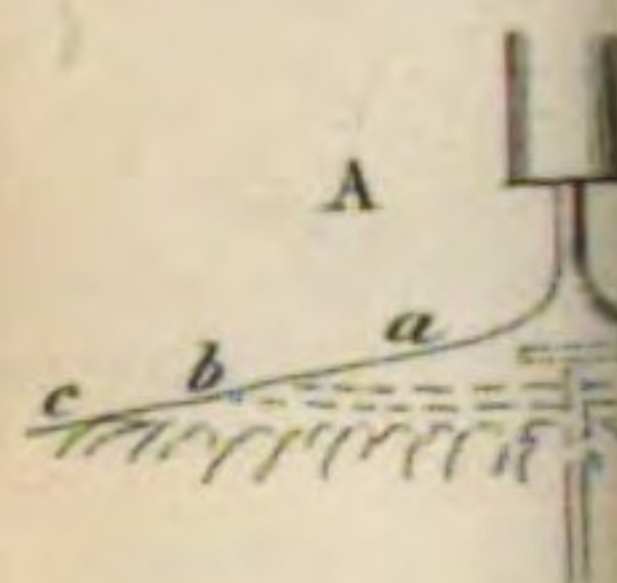
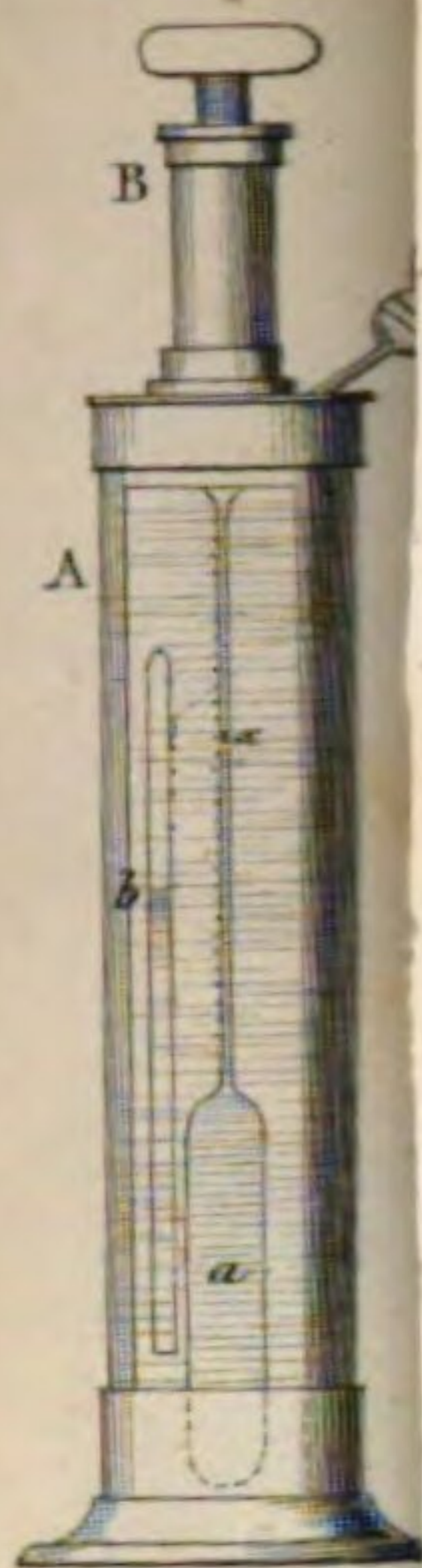
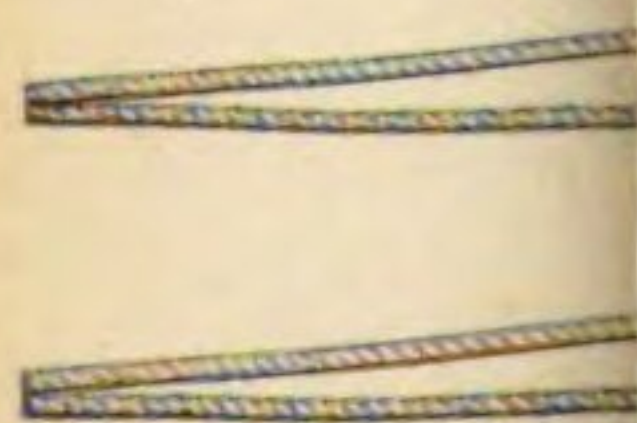


Fig.



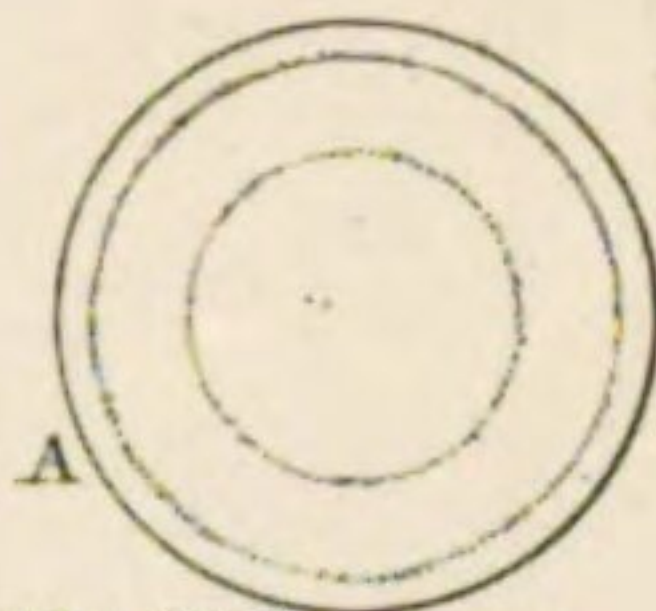
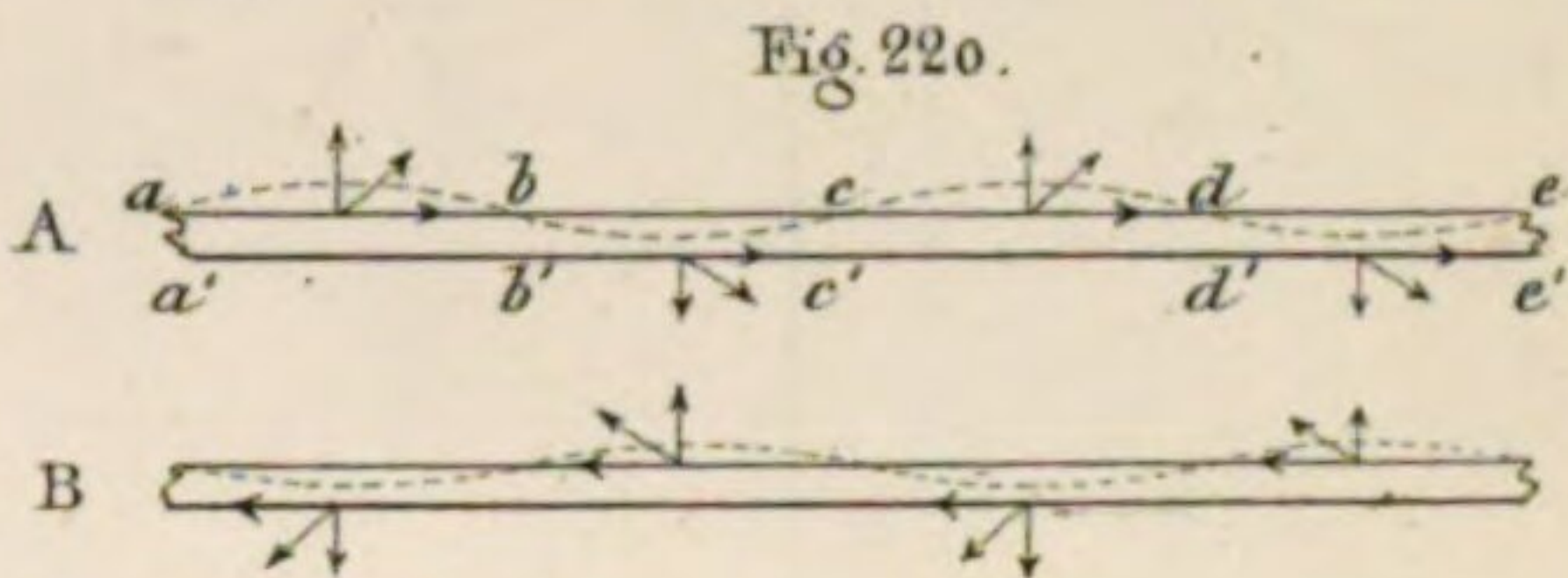
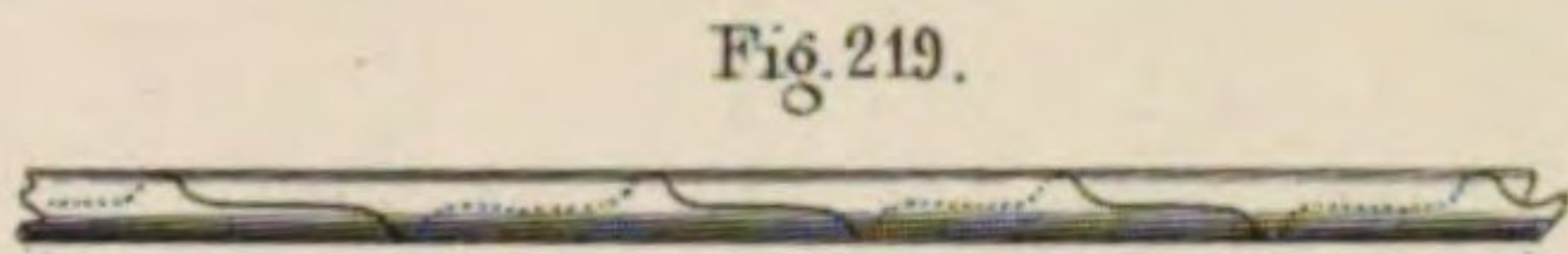
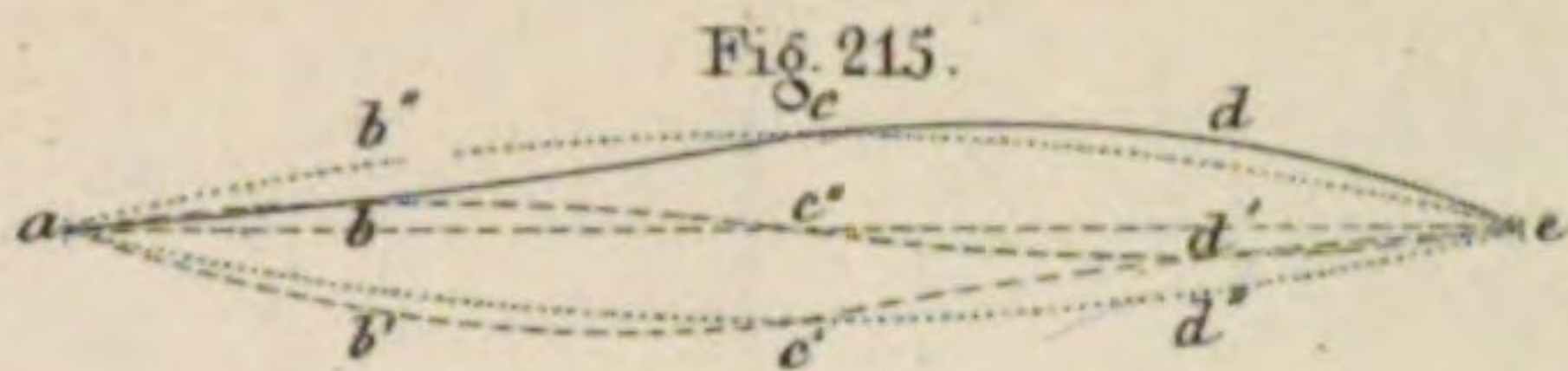
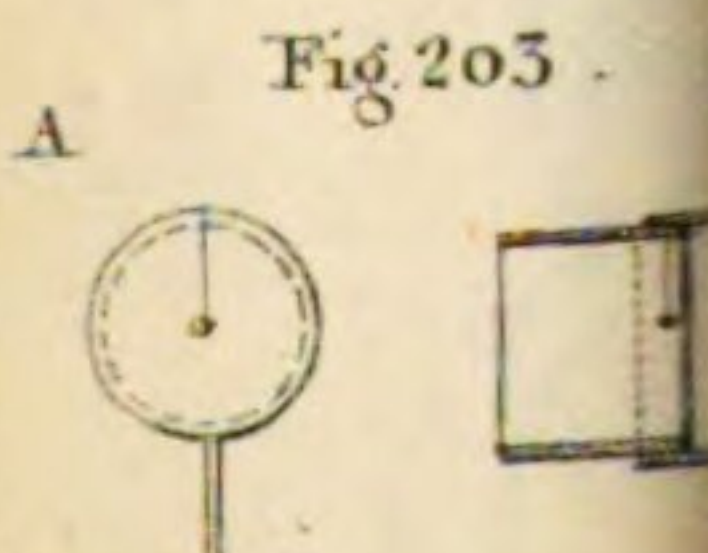
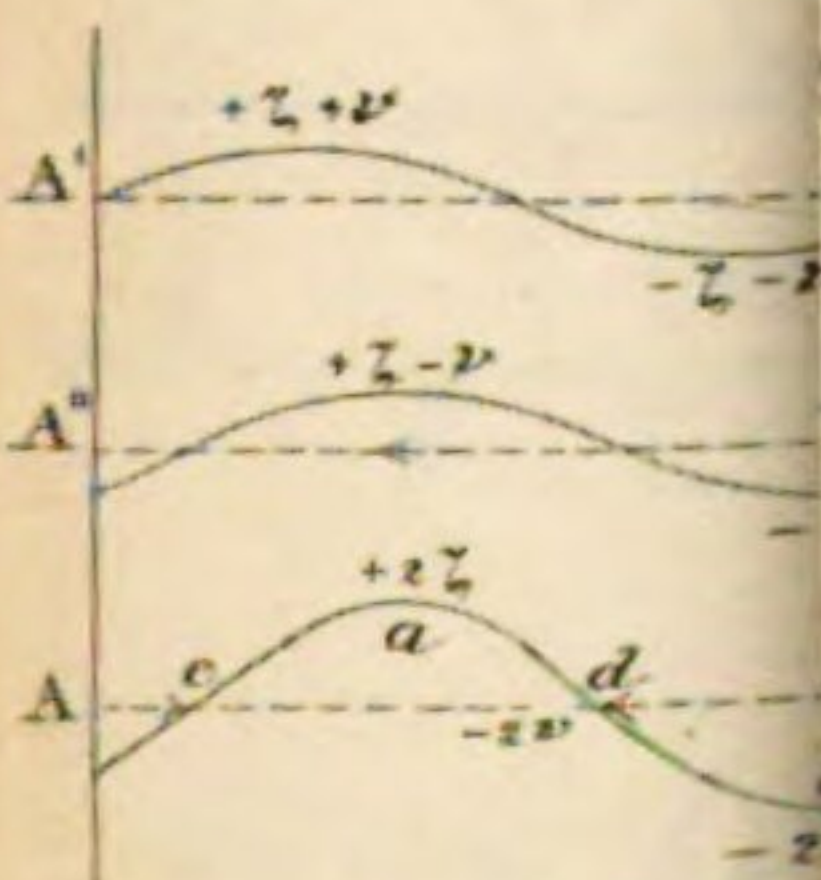
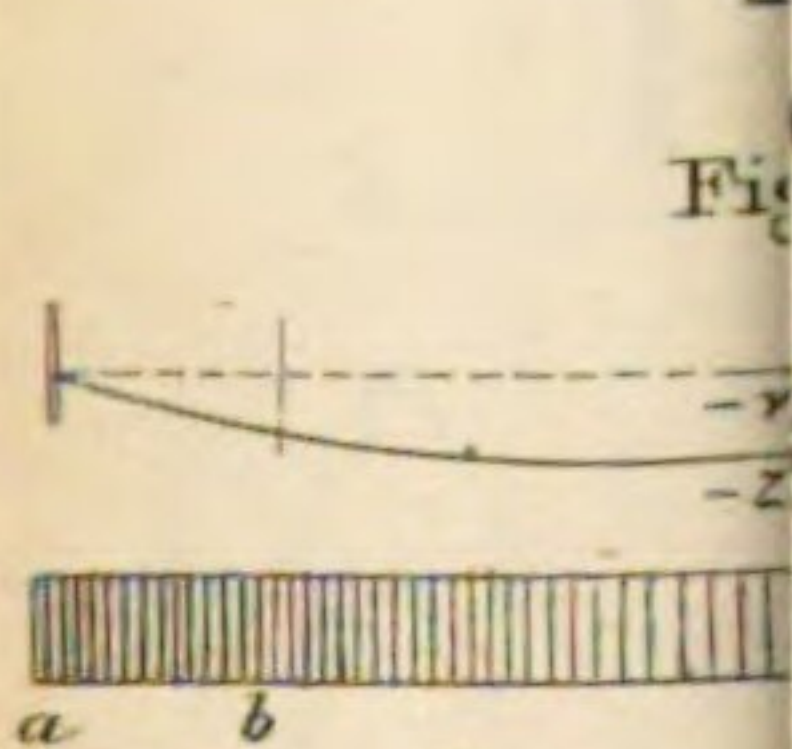
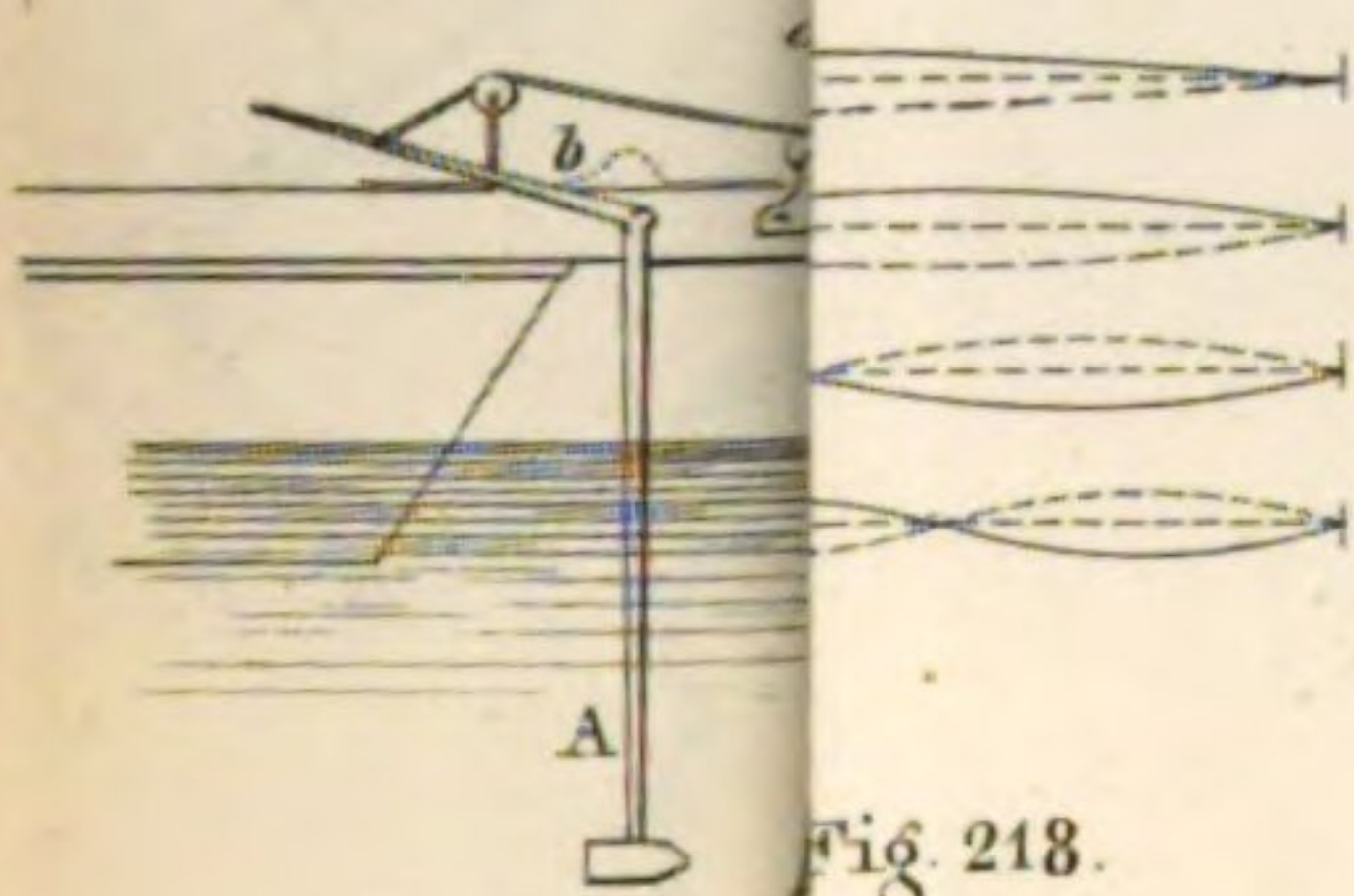
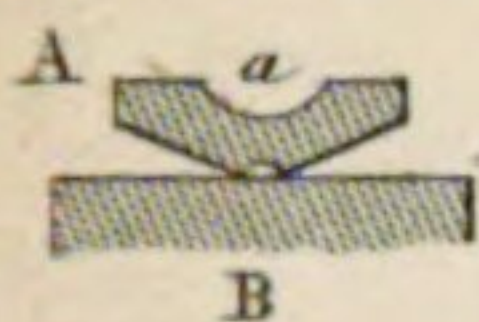
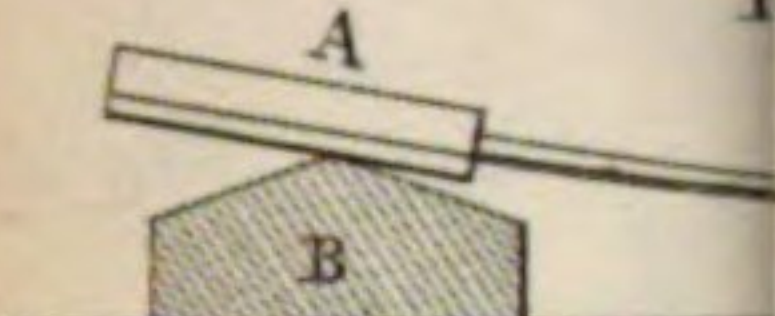
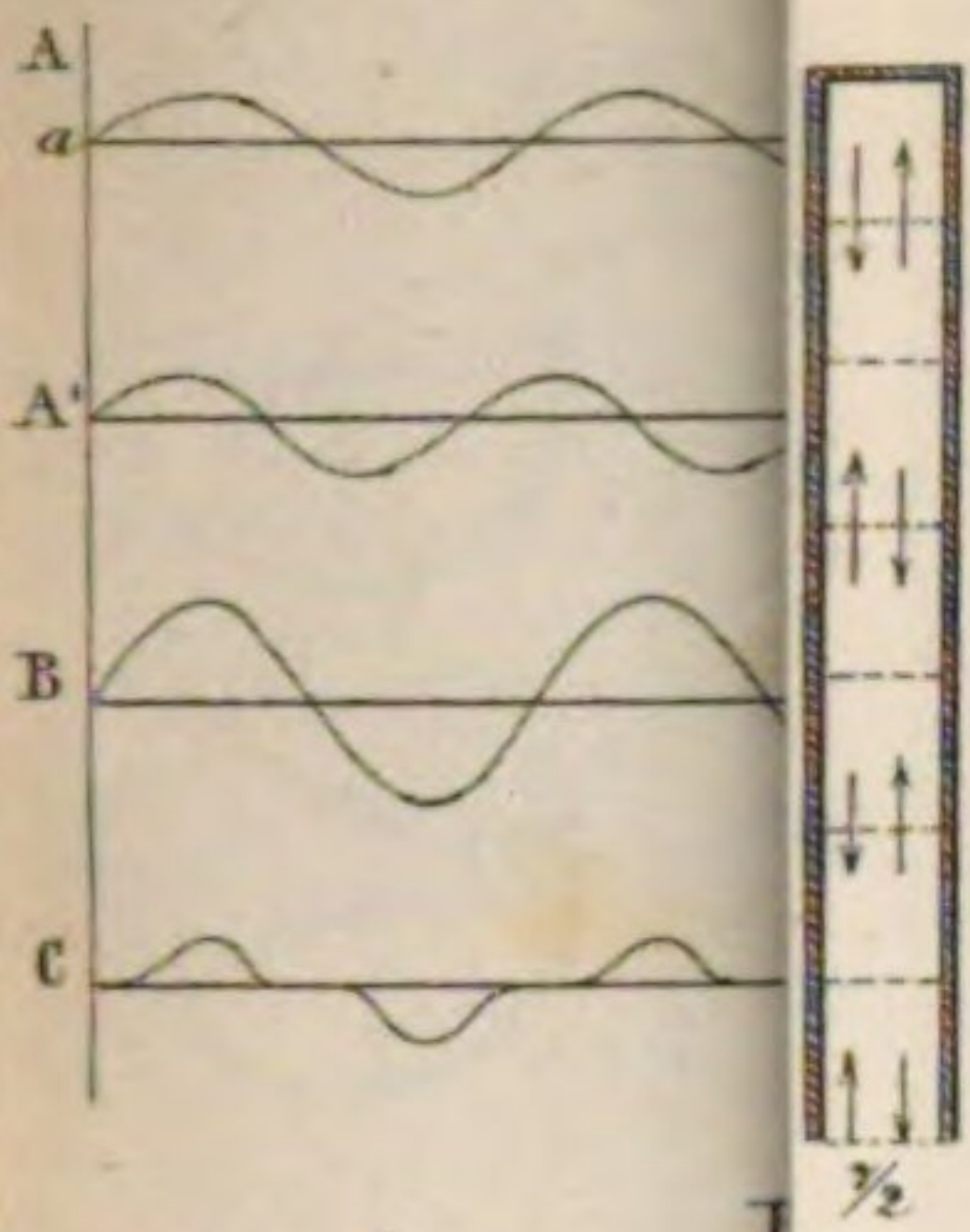


Fig. 222.

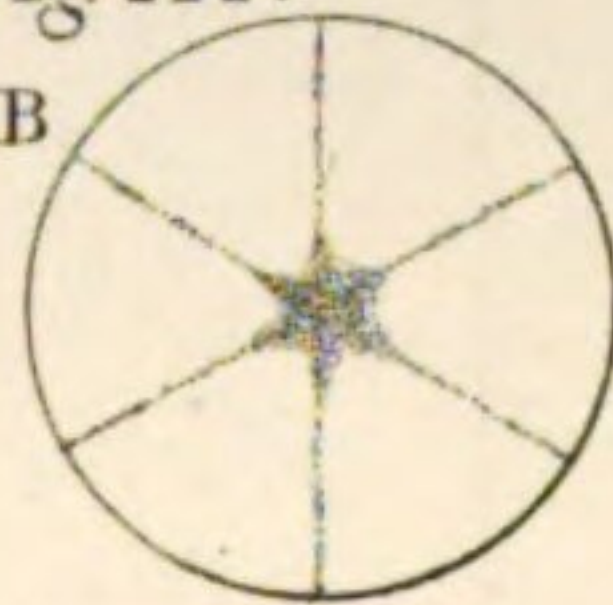


Fig. 224.

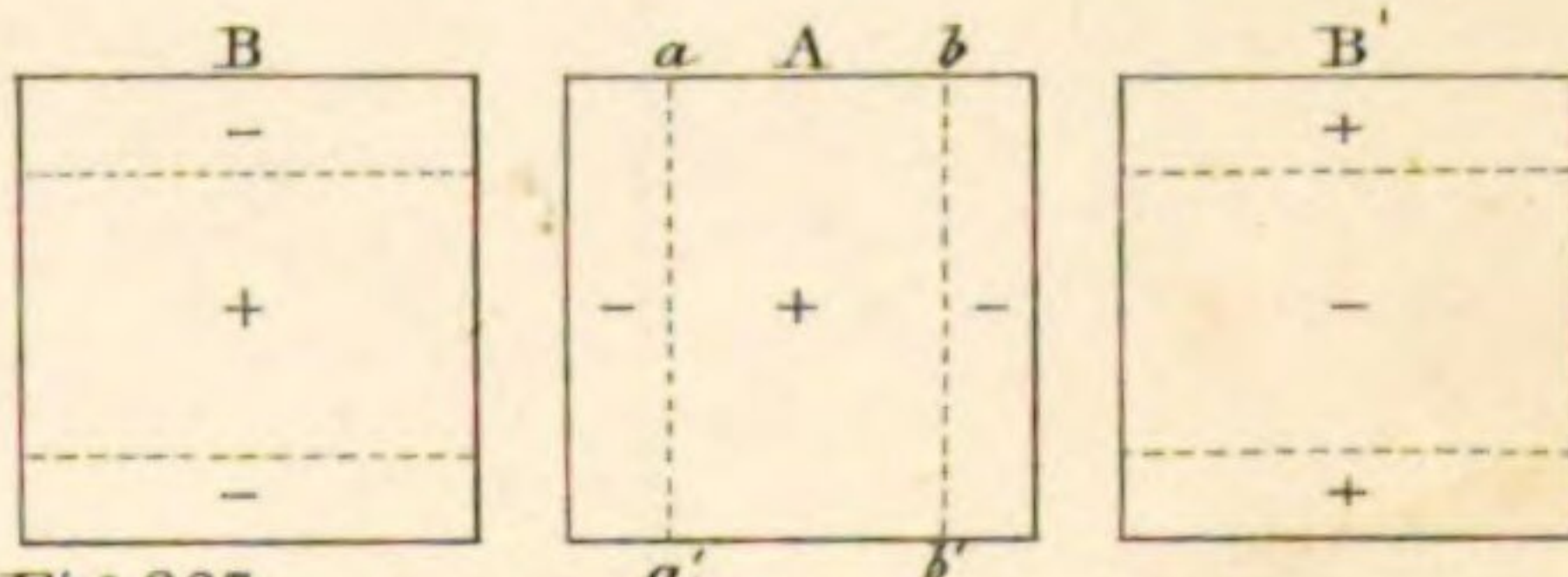
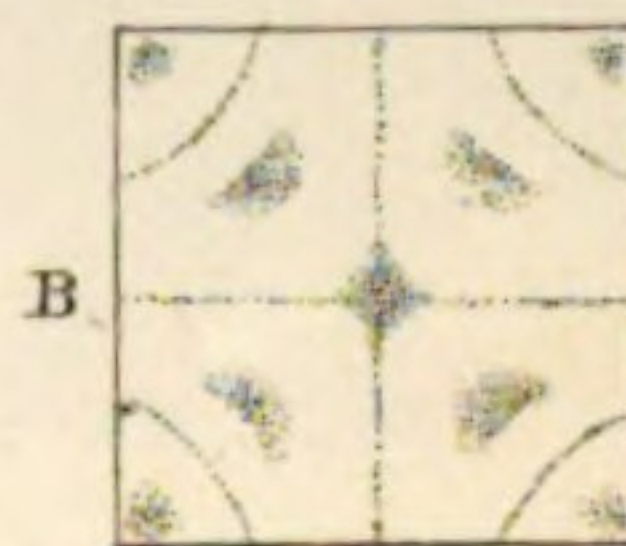
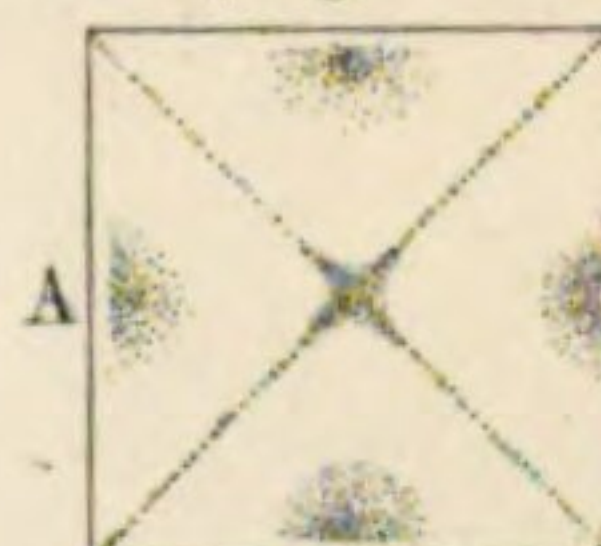


Fig. 225.

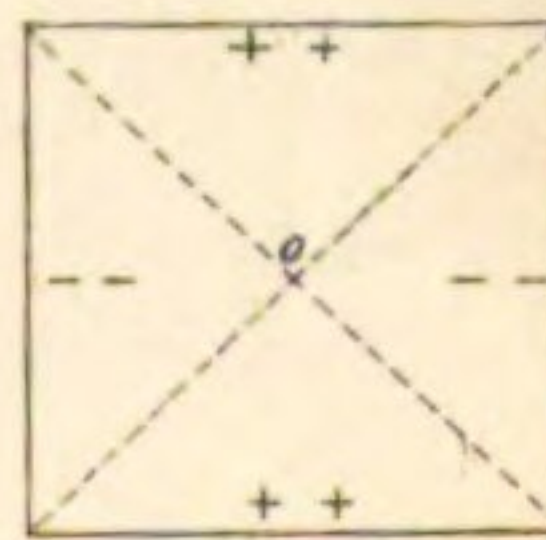
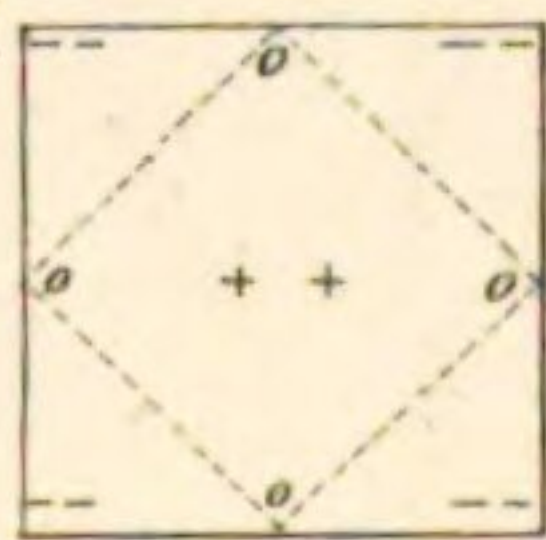
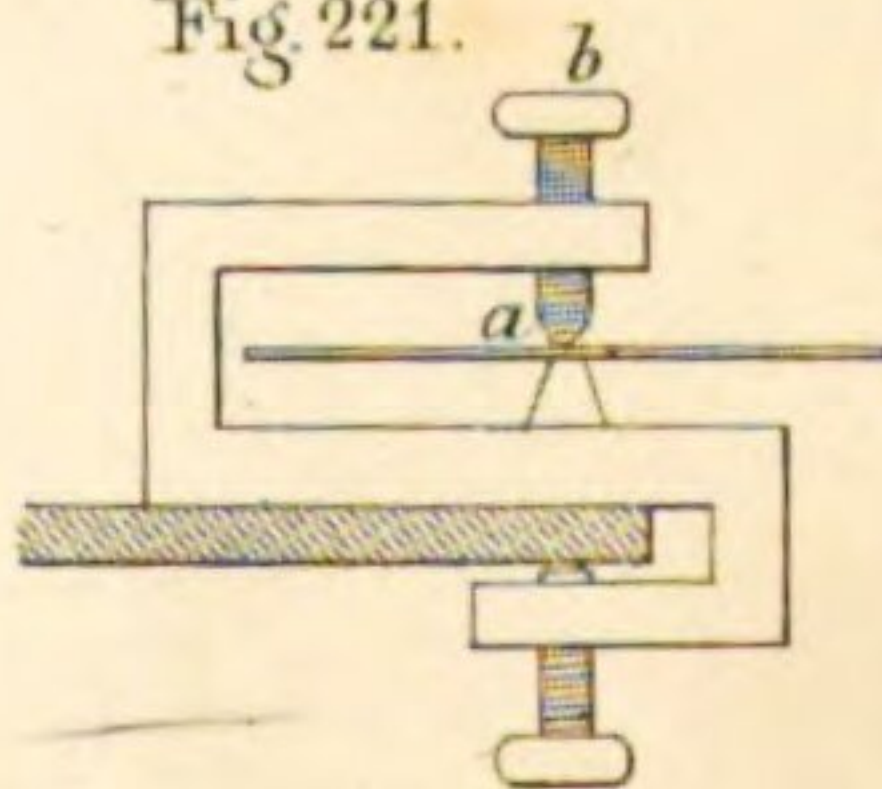


Fig. 221.



Mousson, Albert

Die Physik auf Grundlage der Erfahrung

Bd.: 1

Zürich 1858

Phys.g. 302 m-1/2,1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10131587-9